

El diseño de codos de hormigón armado como miembros curvos

Por:
Gabriel García Moreno*

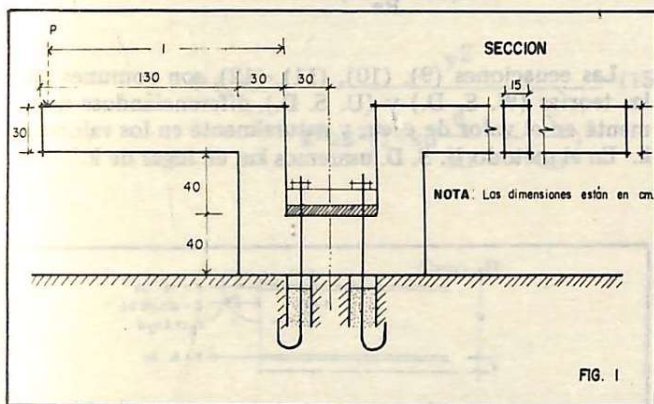
RESUMEN

Con base en la hipótesis de Navier - Bernouilli, sobre las secciones planas, se ha elaborado una teoría de resistencia última para miembros curvos de hormigón armado, y se han calculado algunas tablas de diseño en un computador. Esta teoría la confrontamos luego, con las experiencias llevadas a cabo sobre cuarenta y dos codos a rotura, cuarenta cerrando el ángulo y dos abriéndolo.

Los resultados han permitido comprobar que los codos pueden diseñarse como miembros curvos, con radio interior muy pequeño, y han permitido, así mismo establecer algunos esquemas útiles del refuerzo, así como explicarse algunos fenómenos acerca de la ruptura de tales codos.

INTRODUCCION

Este estudio se basa en los resultados de los ensayos ejecutados con veintiuna vigas en voladizo (véase la Fig. 1), las cuales proporcionan cuarenta y dos codos que se llevaron a la rotura. Cuarenta de estos codos se fallaron cerrando el ángulo y dos abriéndolo.



El propósito de los experimentos consistía en la confrontación de los resultados con una teoría basada en la última resistencia y derivada de la teoría de Résal-Winkler-Grashof para miembros curvos, en la cual se conserva la ley de las secciones planas de Bernouilli.

Algunos trabajos similares se hicieron en el pasado, pero siguiendo el método de resistencia de trabajo o útil (1), (2). Otros estudios como el de Paduart (3), se basan en la Teoría de la Elasticidad.

* Ingeniero Jefe del Laboratorio de Ensayo de Materiales
Facultad Nacional de Minas, Medellín - Colombia.

Hemos dividido el estudio en dos partes: Parte 1): contiene las bases de la teoría y sus fórmulas derivadas. Incluye las tablas de computador, obtenidas de la teoría, y que sirvieron para hacer los cálculos que se compararon con las experiencias directas. Parte 2): contiene los informes de los experimentos, la tabla final de comparación entre teoría y ensayos y las conclusiones.

PARTE I

TEORIA Y TABLAS

Bajo la hipótesis de que el codo es similar a un miembro curvo con radio interior que tiende a cero, o muy pequeño, hemos considerado dos casos: A y B, Fig. (2); ambos con sección rectangular y con aceros de tracción y compresión, sometidos a flexión pura.

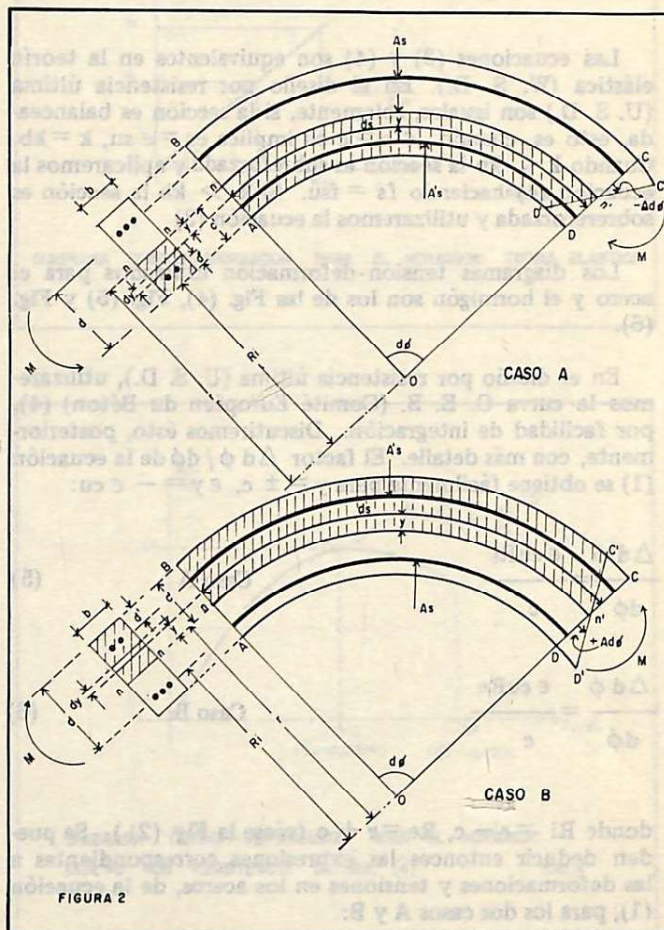


FIGURA 2

Considerando la ley de conservación de las secciones planas después de la deformación, (hipótesis de Navier Bernoulli), se puede establecer fácilmente que la deformación sigue la ley

$$\epsilon y = \frac{\delta y}{ds} = + \frac{y \Delta d \phi}{(r - y) d \phi} \quad (1)$$

Ahora, el equilibrio estático de la sección, Fig. (3), considerando esta como fisurada, nos da:

$$\rho f_s = A(k) f'_c + \rho' f'_s \quad (2)$$

donde $\rho = A_s/bd$ y $\rho' = A'_s/bd$. Tomando momentos con respecto al acero en tracción, y con respecto al centroide del diagrama de tensiones de compresión, obtenemos respectivamente:

$$\frac{M'}{f'_c b d^2} = A(k) (1 - k k_2) + \rho' \frac{f'_s}{f'_c} \left(1 - \frac{d'}{d}\right) \quad (3)$$

$$\frac{M'}{f'_c b d^2} = \frac{f_s}{f'_c} \rho (1 - k k_2) + \rho' \frac{f'_s}{f'_c} \left(k_2 k - \frac{d'}{d}\right) \quad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) son equivalentes en la teoría elástica (W. S. D.). En el diseño por resistencia última (U. S. D.) son iguales, solamente, si la sección es balanceada, esto es, cuando $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$ implica $\epsilon_s = \epsilon_{su}$, $k = k_b$. Cuando $k < k_b$ la sección es subreforzada y aplicaremos la ecuación (4) haciendo $f_s = f_{su}$. Si $k > k_b$ la sección es sobreforzada y utilizaremos la ecuación (3)

Los diagramas tensión-deformación utilizados para el acero y el hormigón son los de las Fig. (4), Fig. (5) y Fig. (6).

En el diseño por resistencia última (U. S. D.), utilizaremos la curva C. E. B. (Comité Européen du Béton) (4), por facilidad de integración. Discutiremos esto, posteriormente, con más detalle. El factor $\Delta d \phi / d \phi$ de la ecuación (1) se obtiene fácilmente para $y = \pm c$, $\epsilon y = -\epsilon_{cu}$:

$$\frac{\Delta d \phi}{d \phi} = \frac{\epsilon_{cu} R_i}{c} \quad \text{Caso A} \quad (5)$$

$$\frac{\Delta d \phi}{d \phi} = \frac{\epsilon_{cu} R_e}{c} \quad \text{Caso B} \quad (6)$$

donde $R_i = r - c$, $R_e = r + c$ (véase la Fig. (2)). Se pueden deducir entonces las expresiones correspondientes a las deformaciones y tensiones en los aceros, de la ecuación (1), para los dos casos A y B:

$$\epsilon y = \frac{\epsilon_{cu}}{c} \frac{y}{\left(1 + \frac{c}{R_i} - \frac{y}{R_i}\right)} \quad \text{Caso A} \quad (7)$$

$$\epsilon y = \frac{\epsilon_{cu}}{c} \frac{y}{\left(1 - \frac{c}{R_e} - \frac{y}{R_e}\right)} \quad \text{Caso B} \quad (8)$$

$$f_s = E_s \epsilon y = \frac{E_s \epsilon_{cu} (1 - k)}{k \left(1 + \frac{d}{R_i}\right)} \quad \text{Caso A} \quad (9)$$

$$f_s = E_s \epsilon y = \frac{E_s \epsilon_{cu} (1 - k)}{k \left(1 - \frac{d}{R_e}\right)} \quad \text{Caso B} \quad (10)$$

$$f'_s = E_s \epsilon' y = \frac{E_s \epsilon_{cu} \left(k - \frac{d'}{d}\right)}{k \left(1 + \frac{d'}{R_i}\right)} \quad \text{Caso A} \quad (11)$$

$$f'_s = E_s \epsilon' y = \frac{E_s \epsilon_{cu} \left(k - \frac{d'}{d}\right)}{k \left(1 - \frac{d'}{R_e}\right)} \quad \text{Caso B} \quad (12)$$

Las ecuaciones (9), (10), (11), (12), son comunes para las teorías (W. S. D.) y (U. S. D.), diferenciándose únicamente en el valor de ϵ_{cu} , y naturalmente en los valores de k . En el método U. S. D. usaremos k_u , en lugar de k .

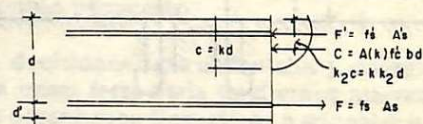


FIG. 3

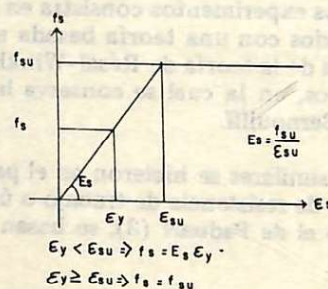


FIG. 4

DIAGRAMA TENSION-DEFORMACION PARA EL ACERO

Las tensiones en el hormigón, por el contrario, son completamente diferentes para ambas teorías ya que utilizan diferentes diagramas: Fig. (5) y Fig. (6); así, las tensiones elásticas, de las ecuaciones (7) y (8) y del diagrama de la Fig. (5), estarán dadas por:

Caso A

$$f_c(y) = E_c \epsilon_y = -f'_c \frac{y}{kd \left(1 + \frac{kd}{R_i} - \frac{y}{R_i}\right)} \quad (13)$$

Caso B

$$f_c(y) = E_c \epsilon_y = -f'_c \frac{y}{kd \left(1 - k \frac{d}{R_e} + \frac{y}{R_e}\right)} \quad (14)$$

y las tensiones para el U. S. D., de las ecuaciones (7) y (8) y del diagrama de la Fig. (6), y sabiendo que $\epsilon_{cu}/\epsilon'_c = 1,4$ serán:

Caso A

$$f_c(y) = -2,8f'_c \frac{y}{kud \left(1 + ku \frac{d}{R_i} - \frac{y}{R_i}\right)} + 1,96f'_c \frac{y^2}{k^2ud^2 \left(1 + ku \frac{d}{R_i} - \frac{y}{R_i}\right)^2} \quad (15)$$

Caso B

$$f_c(y) = -2,8f'_c \frac{y}{(1 - ku \frac{d}{R_e} + \frac{y}{R_e})} + 1,96f'_c \frac{y^2}{k^2ud^2 (1 - ku \frac{d}{R_e} + \frac{y}{R_e})^2} \quad (16)$$

