Ecuaciones en diferencias finitas y variación de parámetros

Por
Gabriel Poveda Ramos *

1. El método de variación de parámetros, debido a Lagrange, es bastante conocido para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, para las cuales fue originalmente deducido. Como se recordará, el método consiste en partir del conocimiento de una solución particular de una ecuación diferencial homogénea, y deducir la solución general de una ecuación no-homogénea asociada a la anterior.

Sin embargo, a pesar de las analogías formales entre ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias finitas, la bibliografía (más bien escasa) sobre esta última materia menciona muy poco la posibilidad de utilizar la técnica de variación de parámetros para tratar ecuaciones en diferencias finitas ordinarias y lineales. Solo el libro de Miller trata el punto, pero en forma un poco confusa.

Para llenar ese vacío, y solo con propósitos didácticos, se muestra en este artículo cómo aplicar el método aludido a las ecuaciones en diferencias finitas, lineales, no-homogéneas, de segundo orden.

2. Consideremos pues, una ecuación en diferencias finitas con las características aludidas, y denotada en la forma incremental:

$$(01)\quad \Delta^2\, y\,(n) + R\,(n).\ \Delta\, y\,(n) + P\,(n).\ y\,(n) = Q\,(n),$$

en donde la variable independiente es n y ella recorre la sucesión de los números naturales desde el cero: n = 0, 1, 3, . . .; mientras que la variable dependiente es y, y sus respectivos valores y (0), y (1), . . ., etc., forman una sucesión cuyos incrementos de primer orden y de segundo orden satisfacen la ecuación propuesta. La ecuación es evidentemente lineal. Es no-homogénea debido a la presencia de la función Q (n), que no es idénticamente nula. El problema consiste en obtener la solución general de la ecuación (01) a partir de una solución particular de la ecuación homogénea asociada.

Sea pues y_1 (n) una solución particular de la ecuación homogénea asociada a (01), es decir de

$$(02)\quad \Delta^2\ y\,(n) + R\,(n).\ \Delta\, y\,(n) + P\,(n).\, y\,(n) = 0$$

Es bien sabido que si K es cualquier constante arbitraria, el producto $K.y_1(n)$ también satisface la ecuación anterior (02).

3. La técnica de la variación de parámetros consiste en buscar la solución general de la ecuación no-homogénea, considerando el factor K no como una constante sino como una función K (n) de n, cuya forma hay que buscar. Es decir, el método propone como solución para (01) la función (ó, mas bien, la sucesión)

$$(03)\quad y(n) = K(n).\, y_1(n)$$

y procede a buscar la forma explícita de K (n) en términos de las funciones conocidas R(n), P(n), Q(n), $y_1(n)$. Para nuestro caso, determinamos la primera y la segunda diferencia finita de la expresión (03):

$$\Delta\, y(n) = K.\ \Delta\, y_1 + \Delta\, K.y_1 + \Delta\, K.\ \Delta\, y_1$$

$$\Delta^2 y(n) = K.\ \Delta^2\, y_1 + 2.\ \Delta\, K.\Delta\, y_1 + 2.\ \Delta\, K.\ \Delta^2 y_1 + 2.\ \Delta^2\, K.\ \Delta\, y_1 + \Delta^2\, K.y_1 + \Delta^2\, K.\ \Delta^2 y_1$$

Sustituyendo en la ecuación (01), se obtiene:

$$K\left[\Delta^2 y_1 + R.\,\Delta y_1 + P.\, y_1\right] + \Delta K\left[R.y_1 + (R+2)\,\Delta y_1 + 2.\,\Delta^2 y_1\right] + \Delta^2 K\left[y_1 + 2.\,\Delta y_1 + \Delta^2 y_1\right] = Q$$

Debido a que y_1 es solución de la ecuación homogénea (02), el corchete que multiplica a K es igual a cero. Una vez suprimido ese término, y dividiendo por el corchete que multiplica a Δ^2 K, se obtiene:

$$(04)\quad \Delta^2\, K + \frac{R.y_1 + (R+2)\,\Delta y_1 + 2.\,\Delta^2 y_1}{y_1 + 2.\,\Delta y_1 + \Delta^2 y_1}\ \Delta K = \frac{Q}{y_1 + 2.\,\Delta y_1 + \Delta^2 y_1}$$

* Ingeniero Químico y Electricista.
Magister en Matemáticas.
Ex-profesor de Matemáticas en las Universidades Nacional, Bolivariana, de Medellín, de Antioquia y del Valle.
Miembro de la Academia Colombiana de Ciencias.

