Análisis de series cronológicas : Suavización exponencial*

En el análisis de series cronológicas se puede notar que los promedios aritméticos y móviles proporcionan pronósticos bastante alejados de la realidad para algunos de los datos. Para más seguridad se puede usar el modelo de la suavización exponencial en la mayoría de las series cronológicas corrientes, tal como se presenta en este artículo.

Aunque algunos economistas clasifican este nuevo enfoque como demasiado sencillo y por lo tanto sin sofisticación ni ciencia, se puede confiar ampliamente en él.

Por:
Javier I. Sánchez A.**

INTRODUCCION

La técnica de los promedios móviles en las series cronológicas consiste en tomar un conjunto de valores observados y usar su promedio como pronóstico del período siguiente. Se usa el término promedio móvil debido a que con cada nueva observación se puede calcular un promedio eliminando la observación más antigua del promedio actual a cambio de la más reciente para calcular un nuevo promedio. Este se usa consecuentemente como pronóstico para el período siguiente. Por lo tanto el número de datos de la serie usados en cada promedio siempre será constante e incluye las observaciones más recientes.

La ecuación (1) indica que para obtener un pronóstico usando un promedio móvil de orden N se deben tener los valores de las últimas N observaciones, así:

$$P_{t+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^{t} X_i \qquad (1)$$

Una manera más corta y más fácil de expresar esta ecuación es:

$$P_{t+1} = \frac{Xt}{N} - \frac{Xt-N+1}{N} + P_t \qquad (2)$$

De la ecuación (2) se puede apreciar que cada nuevo pronóstico basado en un promedio móvil consiste en añadir la observación más reciente y eliminar la más antigua al último pronóstico obtenido como promedio móvil, con su ajuste correspondiente.

Tanto los datos necesarios como los requisitos de cálculo son mínimos al aplicar los promedios móviles en una serie cronológica. Sin embargo como la precisión de los pronósticos obtenidos por este método es baja, se prefiere la suavización exponencial porque tiene más ventajas que los promedios móviles, como se verá más adelante.

Las dos limitaciones mayores para usar los promedios móviles son: a.- se debe tener a mano los últimos N valores observados; este problema se crece con el tamaño de N. En segundo lugar a cada una de las N observaciones se le asigna la misma ponderación, siendo què los valores más recientes son más valiosos en información que los más antiguos. En este caso la suavización exponencial satisface este argumento y además, sólo requiere dos datos para pronosticar un valor futuro. Y en tercer lugar, los promedios móviles ignoran todos los datos anteriores al período $t-N+1$.

La técnica de Suavización Exponencial puede explicarse fácilmente partiendo de la ecuación (2) de los promedios móviles. Supóngase que no se dispone del dato X_{t-N+1}; en este caso se puede modificar la ecuación (2) colocando un valor aproximado en su lugar para el período $t-N+1$. Una alternativa sería el pronóstico del período anterior P_t. Con esta sustitución, la ecuación (2) se convierte en la (3) con la seguridad de que si los datos son estacionarios, resulta una aproximación muy buena así:

$$P_{t+1} = \frac{Xt}{N} - \frac{Xt-N+1}{N} + P_t \qquad (2)$$

se convierte en

$$P_{t+1} = \frac{Xt}{N} - \frac{1}{N} P_t + P_t \qquad (3)$$

Ver Referencia [4] pp. 56 - 58

* Los sistemas de pronósticos exponenciales empezaron a aparecer al principio de abril de 1957 con un trabajo de Charles C. Holt titulado "Forcasting Seasonal Trends by Exponentially Weighted Moving Averages". Luego J. F. Magee publicó un trabajo en el cual ponderaba los datos en forma geométrica (exponencial) en 1958. En 1959, R. G. Brown publicó su libro con la técnica de pronósticos que él llamó "Exponential Smoothing"; en esta obra presentó un versión completa de ella. En 1960, P. R. Winters amplió el método al considerar estacionalidad, tendencia y situaciones complejas. Sinembargo la mayor contribución fue la del segundo libro de Brown en 1963: "Smoothing, Forcasting and Prediction of Discrete Time Series".

** Economista U. de A. MBA Syracuse University. Experto en Control de Calidad - Suecia. Profesor Titular U. N. - Medellín.

La ecuación (3) puede reorganizarse como

$$P_{t+1} = (1/N)\,X_t + (1-1/N)\,P_t \tag{4}$$

METODOLOGIA DE LA SUAVIZACION EXPONENCIAL

De la expresión (4) se puede observar que cada nuevo pronóstico va ponderando la observación más reciente con 1/N y el pronóstico más reciente con (1−1/N). Puesto que N es siempre un entero positivo 1/N será una constante comprendida entre cero y uno. Sustituyendo a α por 1/N, la ecuación (4) se convierte en

$$P_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha) P_t \tag{5}$$

Esta ecuación es la expresión general usada para calcular un pronóstico por medio de la suavización exponencial, siendo necesarios solamente los siguientes tres datos: la observación más reciente, el pronóstico más reciente y un valor para α.