Considerando, ahora, el equilibrio estático de la sección, Fig. (3), podemos deducir el valor del factor A (k) que controla la forma del diagrama de tensiones, e igualmente, tomando momentos de las fuerzas del bloque de compresión con respecto al eje neutro, se obtiene la posición o, del centroide del bloque de compresión, o diagrama de tensiones, así, respectivamente:

$$A(k) = \frac{1}{f'_cd} \int_0^{kd} f_c(y) dy \quad (17)$$

$$(1-k_2) = \frac{1}{f'_ckd^2A(k)} \int_0^{kd} f_c(y)y dy \quad (18)$$

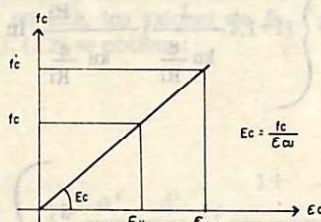


FIG. 5

DIAGRAMA TENSION-DEFORMACION PARA EL HORMIGON. TEORIA ELASTICA

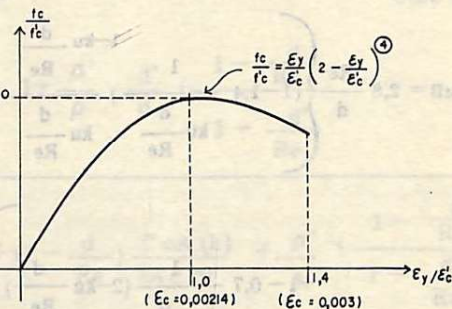


DIAGRAMA TENSION-DEFORMACION PARA EL HORMIGON
DISEÑO POR RESISTENCIA ULTIMA. ④

FIG. 6

Reemplazando en estas dos ecuaciones, los valores dados por las ecuaciones (13), (14), (15) y (16) se obtiene para los casos A y B:

Caso A (19)
W. S. D.

$$AeB = \frac{Ri}{d} \left\{ -1 + \frac{1+k \frac{d}{Ri}}{k \frac{d}{Ri}} \ln \left(1+k \frac{d}{Ri} \right) \right\}$$

Caso B (20)
W. S. D.

$$AeB = \frac{Re}{d} \left\{ 1 + \frac{1-k \frac{d}{Re}}{k \frac{d}{Re}} \ln \left(1-k \frac{d}{Re} \right) \right\}$$

Caso A (21)
U. S. D.

$$AuA = 2,8 \frac{Ri}{d} \left\{ \left(1+1,4 \frac{1}{ku \frac{d}{Ri}} \right) \frac{1+ku \frac{d}{Ri}}{ku \frac{d}{Ri}} \ln \left(1+ku \frac{d}{Ri} \right) - 1 - 0,7 \frac{1}{ku \frac{d}{Ri}} \left(2+ku \frac{d}{Ri} \right) \right\}$$

Caso B (22)
U.S.D.

$$AuB = 2,8 \frac{Re}{d} \left\{ \left(1-1,4 \frac{1}{ku \frac{d}{Re}} \right) \frac{1-ku \frac{d}{Re}}{ku \frac{d}{Re}} \ln \left(1-ku \frac{d}{Re} \right) + 1 - 0,7 \frac{1}{ku \frac{d}{Re}} \left(2-ku \frac{d}{Re} \right) \right\}$$

Caso A
W. S. D.

$$(1-k2) eA = \frac{\frac{1}{2} + 2 \left(1+k \frac{d}{Ri} \right) - \frac{3}{2} \left(1+k \frac{d}{Ri} \right)^2}{k^2 \left(\frac{d}{Ri} \right)^3} AeA +$$

$$\frac{\left(1+k \frac{d}{Ri} \right)^2 \ln \left(1+k \frac{d}{Ri} \right)}{k^2 \left(\frac{d}{Ri} \right)^3 AeA}$$

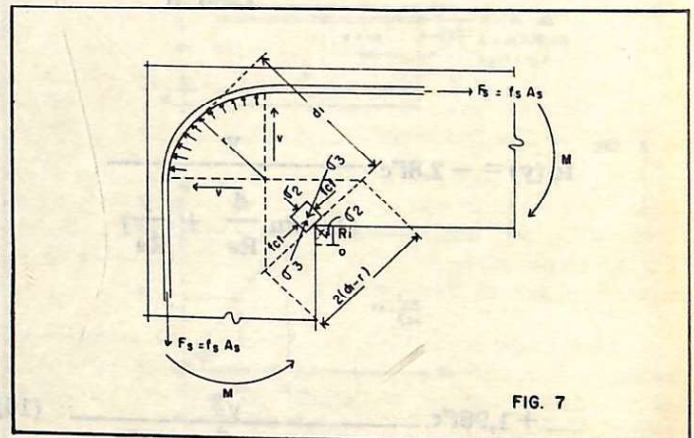
(23)

Caso B
W. S. D.

$$(1-k2) eB = \frac{\frac{1}{2} - 2 \left(1-k \frac{d}{Re} \right) + \frac{3}{2} \left(1-k \frac{d}{Re} \right)^2}{k^2 \left(\frac{d}{Re} \right)^3} AeB$$

$$\frac{\left(1-k \frac{d}{Re} \right)^2 \ln \left(1-k \frac{d}{Re} \right)}{k^2 \left(\frac{d}{Re} \right)^3 AeB}$$

(24)



Caso A (25)
U.S.D.

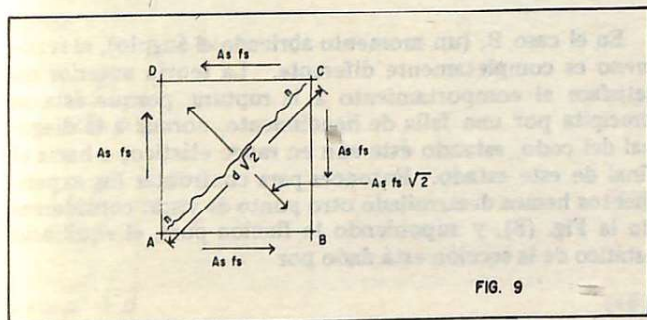
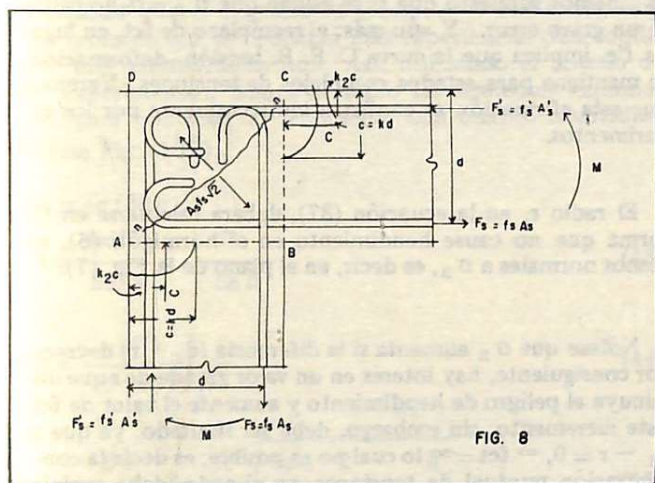
$$(1-k_2) u_A = \frac{2.8}{k^2 u \left(\frac{d}{Ri} \right)^3 A u A} \left\{ \left(1 + k u \frac{d}{Ri} \right)^2 \left(1 + \frac{2.1}{k u \frac{d}{Ri}} \right) \ln \left(1 + k u \frac{d}{Ri} \right) \right.$$

$$\left. \left[\frac{1}{2} - 2 \left(1 + k u \frac{d}{Ri} \right) + \frac{3}{2} \left(1 + k u \frac{d}{Ri} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{2.1}{k u \frac{d}{Ri}} \right) - 0.7 k^2 u \left(\frac{d}{Ri} \right)^2 \right\}$$

Caso B (26)
U.S.D.

$$(1-k_2) u_B = \frac{2.8}{k u^2 \left(\frac{d}{Re} \right)^3 A u B} \left\{ - \left(1 - k u \frac{d}{Re} \right)^2 \left(1 - \frac{2.1}{k u \frac{d}{Re}} \right) \ln \left(1 - k u \frac{d}{Re} \right) + \right.$$

$$\left. \left[\frac{1}{2} - 2 \left(1 - k u \frac{d}{Re} \right) + \frac{3}{2} \left(1 - k u \frac{d}{Re} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{2.1}{k u \frac{d}{Re}} \right) + 0.7 k^2 u \left(\frac{d}{Re} \right)^2 \right\}$$



Las ecuaciones (7) a (16) y (17) y (18) son completamente generales, y cubren los casos de vigas curvas y rectangulares. Haciendo Ri, Re, tender a ∞ en estas expresiones, obtenemos los correspondientes valores de vigas rectas.

Para facilitar las comparaciones hemos elaborado un juego de tablas (I), en una computadora Burroughs 3500, con la notación de Dawoud et al. (1):

$$k, ku = \lambda \quad (27)$$

$$\frac{d}{Ri} = \gamma \quad (28)$$

$$\frac{d}{Re} = \frac{d}{Ri + d} = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \quad (29)$$

Estas tablas nos permiten calcular A (k) y k2, conociendo λ y γ , e incluyen los valores de A (k) y k2 para la viga recta con sección rectangular (El caso $\gamma = 0$).

La ecuación (2) nos permite estimar, por medio del método de ensayo y error, los valores de k, ku, y A (k). Reemplazando en ella, los valores de fs, f's, dados por las (9), (10), (11), (12) se obtiene:

Caso A (30)

$$1 + \frac{\rho'}{\rho} \frac{d'}{d} \left(\frac{1 + \frac{d}{Ri}}{1 + \frac{d'}{Ri}} \right)$$

$$k, ku = \frac{f's' c A (k)}{Es \epsilon cu} + \frac{\rho'}{\rho} \left(\frac{1 + \frac{d}{Ri}}{1 + \frac{d'}{Ri}} \right)$$

Caso B (31)

$$1 + \frac{\rho'}{\rho} \frac{d'}{d} \left(\frac{1 - \frac{d}{Re}}{1 - \frac{d'}{Re}} \right)$$

$$k, ku = \frac{f's' c A (k)}{Es \epsilon cu} + \frac{\rho'}{\rho} \left(\frac{1 - \frac{d}{Re}}{1 - \frac{d'}{Re}} \right)$$

(I) Tablas 1 al 16, de las cuales, por brevedad, presentamos aquí únicamente las 9 a 12, correspondientes al caso A, U.S.D., ya que son las más útiles.

Si R_i , R_e , tienden a ∞ , en estas dos ecuaciones, tendremos los valores de k , ku , para una viga recta:

$$k, ku = \frac{1 + \frac{\rho' d'}{\rho d}}{1 + \frac{\rho'}{\rho} + \frac{f'cA(k)}{Es \epsilon_{cu}}} \quad (32)$$

El "modus operandi" sería: se ensaya un valor de k (o ku), y por medio de las tablas se encuentra $A(k)$. Este valor, reemplazado en las (30), (31) o (32) debería reproducir el valor de k (o ku) supuesto. Si no es así, se usa el último valor encontrado, hasta que se determine el verdadero k , (o ku).

En el método U. S. D. hay una condición adicional que debe tomarse en cuenta: ku debe ser menor que kub , dado por las condiciones de balanceo. Esto previene la falla frágil.

Sabemos que en estas condiciones $\epsilon_c = \epsilon_{cu} = 0,003$, cuando $fs = fsu$ (véase la Fig. (4)). Haciendo $fs = fsu$ en las ecuaciones (9) y (10), podemos obtener kub para los dos casos A y B:

$$kub = \frac{1}{1 + \frac{fsu}{Es \epsilon_{cu}} \left(1 + \frac{d}{R_i}\right)} \quad \text{Caso A} \quad (33)$$

$$kub = \frac{1}{1 + \frac{fsu}{Es \epsilon_{cu}} \left(1 - \frac{d}{R_e}\right)} \quad \text{Caso B} \quad (34)$$

kub , para una viga recta con sección rectangular, se obtiene haciendo tender a ∞ , a R_i , R_e , en estas dos ecuaciones; se obtiene:

$$kub = \frac{1}{1 + \frac{fsu}{Es \epsilon_{cu}}} \quad (35)$$

Volvamos ahora, a la Fig. (6) en donde representamos la curva tensión-deformación en el hormigón, por medio de la relación dada por el C. E. B. Esta curva es utilizada para representar el fenómeno de compresión uniaxial, y en el caso A (un momento cerrando el ángulo), debemos esperar un estado complejo de tensiones, que en su forma más simple sería biaxial. Pero debido a las restricciones impuestas, por los estribos a la deformación lateral (dirección perpendicular al plano del codo), el estado de tensiones tiende realmente a ser triaxial. Con la falta de una teoría triaxial de rotura, confiable, para diferentes tensiones $\sigma_1 \neq \sigma_2$,

$\neq \sigma_3$, se presenta una gran dificultad. En ausencia de datos confiables utilizaremos la curva de Richart-Brandzaeg:

$$fct = f'c + 4,1 \sigma_2 \quad (36)$$

de la cual fct se usará en lugar de $f'c$ en las ecuaciones (2) a (32), y que se medirá en la dirección mostrada en la Fig. (7), donde σ_2 (medida hacia el centro o), puede aproximarse por medio de la expresión

$$\left| \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right| = \frac{fsAs \sqrt{2}}{2b(d_1 - r)} \quad (37)$$

en donde r es el radio de doblez del refuerzo principal de tracción, y d_1 es la distancia del ángulo interno al refuerzo de tracción. La curva de Richart-Brandzaeg fue deducida para un estado cilíndrico triaxial (carga triaxial con dos tensiones principales iguales: $\sigma_2 = \sigma_3 \neq fct$). Luego, su utilización aquí es dudosa ya que la tensión transversal σ_3 es una función de la resistencia de los estribos y del coeficiente de Poisson, y no igual a σ_2 , pero, basados en lo que escribió Newman (5): "La resistencia en compresión biaxial es relativamente baja, porque, como σ_3 es cero la deformación límite de tracción ϵ_3 se sobrepasa rápidamente. Aún pequeñas compresiones en la dirección de σ_3 , causarían un incremento importante de resistencia a la rotura", hemos supuesto que si se asume que $\sigma_2 = \sigma_3$ no causará un grave error. Y aún más: el reemplazo de fct , en lugar de $f'c$, implica que la curva C. E. B. tensión-deformación, se mantiene para estados complejos de tensiones. Veremos que esta afirmación se confirma indirectamente por los experimentos.