Si ponemos, por abreviar:

$$(05)\quad \Delta K = U$$

$$(06)\quad \frac{Ry_1 + (R+2)\,\Delta y_1 + 2.\,\Delta^2 y_1}{y_1 + 2.\,\Delta y_1 + \Delta^2 y_1} = H$$

$$(07)\quad \frac{Q}{y_1 + 2.\,\Delta y_1 + \Delta^2 y_1} = F$$

entonces la ecuación (04) puede ponerse en la forma

$$\Delta U + H.\,U = F$$

Esta es una ecuación en diferencias finitas, de primer orden, no-homogénea, cuya solución se encuentra deducida en libros sobre la materia, como el de Miller (Véase la bibliografía, al final). Esa solución puede deducirse aplicando la ecuación equivalente de recurrencia

$$U(k+1) = \Big[\,1 - H(k)\,\Big]\; U(k) + F(k)$$

sucesivamente para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, etc. y generalizando el resultado que se va obteniendo. La solución es

$$(08)\quad U(n) = \prod_{k=o}^{n-1}\Big[1 - H(k)\Big]\left\{U(o) + \sum_{i=o}^{n-1} F(l) \div \prod_{j=o}^{i}\Big[1 - H(j)\Big]\right\}$$

Además, de la definición (05), se deduce que

$$K(n) = K(O) + \sum_{m=o}^{n-1} U(m)$$

Finalmente, la solución buscada se escribe

$$y(n) = K(n).\,y_1(n) = y_1(n)\left[\,K(O) + \sum_{m=o}^{n-1} U(m)\,\right]$$

y sustituyendo la solución (08) en la expresión inmediatamente anterior, se obtiene

$$(09)\quad y(n) = K(O).\,y_1(n) + U(O)\left(y_1(n)\sum_{m=o}^{n-1}\prod_{k=o}^{m-1}\Big[1 - H(k)\Big]\right) + \sum_{m=o}^{n-1}\prod_{k=o}^{m-1}\Big[1 - H(k)\Big]\sum_{i=o}^{m-1}\left(F(k) \div \prod_{j=o}^{i}\Big[1 - H(j)\Big]\right)$$

que es la solución general que buscábamos para la ecuación (01). De acuerdo con la definición (06) para la función H, la expresión $1-H$ que aparece en la ecuación (09) resulta ser

$$1 - H = \frac{(1-R)\,y_1 - R.\,\Delta y_1 - \Delta^2 y_1}{y_1 + 2.\,\Delta y_1 + \Delta^2 y_1}$$

4. Ejemplo. Consideremos la ecuación en diferencias finitas, lineal, no-homogénea, con coeficientes variables

$$(10)\quad \Delta^2 y(n) - \frac{6}{n-1}\,\Delta y(n) + \frac{12}{(n-1)(n-2)}\,y(n) = n$$

La ecuación homogénea asociada de la anterior es

$$(11)\quad \Delta^2 y(n) - \frac{6}{n-1}\,\Delta y(n) + \frac{12}{(n-1)(n-2)}\,y(n) = O$$

y por sustitución directa, es posible comprobar que la sucesión

$$y_1(n) = n^{(3)}$$

satisface la ecuación homogénea anterior. Recordemos que, por definición,

$$n^{(3)} = n\,(n-1)\,(n-2)$$

En este ejemplo, se tiene: $R(n) = -6/(n-1)$; $P(n) = 12/(n-1)(n-2)$. Además, se sabe bien (o se puede calcular muy fácilmente), que:

$$\Delta y_1(n) = 3\,n^{(2)}$$

$$\Delta^2 y_1(n) = 6\,n$$

Así que la función H, en nuestro caso, y de acuerdo con la definición (06), vale

$$H = \frac{-6n^{(3)}/(n-1) - (6/(n-1)+2) \times 3n^{(2)} + 12n}{n^{(3)} + 6n^{(2)} + 6n}$$