Al expandir la ecuación (5) reemplazando P_t en sus componentes, se puede apreciar mejor las implicaciones de la suavización exponencial, como sigue:

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= \alpha X_t + (1-\alpha)\left[\alpha X_{t-1} + (1-\alpha) P_{t-1}\right] \\ &= \alpha X_t + \alpha(1-\alpha) X_{t-1} + (1-\alpha)^2 P_{t-1} \\ &= \alpha X_t + \alpha(1-\alpha) X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{t-2} + \\ &\quad \alpha(1-\alpha)^3 X_{t-3} + \alpha(1-\alpha)^{N-1} X_{t-(N-1)} \end{aligned} \tag{6}$$

Aquí se puede ver que las ponderaciones aplicadas a cada uno de los datos disminuye exponencialmente; de ahí el calificativo de "exponencial". Debe subrayarse que el objetivo debe ser la minimización de la desviación cuadrática media para saber cuál es el modelo del mejor ajuste y que la estimación involucrada en la suavización exponencial no es lineal.

Otra manera de escribir la ecuación (5) sería:

$$P_{t+1} = P_t + \alpha e_t \tag{7}$$

donde e_t sería la discrepancia entre la observación real y el pronóstico. De esta última ecuación se puede apreciar que el pronóstico suministrado por la suavización exponencial es simplemente el pronóstico anterior más un ajuste del error que ocurrió con este pronóstico. Así, si α se aproxima a 1, el nuevo pronóstico incluirá un ajuste sustancial del error en el pronóstico anterior. En el caso opuesto ocurre lo propio. Entonces el efecto del tamaño de α es completamente análogo al que produciría el número de observaciones al calcular un promedio móvil. Debe observarse que la suavización exponencial simple siempre sigue la trayectoria de los datos reales puesto que ajusta al máximo el pronóstico siguiente con algún porcentaje del error más reciente.

La ecuación (7) incluye un principio básico de retroalimentación negativa, puesto que se parece mucho al proceso de control de sistemas automáticos: el error de un pronóstico se usa para corregir al pronóstico siguiente en una dirección opuesta a la del error y habrá ajustes hasta que se corrijan los errores, hasta tal punto que se puede desarrollar un proceso de autoajuste que corrija automáticamente los errores de los pronósticos.

Como se ha podido observar, la suavización exponencial simple requiere sólo de una cantidad mínima de datos y de cómputos y se prefiere cuando se desea hacer el pronóstico de muchos datos. Un punto crítico resulta para el primer período cuando no se dispone del pronóstico P_1. Para solucionar esto, se puede usar el primer valor observado como el primer pronóstico o alternativamente usar los cuatro o cinco primeros valores y usar su pronóstico en el primer lugar. La estimación inicial puede ser un dato o un promedio. Debido a las ponderaciones decrecientes la influencia de la estimación inicial en el pronóstico disminuye retrospectivamente con el tiempo; así, la selección inicial no es extremadamente crítica.

Al graficar los datos se puede apreciar el efecto de α para suavizar los pronósticos. Un valor muy grande produce muy poca suavización, mientras que un valor muy pequeño da una suavización muy considerable. Ver gráfico 1.

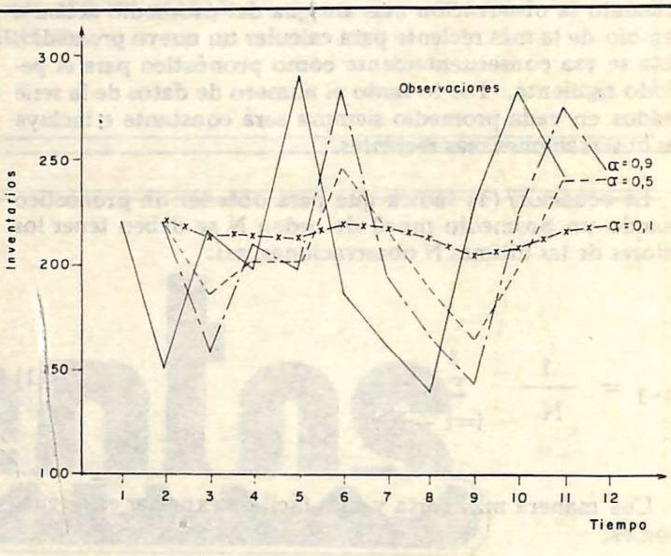


GRAFICO 1. Pronósticos de inventarios usando la suavización exponencial de los datos de la tabla 1.