El radio r , en la ecuación (37), deberá calcularse en tal forma que no cause hendimiento en el hormigón (6), en planos normales a σ_3 , es decir, en el plano de la Fig. (7).

Nótese que σ_2 aumenta si la diferencia $(d_1 - r)$ decrece; por consiguiente, hay interés en un valor grande de r que disminuya el peligro de hendimiento y aumente el valor de fct . Este incremento, sin embargo, debe ser limitado, ya que si $d_1 - r = 0$, $\Rightarrow fct = \infty$, lo cual no es posible; es decir la concentración puntual de tensiones, en el codo, debe excluirse.

En el caso B, (un momento abriendo el ángulo), el fenómeno es completamente diferente. La teoría anterior no satisface el comportamiento a la ruptura, porque ésta se precipita por una falla de hendimiento, normal a la diagonal del codo, estando éste aún en rango elástico, o hacia el final de este estado. Entonces para confrontar los experimentos hemos desarrollado otro punto de vista: considerando la Fig. (8), y suponiendo la flexión pura, el equilibrio estático de la sección está dado por

$$C + f'sA's = fsAs \quad (38)$$

y también podemos suponer que el elemento ABCD está sometido a los esfuerzos mostrados en la Fig. (9) y que tiende a hendirse por la línea $n-n$, bajo una tensión dada por:

$$f_t = \frac{Asfs\sqrt{2}}{bd\sqrt{2}} = \frac{Asfs}{bd} \quad (39)$$

El valor de f_t (tensión de hendimiento) lo hemos tomado, de acuerdo con Kemp et al. (7), para un cuadrado:

$$f_t = \frac{1,36}{1,11} f_{tc} \quad (40)$$

siendo f_{tc} la tensión de hendimiento para un cilindro

$$f_{tc} = 1,59 \sqrt{f'_c} \quad (41)$$

de donde, la (40) queda

$$f_t = 1,95 \sqrt{f'_c} \quad (42)$$

De la falla de dos codos (viga 21 Tabla 17), abriendo el ángulo, con extensómetros eléctricos en la línea BC, hemos concluido que el diagrama de tensiones es casi lineal, aunque creemos que se necesitan más experiencias para confirmar este comportamiento. Así, utilizando el criterio de los experimentos, hemos derivado las siguientes expresiones, para controlar el fenómeno, con buenos resultados: (Véase Fig. (10))

De la ec (39):

$$\epsilon_s = \frac{bdft}{EsAs} = \frac{f_t}{Es\rho} \quad (43)$$

$$\epsilon_c = \frac{cft}{(d-c)Es\rho} \quad (44)$$

$$k = -\frac{\rho t}{2m\rho} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\rho t}{m\rho}\right)^2 + 4\frac{n}{m}} \quad (45)$$

donde

$$m = \frac{Ec}{2Es\rho} \quad (46)$$

$$n = 1 + \frac{\rho'}{\rho} \frac{d'}{d} \quad (47)$$

$$\rho t = \rho' + \rho \quad (48)$$

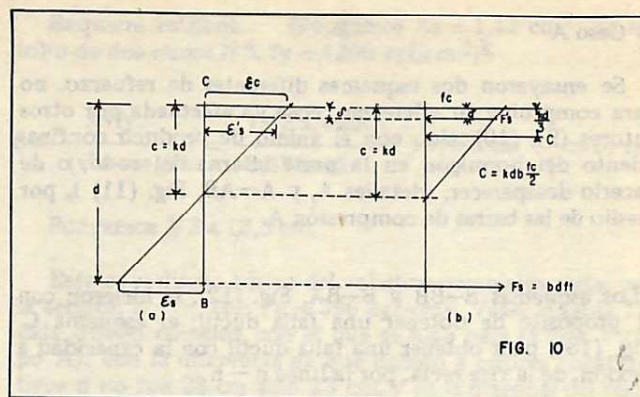


FIG. 10

donde E_c es el Módulo de Elasticidad del hormigón. Tomaremos el valor dado por el A. C. I. (8) como una buena aproximación de E_c .

Como en este caso el hormigón controla la ruptura, tomaremos como expresión del momento último, y de las tensiones f_c , f_s y f'_s , las siguientes ecuaciones:

$$Muc = \frac{bd^2}{d} \frac{k^2}{1-k} \frac{Ec}{Es} \frac{1,95 \sqrt{f'_c}}{\rho} \left(1 - \frac{k}{3}\right) + A'sf'sd \left(1 - \frac{d'}{d}\right) \quad (49)$$

$$f_c = \frac{k}{1-k} \frac{Ec}{Es} \frac{1,95 \sqrt{f'_c}}{\rho} \quad (50)$$

$$f_s = \frac{1,95 \sqrt{f'_c}}{\rho} \quad (51)$$

$$f'_s = \frac{k - \frac{d'}{d}}{1-k} \frac{1,95 \sqrt{f'_c}}{\rho} \quad (52)$$

Veremos algunas aplicaciones de estos dos casos en la Parte 2 de este estudio.

PARTE II

LOS EXPERIMENTOS

Se hicieron 42 codos, con sección rectangular, tanto en la viga como en la columna ($b = 15 \text{ cm}$ $h = 30 \text{ cm}$). Cuarenta se rompieron cerrando el ángulo recto y dos abriéndolo. Vamos a revisar, primero, el caso A (cerrando el ángulo) y luego veremos el caso B (abriéndolo).

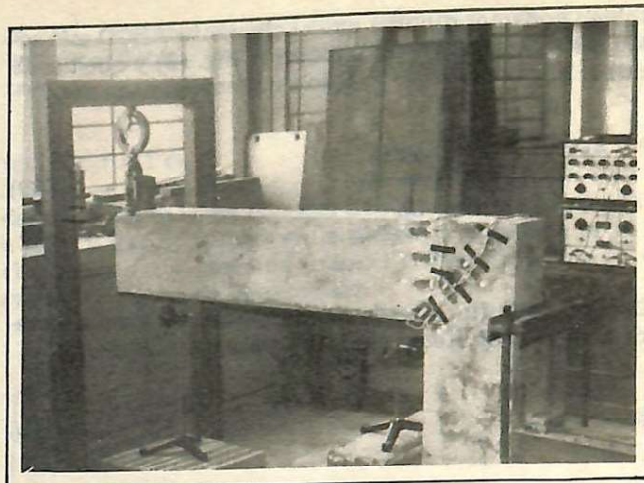
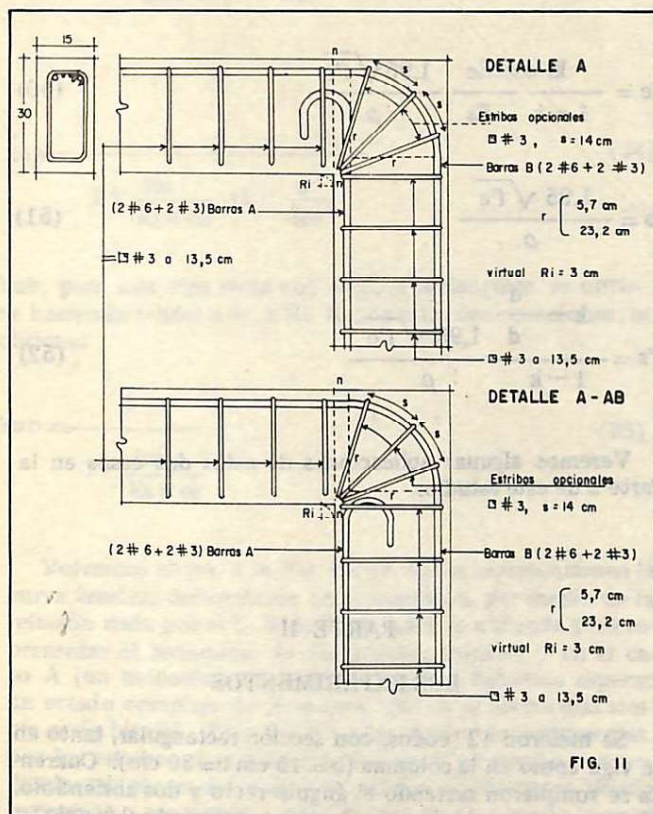
1) Caso A

Se ensayaron dos esquemas diferentes de refuerzo, no para comprobar su eficiencia, cosa ya efectuada por otros autores (9), (10), sino con el ánimo de producir confinamiento del hormigón en la parte interna del codo, o de hacerlo desaparecer, (detalles A, y A-AB, Fig. (11)), por medio de las barras de compresión A.

Los esquemas B-BB y B-BA, Fig. (12), se hicieron con el propósito de obtener una falla dúctil; el esquema C. Fig. (13), para obtener una falla dúctil con la capacidad a flexión, de la viga recta, por la línea n - n.

En todos los ensayos se consideró el ángulo recto como una pieza curva con radio interior pequeño ($R_i = 3$ cm). En los codos XIX, XX, y XXI, el radio $R_i = 3$ cm se construyó realmente en la formaleta. (Véase la tabla 17).

En la práctica del hormigón armado, es corriente doblar el refuerzo de tracción, calculado según la teoría de la viga recta, por la línea n - n, Fig. (11), y anclarlo en la columna. Veremos, según la teoría de la Parte I, que aunque este diseño se hiciese por el método U. S. D., y la pieza fuese sobreforzada en la sección n - n, este acero hace al codo sobreforzado y consecuentemente su rotura es frágil, fallando por la diagonal del codo. Fotos 5, 6, 7, 8.



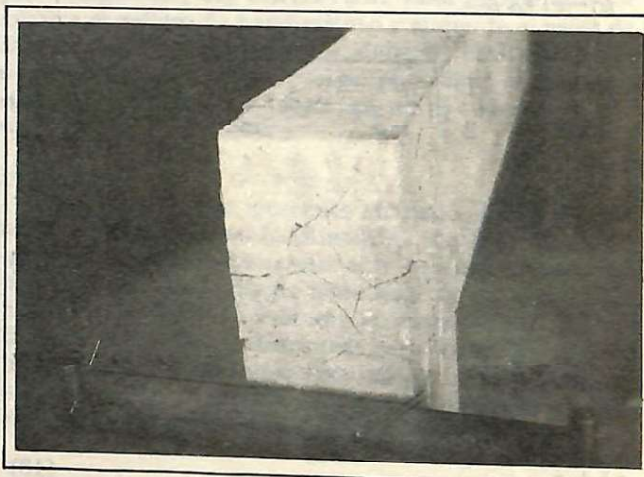
Vista general

FOTO 1



Detalle de refuerzo A-AB

FOTO 2



Ensayo I Esquina 2

FOTO 3

JUNIO/83

Hemos clasificado los tipos de rotura en la columna 9, tabla 17: D = tipo diagonal; V = tipo viga; M = falla dúctil; C = tipo de compresión; véase los esquemas de falla, Fig. (14).