$$= \frac{-6n^{(3)} - 18n^{(2)} + 6(n-1)n^{(2)} + 12n(n-1)}{(n-1)n^{(3)} + 6n^{(2)} + 6n}$$

$$= \frac{-6(n-2) - 18 + 6(n-1) + 12}{(n-1)(n-2) + 6(n-1) + 6} = 0$$

Además, según la definición (07) se obtiene

$$F(n) = \frac{n}{n^{(3)} + 2 \times 3n^{(2)} + 6n} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} = n^{(-2)}$$

de manera que

$$U(n) = U(0) + \sum_{i=0}^{n-1} F(i) = U(0) + \sum_{i=0}^{n-1} i^{(-2)}$$

$$= U(0) - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta i^{(-1)} = U(0) - \left[i^{(-1)} \right]_0^n$$

$$= U(0) - n^{(-1)} = U(0) - \frac{1}{n+1}$$

y la función K (n) es

$$K(n) = K(0) + \sum_{m=0}^{n-1} U(m) = K(0) + \sum_{m=0}^{n-1} U(0)$$

$$- \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m+1} = K(0) + nU(0) - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$$

de donde

$$y(n) = K(0)n^{(3)} + U(0)n.n^{(3)} - n^{(3)} \sum_{m=1}^{n} 1/m$$

Observando esta expresión para la solución general de la ecuación no-homogénea, se aprecia de inmediato que la parte complementaria es

$$K(0), n^{(3)} + U(0)n.n^{(3)}$$

y que

$$-n^{(3)} \sum_{m=1}^{n} 1/m = \varphi$$

es solución particular de la ecuación (10) dada como ejemplo. Las constantes arbitrarias son K (O), U (O). Una de ellas, K (O), va con la solución $n^{(3)}$ para la homogénea asociada.

De aquí resalta que la función $n.n^{(3)}$, que acompaña a U (O), también debe satisfacer a la ecuación homogénea (11), asociada de la (10). En efecto, sea

$$y_2(n) = n.n^{(3)} = n^2(n-1)(n-2)$$

Entonces

$$\Delta y_2(n) = (n+1)^2 n(n-1) - n^2(n-1)(n-2) =$$

$$n(n-1)\left[(n+1)^2 - n(n-2)\right] = n(n-1)(4n+1)$$

$$\Delta^2 y_2(n) = (n+1)n(4n+5) - n(n-1)(4n+1) =$$

$$n\left[(n+1)(4n+5) - (n-1)(4n+1)\right] = n(12n+6)$$

$$= 6n(2n+1)$$

y por lo tanto el lado izquierdo de la ecuación (11) vale, en este caso:

$$\Delta^2 y_2 - \frac{6}{n-1}\Delta y_2 + \frac{12}{(n-1)(n-2)} y_2 =$$

$$6n(2n+1) - 6n(4n+1) + 12n^2 = 0$$

es decir, que $y_2(n) = n.n^{(3)}$ también cumple la ecuación homogénea (10).

Ahora podemos comprobar que

$$\varphi = -n^{(3)}(1 + 1/2 + \ldots + 1/n)$$

es solución general de (10). En efecto:

$$\Delta\varphi = -(n+1)^{(3)}\left[1 + 1/2 + 1/3 + 1/(n+1)\right] + n^{(3)}(1 + 1/2 + \ldots + 1/n)$$

y después de algunas operaciones algebráicas elementales se obtiene

$$\Delta\ \phi = -n(n-1)\left[3\left(1+1/2+..+1/n\right)+1\right]$$

y la segunda diferencia es

$$\Delta^2\ \phi = -(n+1)\,n\left[3\left(1+1/2+..+1/(n+1)\right)+1\right]$$
$$+\,n(n-1)\left[3\left(1+1/2+..+1/n\right)+1\right]$$

que, después de las operaciones algebraicas indicadas, se reduce a

$$\Delta^2\ \phi = -n\left[6\left(1+..+1/n\right)+5\right]$$

Formando con ϕ (n) y sus diferencias finitas el lado izquierdo de la ecuación (10) se encuentra, haciendo las operaciones indicadas, que