Luego, hemos ensayado los detalles B - BB, y B - BA, con el ánimo de producir fallas dúctiles, de tipo M, y el detalle C para tratar de producir falla dúctil a través del codo, con la misma capacidad de flexión que la viga recta, calculado por la línea n - n.

Investiguemos, enseguida, por medio del U. S. D., siguiendo el A. C. I. 318-71, el momento último de la viga recta en voladizo, por la sección n - n, con los siguientes datos:

b = 15 cm; h = 30 cm; d = 28 cm; f'c = 396 kgf/cm²; fy = 4200 kgf/cm²; As = 7,11 cm² (2 # 6 + 2 # 3).

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{7,11}{15 \times 28} = 0,0169 < \rho_{\max}$$

$$= 0,75 \rho b = 0,0272$$

$$w = \frac{\rho f_y}{f'_c} = \frac{0,0169 \times 4200}{396} = 0,179$$

$$\therefore \frac{M'u}{f'_c b d^2} = w (1 - 0,59 w) = 0,160$$

$$\therefore M'u = 0,160 \times 396 \times 15 \times 28^2 =$$

$$745440 \text{ kgf} - \text{cm} = 7,454 \text{ ton} - \text{m}$$

Si la viga va a ser fallada por una carga concentrada con un brazo de 1,29 m esto nos da una carga de rotura de (descontando el peso propio)

$$P = \frac{7,454 - 0,15 \times 0,30 \times 2,4 \times 1,25 \times 0,625}{1,29} = 5,713 \text{ ton.}$$

considerando que $0,15 \times 0,30 \times 2,4 \times 1,25 \times 0,625 = 0,0844$ es el momento del peso propio del voladizo. Revisemos la cizalladura:

$$V'u = 5,713 + 0,135 = 5,848 \text{ ton.}$$

$$v'u = \frac{5848}{15 \times 28} = 13,92 \text{ kgf/cm}^2 > 0,53 \sqrt{396}$$

$$= 10,55 \text{ kgf/cm}^2$$

Requiere estribos. (Pongamos $A_s = 1,42 \text{ cm}^2$; un estribo de dos ramas # 3, $f_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$)^k

$$S = \frac{A_v f_y}{(v'u - v_c) b} = \frac{1,42 \times 4200}{3,37 \times 15} = 117,98 \text{ cm} \frac{d}{2} = 14 \text{ cm.}$$

Pongamos # 3 a 13,5 cm.

Este es el diseño básico del voladizo como viga recta, por la sección n - n, con $f'_c = 396 \text{ kgf/cm}^2$. Véase la tabla 17. Este diseño coincide con el que se hizo para la viga V (tipo A), con la diferencia de que debido a errores constructivos d no fué 28 cm sino 23 cm, y en la diagonal del codo $d_1 = 29 \text{ cm}$. Vamos a repetir el diseño con estos valores, primero como una viga recta por la sección n - n y luego como viga curva por la teoría de la Parte I.

1) Diseño por U. S. D., A. C. I. 318 - 71 como viga recta: Datos: b = 15 cm; h = 30 cm; d = 23 cm; f'c = 396 kgf/cm²; fy = 4200 kgf/cm²; As = 7,11 cm² (2 # 6 + 2 # 3), $\Rightarrow \beta = 0,77$

$$\rho = \frac{7,11}{15 \times 23} = 0,0206 < \rho_{\max} = 0,75 \times 0,85 \times 0,77 \times$$

$$\frac{396}{4200} \times \frac{0,003}{0,003 + 0,0021} = 0,0272$$

\Rightarrow controla el acero

$$a = \frac{A_s f_y}{0,85 f'_c b} = \frac{7,11 \times 4200}{0,85 \times 396 \times 15} = 5,914 \text{ cm}$$

$$c = \frac{a}{0,77} = 7,681 \text{ cm}$$

Revisemos fs :

$$f_s = 0,003 \frac{d - c}{c} \times 2,0 \times 10^6 = 6000 \times \frac{23 - 7,681}{7,681} = 11968 \text{ kgf/cm}^2$$

$\Rightarrow f_s = f_y = 4200 \text{ kgf/cm}^2$ (controla acero)

$$M'us = 7,11 \times 4200 \left(23 - \frac{5,914}{2} \right) = 598524 \text{ kgf} - \text{cm} =$$

$$5,985 \text{ ton} - \text{m}$$

$$\therefore P = \frac{5,985 - 0,0844}{1,29} = 4,574 \text{ ton} - \text{m}$$

2) Diseño por U. S. D., como viga curva: Datos: $b = 15$ cm; $d = 30$ cm; $f'_c = 396$ kgf/cm²; $f_y = 4200$ kgf/cm²; $A_s = 7,11$ cm²; $A'_s = 7,11 \sqrt{2} = 10,06$ cm²; $r = 5,7$ cm; $d' = 5,7$ cm; $\epsilon_{cu} = 0,003$; $E_s = 2,0 \times 10^6$ kgf/cm².

Hemos tomado como A'_s , la componente en la dirección normal a la diagonal al codo, del área del acero de compresión de la columna.

$$\rho = \frac{7,11}{15 \times 30} = 0,0158; \rho' = 0,0223; \frac{d'}{d} = \frac{5,7}{30}$$

$$= 0,19; \gamma = \frac{d}{R_i} = \frac{30}{3} = 10$$

$$\gamma' = \frac{d'}{R_i} = \frac{5,7}{3} = 1,90; \frac{\rho'}{\rho} = 1,4142; \frac{1+\gamma}{1+\gamma'}$$

$$= \frac{11}{290} = 3,7931$$

Supongamos $f_s = 2485$ kgf/cm², luego de la ecuación (37) y si $d = d_1$

$$\sigma_2 = \frac{f_s A_s \sqrt{2}}{2b(d_1 - r)} = \frac{2485 \times 10,06}{30 \times 24,3} = 34,29 \text{ kgf/cm}^2$$

la que reemplazada en la (36), nos da:

$$f_{ct} = f'_c + 4,1 \sigma_2 = 396 + 4,1 \times 34,29 = 536,60 \text{ kgf/cm}^2$$

Poniendo, ahora, la ecuación (30) en esta forma

$$k_u = \frac{1 + \frac{\rho'}{\rho} \frac{d'}{d} \left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma'} \right)}{1 + (1+\gamma) \frac{f_{ct} A(k_u)}{E_s \epsilon_{cu}} + \frac{\rho'}{\rho} \left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma'} \right)} \quad (30)$$

$$= \frac{2,0192}{6,3642 + 62,2637 A(k_u)}$$

Si

$$k_u = 0,10 \Rightarrow * A(k_u) = 0,064 \Rightarrow k_u =$$

0,1951 de la ecuación (30)

$$k_u = 0,15 \Rightarrow * A(k_u) = 0,089 \Rightarrow k_u =$$

0,1696 de la ecuación (30)

$$k_u = 0,16 \Rightarrow * A(k_u) = 0,094 \Rightarrow k_u =$$

0,1653 de la ecuación (30)

* De la tabla 9, para $\gamma = 10$, $\lambda = k_u = 0,10$

Tomamos $k_u = 0,160$. De las ecuaciones (9) y (11) tenemos

$$f_s = \frac{E_s \epsilon_{cu} (1 - k_u)}{k_u (1 + \gamma)} = \frac{6000 \times 0,84}{0,16 \times 11} = 2863 \text{ kgf/cm}^2$$

$$f'_s = \frac{E_s \epsilon_{cu} (k_u - \frac{d'}{d})}{k_u (1 + \gamma')} = \frac{6000 \times (-0,03)}{0,16 \times 2,90} = 388 \text{ kgf/cm}^2$$

Como f_s no da igual al supuesto, tomaremos 2863 kgf/cm² para recalculer f_{ct} , obteniendo

$$f_{ct} \approx 560 \text{ kgf/cm}^2$$

Como $f_s < 4200$ el hormigón controla y de la ecuación (3) obtenemos:

$$M'_{uc} = f_{ct} A(k_u) b d^2 (1 - k_u k_2) + f'_s A'_s d (1 - \frac{d'}{d}) \quad (3)$$

donde $k_2 = 0,344$ se tomó de la tabla 11, por interpolación lineal. Se tiene entonces:

$$M'_{uc} = 560 \times 0,094 \times 15 \times 900 (1 - 0,344 \times 0,16)$$

$$- 388 \times 0,0223 \times 15 \times 900 (1 - 0,19) = 576912 \text{ kgf} - \text{cm}$$

$$= 5,769 \text{ ton} - \text{m}$$

$$\therefore P = \frac{5,769 - 0,084}{1,44} = 3,948 \text{ ton}$$

$$P_{\text{real}} = 4,000 \text{ ton}$$

Obsérvese que la sección n-n es subreforzada, (cálculo anterior de la viga recta), y que el codo está sobreforzado. El codo falló por la diagonal, tal como debe ser. (Véase la Fig. (14), viga V).

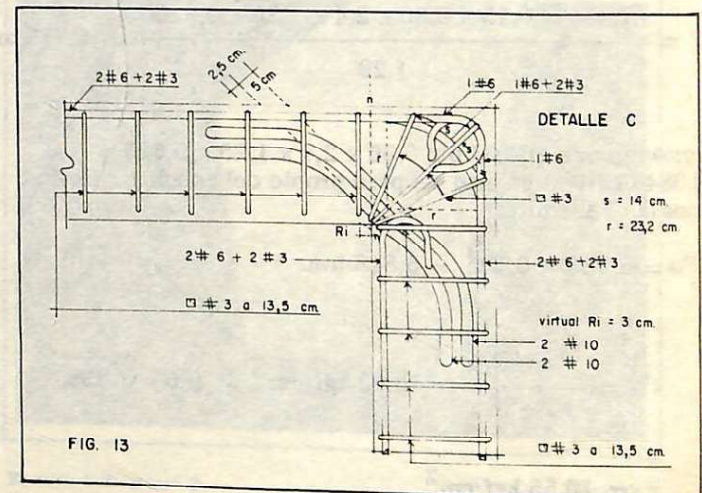


FIG. 13

3) Aquí repetimos el cálculo de la viga recta, efectuado en el primer punto, pero por medio de las tablas, suponiendo $\gamma = 0$. El procedimiento es el mismo anterior, y por no alargarnos no lo incluiremos. El resultado fue el siguiente:

$$f_s = 6766 \text{ kgf/cm}^2 > 4200 \text{ kgf/cm}^2$$

\Rightarrow controla el acero $\Rightarrow f_s = f_y$. Luego el momento último es el Mus: ecuación (4), con $\rho' = 0$ y $k_u = 0,47$, $k_2 = 0,407$

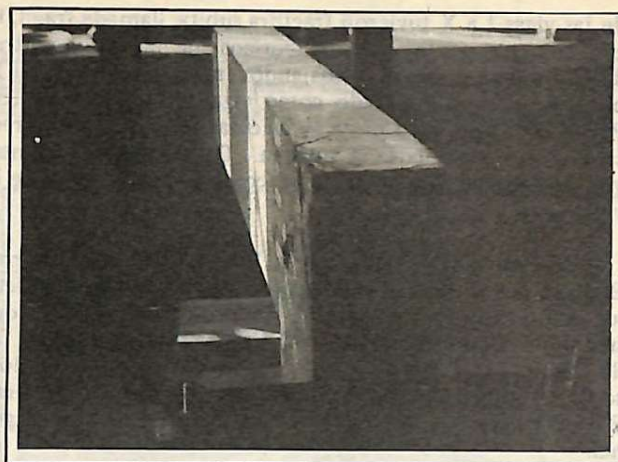
$$M_{us} = A_s f_y d (1 - k_u k_2)$$

$$= 4200 \times 7,11 \times 23 (1 - 0,47 \times 0,407) = 555443 \text{ kgf} - \text{cm}$$

$$= 5,554 \text{ ton} - \text{m}$$

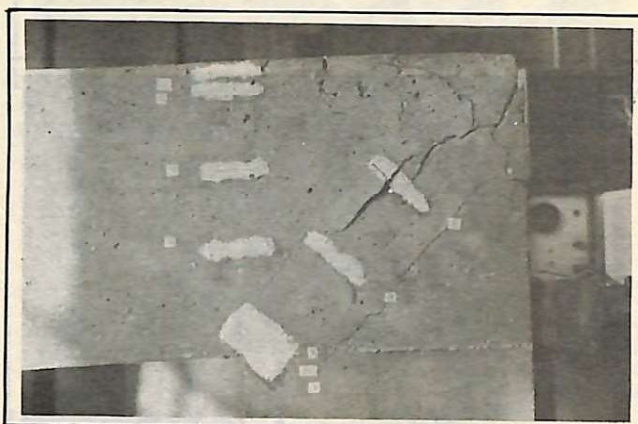
$$P = \frac{5,554 - 0,084}{1,29} = 4,241 \text{ ton}$$

Estos son los valores que se dan en la tabla 17 para el primer codo del ensayo V. Los ensayos I a XX se calcularon en forma similar, y se compararon con los resultados experimentales dados en la columna 4 de la tabla 17, donde se dan las cargas de rotura. Estos resultados se comparan con los teóricos calculados así: a) como viga curva con f'_c real, columna (9); b) como viga recta, fallada por la línea $n - n$, Fig. (11), columna (10), con f'_c real; c) como viga curva ($R_i = 3 \text{ cm}$), con $f'_c = f_{ct}$ dado por la ecuación (36),



Ensayo I Esquina 1A

FOTO 4



Ensayo I Esquina 2-B

FOTO 5

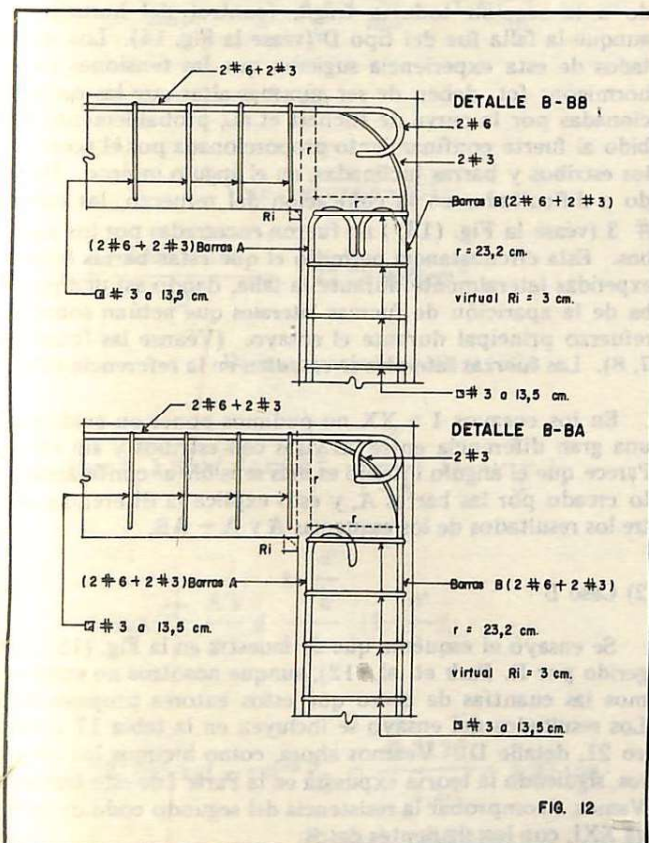


FIG. 12

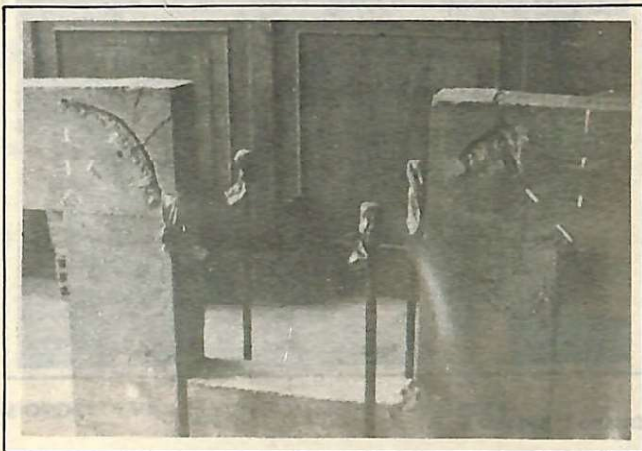
Parte I, columna (11); d) como viga curva con $f'_c = f_c$ biaxial calculada siguiendo las curvas dadas en las referencias (5), (11), para los ensayos XIV a XVI.

Debe notarse, para el detalle A, la concordancia de los resultados entre las columnas (4) y (11), para los ensayos del I al X, y aún para los ensayos III, IV, VIII, donde un codo de cada una, falló como tipo V. Pensamos que, esto último, se debió al pequeño radio de doblez ($r = 5,7 \text{ cm}$) del refuerzo, lo cual hace muy cercanas las cargas de ruptura de la viga recta y de la viga curva, con excepción claro está, del ensayo VII que se hizo con $r = 23,2 \text{ cm}$. Nótese, además, que la carga de rotura es menor que la carga teórica calculada según la teoría de la viga recta, por la sección $n - n$, con excepción de los segundos codos en los ensayos VIII y X. En efecto, de acuerdo con la referencia (6), el radio de doblez debe ser calculado especialmente para barras de grandes diámetros y depende del valor de estos diámetros, con el objeto de evitar ruptura por hendimiento causada por las fuerzas laterales que tienden a expeler las caras laterales del codo, produciendo un embombamiento. Véanse las fotos 3, 8 que muestran fisuras verticales en el dorso de la viga, como una evidencia de las fuerzas laterales, aunque el diámetro de las barras no era muy grande. De modo que el pequeño radio de doblez de estas barras pudo contribuir a producir una falla temprana cercana al valor correspondiente a la teórica de la viga recta. Todas las fallas

de las vigas I a X tuvieron fractura súbita, llamada frágil, lo cual coincide con los cálculos teóricos que muestran control del hormigón y acero trabajando en rango elástico, si la pieza se hubiera calculado como viga curva con $f'_c = f_{ct}$. Por el contrario, si la pieza se calculara como una viga recta, el acero controlaría la ruptura. De modo que los ensayos de falla confirman las predicciones de la teoría de la viga curva.

Los esquemas B—BB (barras B bajas) y B—BA (barras B altas), por el contrario, fallaron en forma dúctil; los cálculos como vigas curvas, con $r = 23,2$ cm, mostraron el control de la ruptura por el acero. Véanse los esquemas de falla, Fig. (14). Fueron netos, sin fisuras verticales en el dorso, y sin embombamiento de las caras laterales. El esquema B—BA hace que las fisuras suban acercándose a la diagonal.

El esquema A—AB (barra A baja), se calculó con $\rho' = 0$ (sin acero de compresión), y dió resultados más disper-



ensayo XVIII

FOTO 6

Ensayo XVIII Esquina 1



FOTO 8

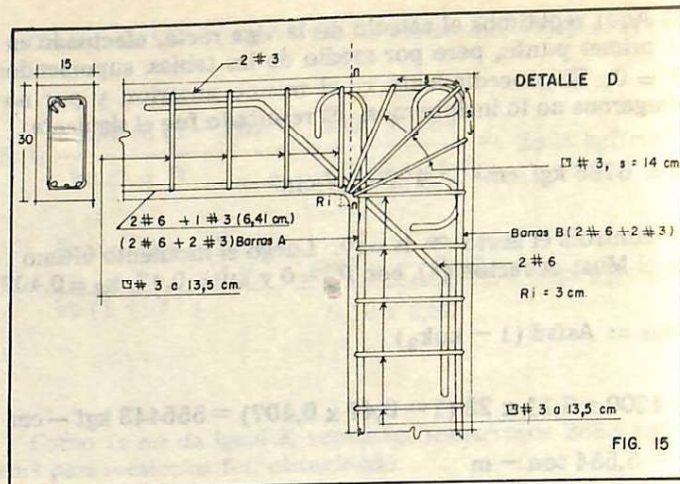


FIG. 15

sos, aunque todos los codos, excepto el primero de la viga XVIII, fallaron como vigas curvas por la diagonal (tipo de falla D).

En un esfuerzo para mejorar la ductilidad del codo hemos ensayado el detalle C. La teoría, en la Parte I, sugiere la posibilidad de hacer un codo, con rotura dúctil, que tenga la misma capacidad a flexión que la sección n—n, Fig. (13), calculada ésta como viga recta, agregando acero de compresión. El diseño del esquema C no dió buenos resultados, porque es muy difícil colocar acero de compresión con el $d' = 3$ cm y no fue posible colocar 4 # 10 con sus centroides a 3 cm del codo interno. Durante la construcción $d' = 5$ cm lo cual hizo que el acero de compresión no estuviese en compresión sino en tracción, haciendo a la sección todavía frágil, (control del hormigón), aunque la falla fue del tipo D (véase la Fig. 14). Los resultados de esta experiencia sugieren que las tensiones en el hormigón: f_{ct} , deben de ser aún más altas que las proporcionadas por la curva de Richart et al., probablemente debido al fuerte confinamiento proporcionada por el acero de los estribos y barras inclinadas, en el ángulo interno. Debido a dificultades en la colocación del refuerzo, las barras # 3 (véase la Fig. (13)) no fueron encerradas por los estribos. Esta circunstancia permitió el que estas barras fuesen expelidas lateralmente durante la falla, dando así una prueba de la aparición de fuerzas laterales que actúan sobre el refuerzo principal durante el ensayo. (Véanse las fotos 6, 7, 8). Las fuerzas laterales se estudian en la referencia (6).

En los ensayos I a XX no pudimos poner en evidencia una gran diferencia entre las vigas con estribos y sin ellos. Parece que el ángulo interno es más sensible al confinamiento creado por las barras A, y esto explica la diferencia entre los resultados de los esquemas A y A—AB.

2) Caso B

Se ensayó el esquema que se muestra en la Fig. (15), sugerido por R. Park et. al. (12), aunque nosotros no empleamos las cuantías de acero que estos autores propusieron. Los resultados del ensayo se incluyen en la tabla 17 (ensayo 21, detalle D). Veamos ahora, como hicimos los cálculos, siguiendo la teoría expuesta en la Parte I de este trabajo. Vamos a comprobar la resistencia del segundo codo de la viga XXI, con los siguientes datos:

$$A_s = 6,41 \text{ cm}^2 + 5,70 \sqrt{2} = 14,47 \text{ cm}^2; A's = 1,42 \text{ cm}^2; \\ d = 25 \text{ cm}; d' = 3 \text{ cm}; f'c = 234 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\rho = \frac{14,47}{15 \times 25} = 0,0386; \rho' = \frac{1,42}{15 \times 25} = 0,0038; \frac{d'}{d}$$

$$= \frac{3}{25} = 0,1200$$

$$\rho t = \rho + \rho' = 0,0424; n = 1 + \frac{\rho' d'}{\rho d} = 1,0118$$

$$m = \frac{E_c}{2E_s \rho} = \frac{15100 \sqrt{234}}{2 \times 2 \times 10^6 \times 0,0386} = 1,4960; \frac{n}{m} =$$

$$\frac{1,0118}{1,4960} = 0,6763$$

$$\frac{\rho t}{m \rho} = \frac{0,0424}{1,4960 \times 0,0386} = 0,7343$$

De la ecuación (45) obtenemos

$$k = - \frac{\rho t}{2m \rho} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\rho t}{m \rho}\right)^2 + 4 \frac{n}{m}}$$

$$= 0,5335 \Rightarrow c = 13,34 \text{ cm}$$

Y de la ecuación (51):

$$f_s = \frac{1,95 \sqrt{f'c}}{\rho} = 772,78 \text{ kgf/cm}^2$$

De las ecuaciones (49) y (52):

$$Muc = 1,95 \sqrt{f'c} m b d^2 \frac{k^2}{1-k} \left(1 - \frac{k}{3}\right)$$

$$+ 1,95 \sqrt{f'c} \frac{A's}{\rho} d \frac{k - \frac{d'}{d}}{1-k} \left(1 - \frac{d'}{d}\right)$$

$$= 231255 \text{ kgf} - \text{cm} \Rightarrow P_2 = \frac{2,3126}{1,20} = 1,93 \text{ ton}$$

$$P_2 \text{ real} = 2,20 \text{ ton}$$

Ciertamente, pensamos, es una buena aproximación. Naturalmente, también creemos que es necesario hacer más experimentos sobre la materia, especialmente para confirmar la fórmula (39) y el valor de f_t dado por la ecuación (40).