$$\Delta^2\phi - \frac{6}{n-1}\ \Delta\phi + \frac{12}{(n-1)(n-2)}\ \phi = n$$

de manera idéntica, es decir que ϕ es solución (particular) de la ecuación (10) dada. De modo que la solución general de la ecuación (10), propuesta como ejemplo, es

$$y(n) = A.\,n^{(3)} + B.\,n.n^{(3)} - n^{(3)}\left(1+1/2+..1/n\right)$$

5. Por el hecho de que muchas veces las ecuaciones en diferencias finitas no se presentan en términos de sus primeras, segundas y demás diferencias, sino de relaciones entre valores consecutivos de la variable dependiente (en cuya forma se denomina ecuación de recurrencia), vale la pena mostrar como opera el método de variación de parámetros en este caso. Para esto, nos referiremos a la ecuación lineal de segundo orden, lineal, no-homogénea, con coeficientes variables

$$(12)\quad y(n+2) + R(n).\,y(n+1) + P(n).\,y(n) = Q(n)$$

y supondremos que conocemos una solución particular y_1 (n) para la ecuación homogénea asociada, es decir, que se cumple la identidad

$$(13)\quad y_1(n+2) + R(n).\,y_1(n+1) + P(n).\,y_1(n) = O$$

De acuerdo con la técnica de variación de parámetros, buscamos para la ecuación no homogénea (12), que estamos proponiendo, la solución general en la forma

$$y(n) = K(n).\,y_1(n)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (12), se tiene

$$(14)\quad K(n+2).\,y_1(n+2) + R(n).\,K(n+1).\,y_1(n+1)$$
$$+\,P(n).\,K(n).\,y_1(n) = Q$$

Multiplicando la identidad (13) por K (n + 2) :

$$K(n+2).\,y_1(n+2) + R(n).\,K(n+2).\,y_1(n+1) +$$
$$P(n).\,K(n+2).\,y_1(n) = O$$

y si a esta última le restamos la ecuación (14), se obtiene:

$$R(n).\,y_1(n+1).\,\Delta K(n+1) + P(n).\,y_1(n)$$
$$\left[\Delta K(n+1) + \Delta K(n)\right] = -\,Q(n)$$

es decir :

$$\left[R(n).\,y_1(n+1) + P(n).\,y_1(n)\right]\Delta K(n+1)$$
$$+\,P(n).\,y_1(n).\,\Delta K(n) = -\,Q(n)$$

o sea

$$\Delta K(n+1) - \frac{-P(n).\,y_1(n)}{R(n).\,y_1(n+1)+P(n).\,y_1(n)}\ \Delta K(n)$$

$$= -\frac{Q(n)}{R(n).\,y_1(n+1)+P(n).\,y_1(n)}$$

Para simplificar la nomenclatura, pongamos

$$(15)\quad \Delta K(n) = U(n)$$

$$(16)\ \frac{-P(n).\,y_1(n)}{R(n).\,y_1(n+1)+P(n).\,y_1(n)} = \llcorner(n)$$

$$(17)\ -\frac{Q}{R(n).\,y_1(n+1)+P(n).\,y_1(n)} = M(n)$$

En esta forma la ecuación que obtuvimos se puede escribir

$$U(n+1) = \llcorner(n).\ U(n) + M(n).$$

Esta es una ecuación en diferencias finitas, lineal, de primer orden, no-homogénea, cuya solución es

$$(18)\quad U(n) = \prod_{k=o}^{n-1} \mathrm{L}(k) \left[U(O) + \sum_{i=o}^{n-1} M(i) \div \prod_{j=o}^{i} \mathrm{L}(j) \right]$$

De aquí se deduce K (n), que vale

$$(19)\quad K(n) = K(O) + \sum_{m=o}^{n-1} U(m) =$$

$$K(O) + U(O) \sum_{m=o}^{n-1} \sum_{k=o}^{m-1} \mathrm{L}(k) + \sum_{m=o}^{n-1} \sum_{i=o}^{m-1} M(i) \prod_{j=i+1}^{m-1} \mathrm{L}(j)$$

y la solución general que se buscaba, para la ecuación (12), es

$$(20)\quad y(n) = K(O)\, y_1(n) + U(O)\, y_1(n) \sum_{m=o}^{n-1} \prod_{k=o}^{m-1} \mathrm{L}(k)$$

$$+ y_1(n) \sum_{m=o}^{n-1} \sum_{i=o}^{m-1} M(i) \prod_{j=i+1}^{m-1} \mathrm{L}(k)$$