Ensayo XVIII Esquina 2

FOTO 7

CONCLUSIONES

Pensamos que se pueden sacar algunas conclusiones de esta investigación:

1) Para el caso A (un momento que cierra el ángulo)

1) La sección crítica que debe diseñarse, es la sección a través de la diagonal del codo y no la sección de la viga a través de la cara de la columna, línea $n-n$, Fig. (11).

2) La práctica corriente en diseño: diseño de la sección $n-n$, Fig. (11), como viga recta subreforzada, y anclaje subsiguiente del refuerzo principal en la columna, doblando el refuerzo alrededor del codo, produce una sección diagonal sobrerreforzada con falla frágil.

3) La sección diagonal puede diseñarse como una viga curva con un radio interior finito, pequeño ($R_i = 3 \text{ cm}$ puede ser un buen valor para el caso A).

4) Parece que las tensiones en el hormigón son gobernadas por un estado triaxial creado por el anclaje de las barras de compresión de la columna y por los estribos (barras A, Fig. (11), (12), (13), (15)). La curva de Richart Brandzaeg nos da una buena aproximación para el diseño al través de la diagonal. En ausencia de las barras A, al través del codo, un estado biaxial de tensiones puede eventualmente representar bien el fenómeno. Es indispensable ampliar la investigación en este aspecto.

- 5) La tensión radial en el codo, σ_2 (Fig. (7)) parece ser muy bien representada por medio de la fórmula (37) (Fig. (7)), la cual depende del radio de doblez del refuerzo principal, r . Esto indica que el radio r debe ser tomado en cuenta en el diseño.
- 6) Las experiencias confirman la aparición de fuerzas internas laterales, causadas por el doblez del refuerzo principal, que producen un embombamiento de las caras del codo y fisuras verticales en el dorso de los especímenes, confirmando a la referencia (6).
- 7) La teoría sugiere la posibilidad de hacer dúctil a la sección diagonal utilizando refuerzo de compresión. El esquema C podría dar buenos resultados.

II) Para el caso B (un momento que abre el ángulo).

- 1) La falla de este tipo de estructura es gobernada por la resistencia del hormigón al hendimiento, y se produce, tal como se muestra en los esquemas del ensayo XXI C 1-A, Fig. (14).
- 2) El diseño de la pieza puede efectuarse por medio del cálculo de la sección $n-n$, Fig. (15), como una viga recta en rango elástico, pero limitando las tensiones en el hormigón y en el acero por medio de las fórmulas (50) a (52).

RECONOCIMIENTO

Esta investigación ha sido auspiciada por el "Fondo Colombiano de Investigaciones Científicas y Proyectos Especiales Francisco José de Caldas" (COLCIENCIAS), y por la Facultad Nacional de Minas, Medellín - Colombia, donde se efectuaron los experimentos.

El autor agradece al profesor Carlos González quien trabajó en las medidas extensométricas, al profesor Jesús Humberto Arango quien colaboró en los experimentos y a los profesores Juan M. Vila y Luis F. Ochoa quienes colaboraron en la programación de computador.

REFERENCIAS

- 1) "Flexural Stresses in rectangular reinforced concrete curved members" Dawoud R. H. et. al. Jnl. Am. Concr. Inst. 1970, 67 (march).
- 2) "Nomographic Solutions of Reinforced Concrete beams curved in elevation: subject to pure bending:: K. T. Krishnaswamy, A. B. Kulkarni, S. V. Gharpure "The Institution of Civil Engineers" England Proceedings june 1971.
- 3) "Etude des tensions régnant dans les angles des portiques en béton armé"; por A. Paduart; Bulletin de la Soc. Royal Belges des Ing. et. Ind. No. 3, 1940.
- 4) "A Review of Stress - Strain Relationship for Concrete" S. Popovics Jnl. Am. Concr. Inst. 1970, 67 (march).
- 5) "Criteria for the behaviour of plain concrete under complex states of stress" Kenneth Newman. The Structure of Concrete, Proc. Cement and Concr. Assoc. London, September 1965.
- 6) "About the radius of bending that must be given to concrete members principal reinforcement at maximum tension stress points" Gabriel García. Dyna, Revista de la Facultad Nal. de Minas No. 90. Mayo - 1975, Medellín Colombia.
- 7) "Inelastic Behaviour of Concrete Kneejoints" E. L. Kemp and P. R. Murkherjes "The Consulting Engineer" October 1968.
- 8) "Building Code Requirements for Reinforced Concrete" A. C. I. 318 - 71 American Concrete Institute.
- 9) "Concrete Joint Details in Structural Lightweight Concrete" B. Mayfield et. al. Int. Am. Concr. Inst. 1971 68 - 37 (May).
- 10) "The Flexural strength of reinforced concrete frame cornes" R. A. Swann. Cement and Concrete Association. London, October 1970.
- 11) "Stress - Strain Response and Fracture of a Concrete Model in Biaxial Loading". O. Boyukogurturk, A. H. Nilson, F. D. Slate. Int. Am Concr. Inst. 1971 68 - 52 (August).
- 12) "Reinforced Concrete Structures" R. Park and T. Paulay - Wiley - Interscience Publications. John Wiley & Sons, New York, London, Sidney, Toronto. 1975. Pág. 723.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEOP. MEDELLIN

DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA MINAS

FIG. 14 ESQUEMAS DE LA FALLA

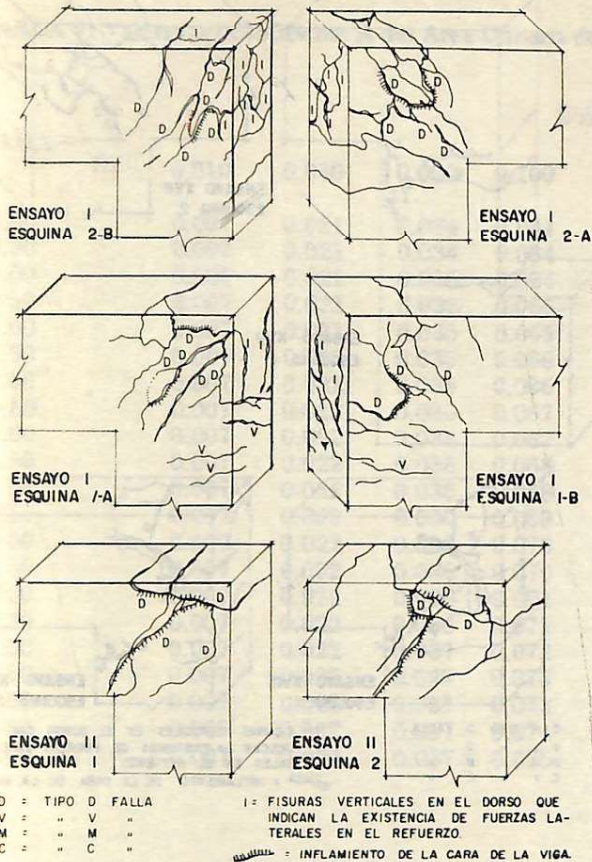


FIG. 14 ESQUEMAS DE FALLA

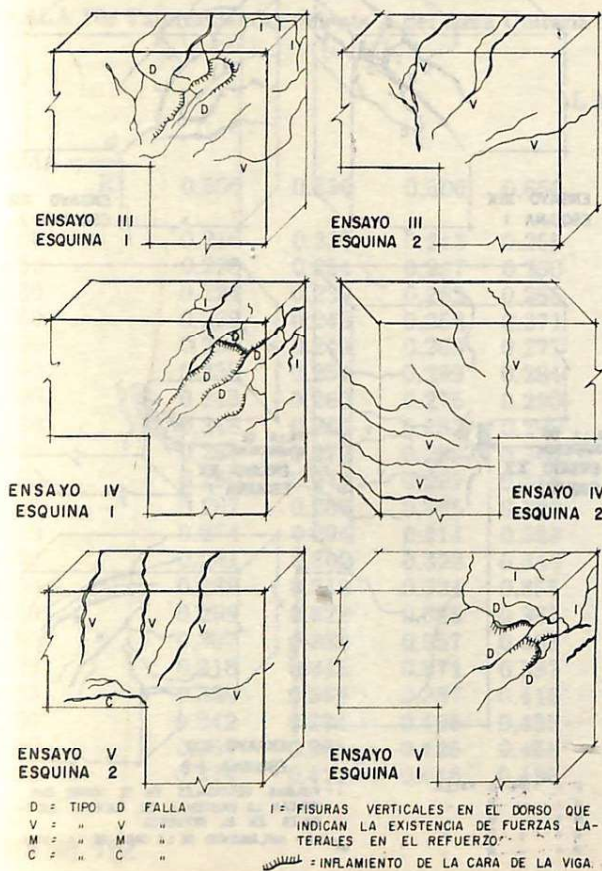


FIG. 14 ESQUEMAS DE FALLA

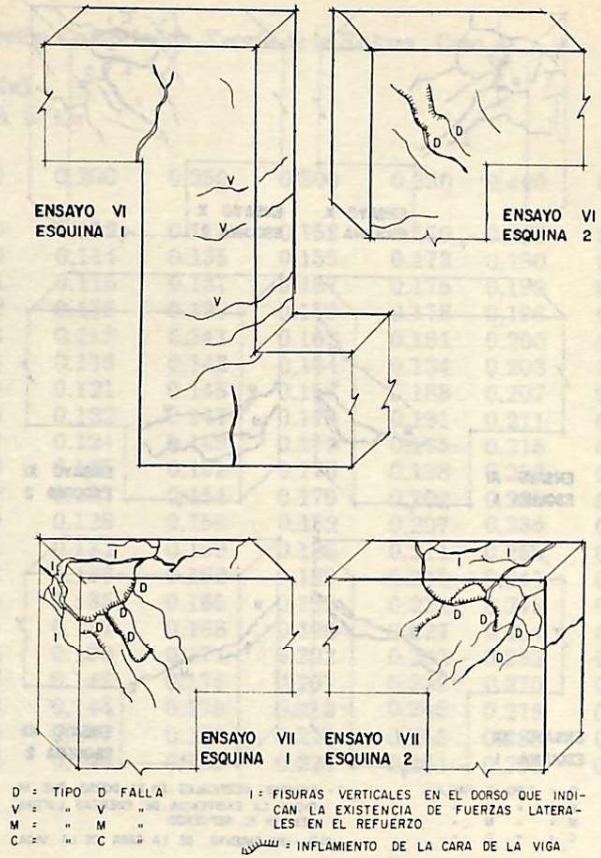


FIG. 14 ESQUEMAS DE FALLA

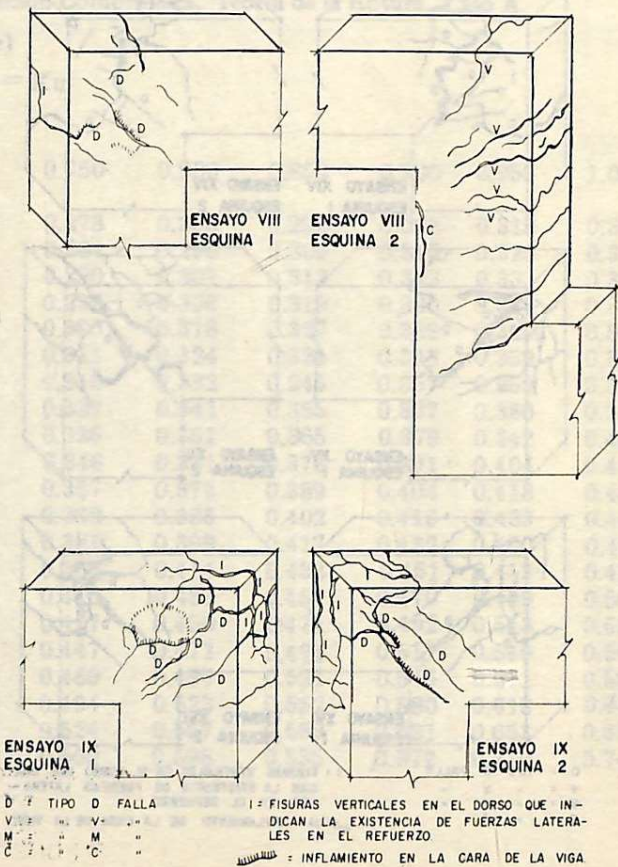


FIG. 14 ESQUEMAS DE FALLA

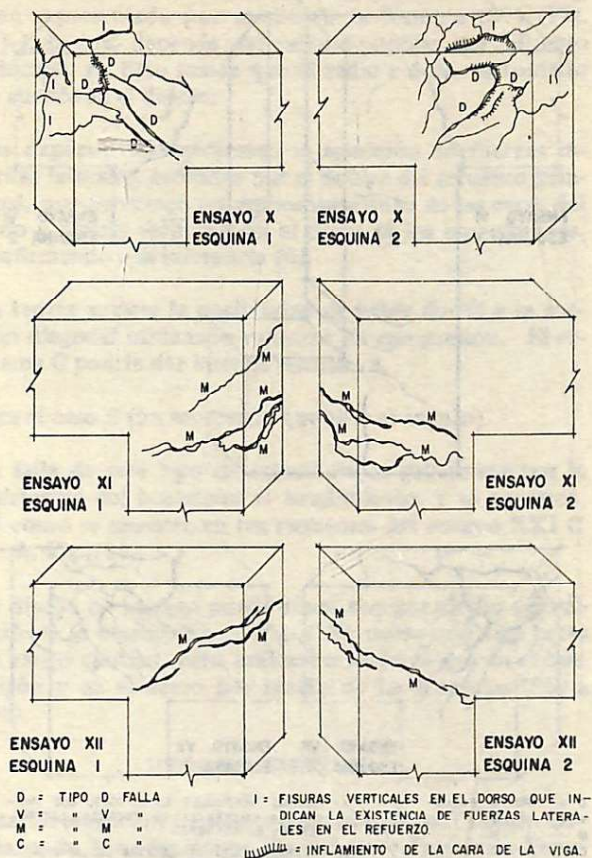


FIG. 14 ESQUEMAS DE FALLA

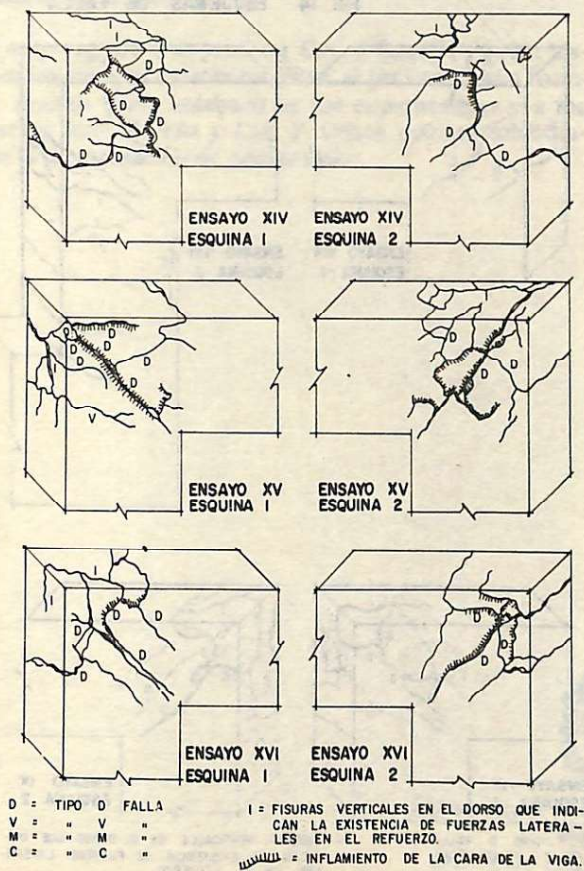


FIG. 14 ESQUEMAS DE FALLA

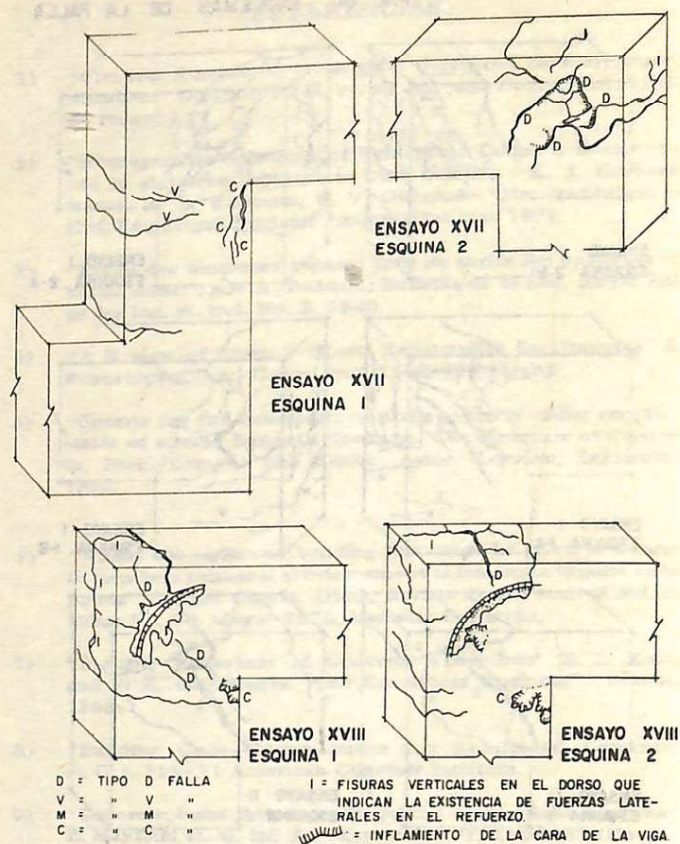


FIG. 14 ESQUEMAS DE FALLA

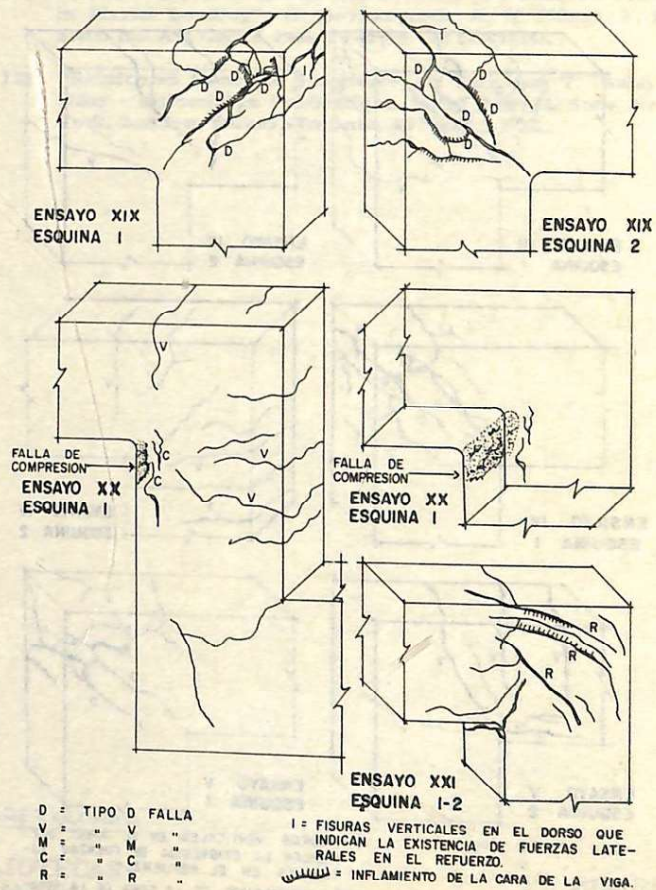


TABLA 9: Valores del Coeficiente A del Area Unitaria de la Sección Comprimida. Teoría de la Rotura. Caso A

GAMA = $\frac{d}{Ri}$	$\Delta (Ku)$ L A M D A = Ku										
	0.010	0.030	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350	0.400	0.450
10.00	0.007	0.021	0.034	0.064	0.089	0.112	0.113	0.152	0.170	0.186	0.202
9.50	0.007	0.021	0.034	0.064	0.090	0.114	0.135	0.155	0.173	0.190	0.205
9.00	0.007	0.021	0.035	0.064	0.091	0.115	0.137	0.157	0.175	0.193	0.209
8.50	0.007	0.021	0.035	0.065	0.092	0.116	0.139	0.159	0.178	0.196	0.213
8.00	0.007	0.021	0.035	0.065	0.093	0.118	0.141	0.162	0.181	0.200	0.217
7.50	0.007	0.022	0.035	0.066	0.094	0.119	0.142	0.164	0.184	0.203	0.221
7.00	0.007	0.022	0.035	0.066	0.095	0.121	0.145	0.157	0.188	0.207	0.225
6.50	0.007	0.022	0.035	0.067	0.096	0.122	0.147	0.170	0.191	0.211	0.230
6.00	0.007	0.022	0.035	0.067	0.097	0.124	0.149	0.172	0.195	0.215	0.235
5.50	0.007	0.022	0.036	0.068	0.098	0.125	0.151	0.176	0.198	0.220	0.241
5.00	0.007	0.022	0.036	0.068	0.099	0.127	0.154	0.179	0.202	0.225	0.246
4.50	0.007	0.022	0.036	0.069	0.100	0.129	0.156	0.182	0.207	0.235	0.252
4.00	0.007	0.022	0.036	0.070	0.101	0.131	0.159	0.186	0.211	0.255	0.259
3.50	0.007	0.022	0.036	0.070	0.102	0.133	0.162	0.189	0.216	0.241	0.266
3.00	0.007	0.022	0.036	0.071	0.104	0.135	0.165	0.193	0.221	0.248	0.273
2.50	0.007	0.022	0.036	0.071	0.105	0.137	0.168	0.198	0.227	0.254	0.281
2.00	0.007	0.022	0.037	0.072	0.106	0.139	0.171	0.202	0.232	0.262	0.290
1.50	0.007	0.022	0.037	0.073	0.108	0.142	0.175	0.207	0.239	0.270	0.300
1.00	0.007	0.022	0.037	0.073	0.109	0.144	0.178	0.212	0.246	0.278	0.311
0.50	0.007	0.022	0.037	0.074	0.110	0.147	0.182	0.218	0.253	0.288	0.323
0.00	0.007	0.022	0.037	0.075	0.112	0.149	0.187	0.224	0.261	0.299	0.336

TABLA 10: Valores del Coeficiente A del Area Unitaria de la Sección Comprimida. Teoría de la Rotura. Caso A

GAMA = $\frac{d}{Ri}$	$\Delta (Ku)$ L A M D A = Ku										
	0.500	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750	0.800	0.850	0.900	0.950	1.000
10.00	0.216	0.230	0.243	0.255	0.267	0.278	0.288	0.298	0.308	0.318	0.327
9.50	0.220	0.234	0.247	0.260	0.272	0.284	0.295	0.305	0.315	0.325	0.334
9.00	0.224	0.239	0.252	0.265	0.278	0.290	0.301	0.312	0.323	0.333	0.342
8.50	0.229	0.243	0.258	0.271	0.284	0.296	0.308	0.319	0.330	0.341	0.351
8.00	0.233	0.249	0.263	0.277	0.291	0.303	0.316	0.327	0.339	0.350	0.360
7.50	0.238	0.254	0.269	0.284	0.297	0.311	0.324	0.335	0.348	0.359	0.370
7.00	0.243	0.260	0.275	0.290	0.305	0.319	0.332	0.345	0.357	0.369	0.381
6.50	0.248	0.266	0.282	0.298	0.313	0.327	0.341	0.355	0.367	0.380	0.392
6.00	0.254	0.272	0.289	0.305	0.321	0.336	0.351	0.365	0.379	0.392	0.404
5.50	0.260	0.279	0.297	0.314	0.330	0.346	0.361	0.376	0.391	0.404	0.418
5.00	0.267	0.286	0.305	0.323	0.340	0.357	0.373	0.389	0.404	0.418	0.432
4.50	0.274	0.294	0.314	0.333	0.351	0.368	0.385	0.402	0.416	0.433	0.448
4.00	0.281	0.302	0.323	0.343	0.362	0.381	0.399	0.417	0.432	0.450	0.466
3.50	0.289	0.312	0.334	0.355	0.375	0.395	0.414	0.433	0.451	0.459	0.486
3.00	0.298	0.322	0.345	0.367	0.389	0.410	0.431	0.451	0.470	0.489	0.508
2.50	0.307	0.333	0.357	0.381	0.405	0.427	0.450	0.471	0.492	0.513	0.533
2.00	0.318	0.345	0.371	0.397	0.422	0.447	0.471	0.474	0.517	0.540	0.562
1.50	0.330	0.359	0.387	0.415	0.442	0.469	0.495	0.521	0.545	0.571	0.596
1.00	0.342	0.374	0.405	0.435	0.455	0.494	0.523	0.552	0.580	0.618	0.636
0.50	0.357	0.391	0.425	0.458	0.491	0.524	0.557	0.589	0.621	0.653	0.635
0.00	0.374	0.411	0.448	0.486	0.523	0.560	0.598	0.535	0.672	0.710	0.747

TABLA 11: Distancia del Centroide del Area a la Fibra Extrema de Compresión. Teoría de la Rotura. Caso A

GAMA = $\frac{d}{R_i}$	$\frac{K_2}{LAMDA} = K_u$										
	0.010	0.030	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350	0.400	0.450
10.00	0.400	0.390	0.380	0.361	0.346	0.334	0.324	0.315	0.307	0.300	0.294
9.50	0.401	0.391	0.382	0.363	0.348	0.336	0.326	0.317	0.309	0.303	0.296
9.00	0.401	0.391	0.383	0.365	0.351	0.339	0.329	0.320	0.312	0.305	0.299
8.50	0.401	0.392	0.384	0.367	0.353	0.341	0.331	0.323	0.315	0.308	0.302
8.00	0.401	0.393	0.385	0.368	0.355	0.344	0.334	0.326	0.318	0.311	0.305
7.50	0.402	0.394	0.386	0.370	0.357	0.346	0.337	0.329	0.321	0.315	0.309
7.00	0.402	0.394	0.387	0.372	0.360	0.349	0.340	0.332	0.325	0.318	0.312
6.50	0.402	0.395	0.389	0.374	0.362	0.352	0.343	0.335	0.328	0.322	0.316
6.00	0.403	0.396	0.390	0.376	0.365	0.355	0.346	0.339	0.332	0.326	0.320
5.50	0.403	0.397	0.391	0.378	0.368	0.358	0.350	0.342	0.336	0.330	0.324
5.00	0.403	0.398	0.392	0.380	0.370	0.361	0.354	0.346	0.340	0.334	0.329
4.50	0.404	0.398	0.394	0.383	0.373	0.365	0.357	0.351	0.344	0.339	0.333
4.00	0.404	0.399	0.395	0.385	0.376	0.368	0.361	0.355	0.349	0.344	0.339
3.50	0.404	0.400	0.396	0.387	0.379	0.372	0.366	0.360	0.354	0.349	0.344
3.00	0.404	0.401	0.398	0.390	0.383	0.376	0.370	0.365	0.360	0.355	0.351
2.50	0.405	0.402	0.399	0.392	0.386	0.380	0.375	0.370	0.366	0.361	0.357
2.00	0.405	0.403	0.400	0.395	0.390	0.385	0.380	0.376	0.372	0.368	0.365
1.50	0.405	0.404	0.402	0.398	0.394	0.390	0.386	0.383	0.379	0.376	0.373
1.00	0.406	0.404	0.403	0.400	0.398	0.395	0.392	0.390	0.387	0.385	0.383
0.50	0.406	0.405	0.405	0.403	0.402	0.400	0.399	0.398	0.396	0.395	0.394
0.00	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407

TABLA 12: Distancia del Centroide del Area a la Fibra Extrema de Compresión. Teoría de la Rotura. Caso A

GAMA = $\frac{d}{R_i}$	$\frac{K_2}{LAMDA} = K_u$										
	0.500	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750	0.800	0.850	0.900	0.950	1.000
10.00	0.288	0.283	0.278	0.274	0.270	0.266	0.262	0.259	0.256	0.253	0.250
9.50	0.291	0.286	0.281	0.277	0.273	0.269	0.265	0.262	0.259	0.256	0.253
9.00	0.294	0.289	0.284	0.279	0.275	0.272	0.268	0.262	0.252	0.259	0.256
8.50	0.297	0.292	0.287	0.283	0.279	0.275	0.271	0.268	0.265	0.262	0.259
8.00	0.300	0.295	0.290	0.286	0.282	0.278	0.275	0.271	0.268	0.265	0.262
7.50	0.303	0.298	0.294	0.289	0.285	0.282	0.278	0.275	0.272	0.269	0.266
7.00	0.307	0.302	0.297	0.293	0.289	0.285	0.282	0.279	0.275	0.273	0.270
6.50	0.311	0.306	0.301	0.297	0.293	0.289	0.286	0.283	0.279	0.277	0.274
6.00	0.315	0.310	0.305	0.301	0.297	0.292	0.290	0.287	0.284	0.281	0.278
5.50	0.319	0.314	0.310	0.306	0.302	0.298	0.295	0.292	0.289	0.286	0.283
5.00	0.324	0.319	0.315	0.311	0.307	0.303	0.300	0.297	0.294	0.291	0.288
4.50	0.329	0.324	0.320	0.316	0.312	0.309	0.305	0.312	0.299	0.296	0.294
4.00	0.334	0.330	0.326	0.322	0.318	0.315	0.311	0.308	0.315	0.309	0.307
3.50	0.340	0.336	0.332	0.328	0.325	0.321	0.318	0.315	0.312	0.309	0.307
3.00	0.346	0.342	0.339	0.335	0.332	0.329	0.326	0.323	0.320	0.317	0.315
2.50	0.354	0.350	0.346	0.343	0.340	0.337	0.334	0.331	0.329	0.326	0.324
2.00	0.351	0.358	0.355	0.352	0.349	0.346	0.344	0.341	0.339	0.336	0.334
1.50	0.370	0.368	0.365	0.362	0.360	0.357	0.355	0.353	0.351	0.348	0.346
1.00	0.380	0.378	0.376	0.374	0.372	0.370	0.368	0.368	0.368	0.368	0.368
0.50	0.392	0.391	0.390	0.389	0.387	0.386	0.385	0.384	0.383	0.382	0.380
0.00	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407	0.407

TABLA 17

									Cálculo Teórico Ri 3 cm				Por la diagonal		Por la línea n - n	
									F'c real				como viga curva		como viga recta	
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
Ensayo		r (m)	Estribos	Carga de rotura (ton) P	Clase de refuer- zo	brazo l (m)	f'c Kg/ cm ²	tipo de falla	P viga curva Ri 3 cm con f'c real	P viga recta Ri 3cm	P viga curva con fct de Richard et al Ri 3cm	P viga curva con fct de ten- sión biaxial Ri 3 cm	C (cm) como viga curva (Teó- rico)	C (cm) como viga curva (real)	C (cm) como viga recta por línea n-n (teórica)	C (cm) como viga recta por línea n-n (real)
I	Esquina 1	5,7	Con	3,510	A	1,60	361	D		4,824	3,448		4,84	3,0	11,44	
	Esquina 2	5,7	"	3,775	"	1,54	361	D		5,058	3,597		4,84		11,45	
II	Esquina 1	5,7	"	4,200	"	1,54	448	D		6,129	4,143		4,64	4,9	10,66	
	Esquina 2	5,7	"	3,550	"	1,60	372	D		4,824	3,535		4,79	3,8	11,44	
III	Esquina 1	5,7	"	2,275	"	1,60	472	D		4,932	3,928		4,50	6,0	10,40	
	Esquina 2	5,7	"	4,000	"	1,54	443	V		5,135	4,103		4,64	3,0	10,66	
IV	Esquina 1	5,7	Sin	3,300	"	1,61	385	D		4,812	3,561		4,76	3,0	11,18	
	Esquina 2	5,7	"	4,000	"	1,54	374	V		5,057	3,705		4,79	4,7	11,44	
V	Esquina 1	5,7	"	4,000	"	1,59	396	D	2,140	4,271	3,948		4,64	4,0	9,89	
	Esquina 2	5,7	"	4,400	"	1,53	374	V	2,665	4,654	4,137		4,98	3,0	10,66	
VI	Esquina 1	5,7	"	4,200	"	1,53	294	D	3,423	4,995	3,976		5,44	1,5	12,38	
	Esquina 2	5,7	"	4,200	"	1,58	227	D	2,871	4,701	3,543		5,76	2,8	13,32	
VII	Esquina 1	23,2	Con	5,200	"	1,52	285	D	2,739	5,016	5,880		4,27	-	12,43	
	Esquina 2	23,2	"	5,200	"	1,59	166	D	2,093	4,307	5,085		3,77	-	17,94	
VIII	Esquina 1	5,7	Sin	3,300	"	1,52	354	D	3,714	4,644	4,166		5,12	4,4	11,44	
	Esquina 2	5,7	"	4,800	"	1,59	244	V	3,092	4,259	3,363		5,60	3,6	13,00	
IX	Esquina 1	5,7	"	3,800	"	1,52	363	D	3,809	5,141	4,390		5,12	3,2	13,00	
	Esquina 2	5,7	"	3,300	"	1,57	250	D	3,204	4,788	3,644		5,76	3,6	11,44	
X	Esquina 1	5,7	"	5,000	"	1,52	306	D	3,599	5,062	4,355		5,44	3,2	12,22	
	Esquina 2	5,7	"	5,500	"	1,57	317	D	3,511	4,876	4,311		5,44	-	11,96	
XI	Esquina 1	23,2	"	1,300	B-BB	1,61	207	M	1,101	4,893	1,113		2,32	2,4	13,78	
	Esquina 2	23,2	"	1,300	"	1,52	210	M	1,174	4,557	1,186		2,32	12,0	13,78	
XII	Esquina 1	23,2	"	1,300	B-BA	1,52	198	M	1,172	4,554	1,186		2,32	3,8	14,04	
	Esquina 2	23,2	"	1,300	"	1,60	191	M	1,089	4,555	1,121		2,32	3,5	14,30	
XIII	Esquina 1	23,2	"	6,000	A-AB	1,52	222	D	2,335	4,906	5,871		2,90	-	13,60	
	Esquina 2	23,2	"	4,800	"	1,60	207	D	2,099	4,604	5,547		2,90	-	13,88	
XIV	Esquina 1	23,2	Con	2,600	"	1,51	123	D	1,546	3,615	5,913	2,604	6,38	7,8	16,12	
	Esquina 2	23,2	"	3,050	"	1,54	115	D	1,433	3,333	5,766	2,436	6,53	2,0	16,48	
XV	Esquina 1	5,7	Sin	1,350	"	1,52	128	D	1,959	3,632	2,738	2,220	8,91	4,8	14,17	
	Esquina 2	5,7	"	2,350	"	1,54	128	D	1,931	2,937	2,699	2,189	8,91	3,5	16,02	
XVI	Esquina 1	5,7	Con	2,500	"	1,52	160	D	2,368	4,434	3,178	2,519	8,58	8,0	15,03	
	Esquina 2	5,7	"	1,400	"	1,54	175	D	2,449	4,090	3,205	2,648	8,21	2,4	14,64	
XVII	Esquina 1	23,2	"	3,300	"	1,52	133	V	1,620	3,802	5,850		3,19	12,2	15,86	
	Esquina 2	23,2	"	3,300	"	1,57	146	D	1,630	3,969	5,772		3,16	6,2	15,44	
XVIII	Esquina 1	23,2	"	3,850	C	1,52	140	D			2,615		4,81	6,2		
	Esquina 2	23,2	"	3,850	"	1,50	154	D			2,648		4,29	4,0		
XIX	Esquina 1	5,7	"	2,900	A-AB	2,50	214	D		4,713	3,795		6,59	2,8	13,73	
	Esquina 2	5,7	"	3,000	"	1,50	214	D		4,827	3,877		6,59	3,1	13,73	
XX *	Esquina 1	23,2	"	3,920	"	1,57	196	C		4,662	5,663		3,02	10,2	14,12	
	Esquina 2	23,2	"	3,800	"	1,54	196	C		4,775	5,785		3,02		14,12	
XXI *	Esquina 1	*	"	1,350	D	1,57	180	R		1,460*					13,36	22,2
	Esquina 2	*	"	2,200	D	1,50	234	R		1,930*					13,24	20,2

* Formaleta curva
Ri 3 cm.

* Por hendimiento
en ton métricas