6. Consideremos, como ejemplo, la ecuación

$$(21)\quad y(n+2) - \frac{n+2}{n+1}\, y(n+1) - 2\,\frac{n+2}{n}\, y(n) = n+2$$

Su ecuación homogénea asociada es

$$(22)\quad y(n+2) - \frac{n+2}{n+1}\, y(n+1) - 2\,\frac{n+2}{n}\, y(n) = O$$

Esta última tiene como solución a la función $y_1(n) = n.2^n$, y esto se puede comprobar por sustitución directa. En efecto:

$$y_1(n+1) = (n+1) \times 2^{n+1}$$

$$y_1(n+2) = (n+2) \times 2^{n+2}$$

luego

$$y_1(n+2) - \frac{n+2}{n+1}\, y_1(n+1) - 2\,\frac{n+2}{n}\, y(n) =$$

$$(n+2) \times 2^{n+2} - \frac{n+2}{n+1}\,(n+1)\, 2^{n+1} - 2\,\frac{n+2}{n}\, n.\, 2^n = (n+2) \times 2^n\,(4-2-2=O) = O$$

En este ejemplo, los coeficientes (variables) de la ecuación, son

$$R(n) = -\frac{n+2}{n+1}\ ;\ P(n) = -2\,\frac{n+2}{n}$$

y el término de inhomogeneidad es $Q(n) = n+2$. Construyamos con ellos la expresión definida en (16):

$$\mathrm{L}(n) = \frac{-P(n).\, y_1(n)}{R(n).\, y_1(n+1) + P(n).\, y_1(n)} =$$

$$\frac{2\,\frac{n+2}{n}\, n \times 2^n}{-\frac{n+2}{n+1}\,(n+1)\, 2^{n+1} - 2\,\frac{n+2}{n}\, n \times 2^n} = -1/2$$

Por lo tanto, la expresión para la otra solución complementaria es

$$y_2(n) = U(O).\, y_1(n) \sum_{o}^{n-1} \prod_{o}^{m-1} \mathrm{L}(k) =$$

$$U(O).\, y_1(n) \sum_{o}^{n-1} (-1/2)^m =$$

$$U(O).\, y_1(n)\, \frac{\left[1 - (-1/2)^n\right]}{1 + 1/2}$$

$$(23)\quad y_2(n) = B.\, n.\, 2^n \left[1 - (-1/2)^n\right] = B.\, n. \left[2^n - (-1)^n\right]$$

Verifiquemos que efectivamente esta es una solución de la ecuación (22):

$$y_2(n+2) - \frac{n+2}{n+1}\, y_2(n+1) - 2\,\frac{n+2}{n}\, y_2(n) =$$

$$B(n+2)\left[2^{n+2} - (-1)^{n+2}\right] - \frac{n+2}{n+1}\, B(n+1)\left[2^{n+1} - (-1)^{n+1}\right] - 2\,\frac{n+2}{n}\, B.\,n\left[2^{n} - (-1)^{n}\right] =$$

$$B(n+2)\left[4\times 2^{n} - (-1)^{n} - 2\times 2^{n} + (-1)^{n} - 2\times 2^{n} + 2\times(-1)^{n}\right] = B(n+2)\left[2^{n}(4-2-2=0) + (-1)^{n}(-1-1+2=0)\right] = 0$$

La expresión definida en (17) es:

$$M(n) = \frac{-Q}{R(n).\,y_1(n+1) + P(n).\,y_1(n)} =$$

$$\frac{-(n+2)}{-\frac{n+2}{n+1}(n+1)\,2^{n+1} - 2\,\frac{n+2}{n}\,n\times 2^{n}} = 1/2^{n+2}$$

La solución particular es el último término del lado derecho de la expresión (20):

$$\phi(n) = y_1(n) \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=o}^{m-1} M(i) \prod_{j=i+1}^{m-1} \llcorner(j)$$

Pero

$$\prod_{j=i+1}^{m-1} \llcorner(j) = (-1/2)^{m-1-i}$$

$$M(i) \sum_{j=i+1}^{m-1} \llcorner(j) = (1/2)^{i+2}(-1/2)^{m-1-i} =$$

$$(-1)^{m}(-1)^{i+1}\,(1/2)^{m+2}$$

$$\sum_{i=o}^{m-1} M(i) \prod_{i+1}^{m-1} \llcorner(j) = (-1)^{m}\,(1/2)^{m+2}$$

$$\sum_{i=o}^{m-1} (-1)^{i+1} = (1/2)^{m+1} \times a(m)$$

en donde a (m) significa

$$a(m) = \begin{cases} 0, \text{ si m es par} \\ 1, \text{ si m es impar} \end{cases}$$

Luego, la solución particular es

$$\phi(n) = y_1(n) \sum_{m=0}^{n-1} (1/2)^{m+1}\, a(m)$$

Poniendo $m = 2k + 1$, y cambiando la variable de sumación, se tiene

$$(24)\quad \phi(n) = y_1(n)\,(1/2)^2 \sum_{k=0}^{[n/2]-1} (1/2)^{2k} =$$

$$y_1(n)\times 1/4\left(1 + 1/4 + 1/4^{2} + \ldots + \frac{1}{4^{[n/2]-1}}\right)$$

$$\phi(n) = y_1(n)\times 1/4\,\frac{1-(1/4)^{[n/2]}}{3/4} = \frac{n\times 2^{n}}{3}$$

$$\left\{1-(1/4)^{[n/2]}\right\}$$

en donde [n/2] es parte entera de la fracción n/2.

Esta es la solución particular que se busca. Podemos comprobarlo por sustitución directa en la ecuación (21):

$$(25)\quad \phi(n+2) - \frac{n+2}{n-1}\,\phi(n+1) - 2\,\frac{n+2}{n}\,\phi(n) =$$

$$\frac{(n+2)\times 2^{n+2}}{3}\left\{1-(1/2)^2\,(1/4)^{[n/2]}\right\}$$

$$-\frac{n+2}{n+1}\,\frac{n+1}{3}\left\{1-(1/4)^{[(n+1)/2]}\right\}$$

$$-2\,\frac{n+2}{n}\,\frac{n}{3}\,2^{n}\left\{1-(1/4)^{[n/2]}\right\} =$$

$$\frac{(n+2)}{3}\,2^{n+1}.\left\{2-(1/2)(1/4)^{[n/2]} - 1 + (1/4)^{[(n+1)/2]} - 1 + (1/4)^{[n/2]}\right\}$$

La expresión que hay dentro del corchete queda así:

$$\begin{cases} -(1/2)\,(1/4)^{n/2} + (1/4)^{n/2} + (1/4)^{n/2}, & \text{si n es par} \\ -(1/2)\,(1/4)^{(n-1)/2} + (1/4)^{(n+1)/2} + (1/4)^{(n-1)/2}, & \text{si n es impar} \end{cases}$$

o sea:

$$\begin{cases} (1/4)^{n/2}\,(3/2) = 3 \times 2^{-n-1}, & \text{si n es par} \\ (1/4)^{(n-1)/2} \times (3/4) = 3 \times 2^{-n-1}, & \text{si n es impar} \end{cases}$$

En consecuencia, sea que n sea par o que sea impar, la expresión que hay al lado derecho de la ecuación (25) se convierte simplemente en

$$(n+2)$$

y, comparando la ecuación (25) para ϕ (n) con la ecuación (21) propuesta se comprueba que ϕ (n) cumple la ecuación (21).

BIBLIOGRAFIA

1. Miller, Keneth S. An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations, New York, 1966. Dover Publications. 167 p.

2. Levy, H. and F. Lessman. Finite Difference Equations. New York, 1961. The Mac Millan Company. 278 p.

3. Jordan, Charles. Calculus of Finite Differences. New York, 1965. Chelsea Publishing Co. 654 p.

4. Spiegel, Murray D. Calculus of Finite Differences and Difference Equations. New York, 1971. Mc. GrawHill Book Co. Schaum's Outline Series in Mathematics. 259 p.