El método de los promedios móviles y el de la suavización exponencial no son equivalentes debido a que en los cálculos de aquel se van eliminando las observaciones después de N períodos las que teóricamente nunca se "olvidan" en los cálculos de la suavización exponencial. En otras palabras, si se expresa el promedio de la antigüedad de los datos como $\alpha \;\Sigma\, n\,(1-\alpha)^n = (1-\alpha)/\alpha$ siempre y cuando la constante de suavización no varíe, entonces se tendrá la relación de Brown $(1-\alpha)/\alpha = (N-1)/2$ y por lo tanto $\alpha = 2/(N+1)$. Entonces cuando se ponderan las observaciones con 1/8 en un promedio móvil de orden 8 para los últimos 8 datos y con cero para los anteriores, un sistema de suavización exponencial equivalente en el sentido del promedio de la antigüedad de los datos, tendría una constante de suavización de $2/(8+1) = 0{,}2222$ y las ponderaciones de los términos de la ecuación (6) serían: 0,2222, 0,173, 0,134, 0,1046 . . . disminuyendo exponencialmente.

La constante α de suavización puede ser en algunos casos la fracción 1/N que se emplea en los promedios móviles. En términos generales se recomienda seleccionar su valor dentro del intervalo 0,01, 0,3. Si α =0,4 la ponderación de la observación más reciente será 0,4 pero las observaciones anteriores tendrán respectivamente las ponderaciones 0,24, 0,144, 0,0864, 0,05184, . . . Si las condiciones iniciales reflejan mucha confianza se puede usar un valor muy pequeño de α; en caso contrario se recomienda que α sea un valor próximo a la unidad. Esto se justifica porque para la k−ésima observación, la ponderación será $(1-\alpha)^k$. De esta manera si se cree que la predicción es acertada no será necesario buscar la causa de las posibles diferencias.

Una manera de iniciar el trabajo sería suponiendo un $\alpha = 1$ para el primer período donde toda la ponderación se aplica al único dato histórico; un $\alpha = 0{,}5$ al segundo período, un $\alpha = 1/3$ al tercero y así hasta que el α no sea mayor que la constante de suavización deseada a largo plazo. Este método requiere saber el número de períodos históricos.

La longitud del tiempo considerado para los promedios móviles varía con la clase de serie y análogamente lo hace la constante de suavización exponencial. Para una serie relativamente estacionaria, α puede variar entre 0,1 y 0,15 que corresponde a promedios móviles de 18 a 12 períodos. Pero cuando la serie tiene cambios bruscos, α puede variar de 0,2 a 0,5 que equivale a promedios móviles de 9 a 3 períodos.

La aplicación de la suavización exponencial se ilustra con el ejemplo de la tabla 1 que muestra los resultados de los pronósticos de una demanda hipotética usando valores de α de 0,1, 0,5, y 0,9. Para obtener los pronósticos se usó la ecuación (5). Por ejemplo el pronóstico de diciembre (para el período 12) cuando $\alpha = 0{,}1$, se obtuvo así:

$$P_{12} = \alpha X_{11} + (1-\alpha) P_{11} = 0{,}1 \times 240 + 0{,}9 \times 213{,}4 = 216{,}1$$

Además de las consideraciones anteriores para seleccionar a α se recomienda que se considere un valor tal que minimice el Error Medio Cuadrático (EMC). Diferente a la media para la cual siempre ocurre esta minimización cuando se obtiene el promedio muestral, el EMC para la suavización exponencial debe obtenerse por tanteo. Para cada valor de α se comparan los EMC para decidirse por el α que minimice el EMC. En el ejemplo anterior se tiene:

EMC = 2.747,9 para $\alpha = 0{,}1$
EMC = 3.423,6 para $\alpha = 0{,}5$ y
EMC = 4.007,8 para $\alpha = 0{,}9$

La magnitud del recorrido de los valores EMC indica la importancia de α para apreciar los errores. Para encontrar el valor de α más cercano al mejor posible, no se requiere hacer muchos intentos. En el ejemplo anterior se puede ver que el EMC disminuye a medida que α lo hace debido a la aleatoriedad de los datos.

Otras consideraciones válidas para seleccionar el valor de α son las siguientes: Si se carece de información, un α de 0,1 es una selección razonable para una serie suficientemente estable, mientras que 0,2 es un buen comienzo para una serie incierta. Para una serie de fluctuaciones amplias combinada con valores altos y bajos, un α más pequeño − entre 0,05 y 0,1 − es una selección aceptable. Asímismo un α pequeño es generalmente lo mejor para la llamada demanda con saltos que incluye muchos períodos con valor cero. Unos valores más altos de α son preferibles cuando se trata de períodos de corta duración. Así, unos α más pequeños son generalmente más apropiados para días o semanas comparados con trimestres o años porque aquellos tienen fluctuaciones relativamente más grandes que los períodos más largos.

Si se presenta un incremento repentino y momentáneo en la serie cronológica, el promedio suavizado se incrementará en α veces la magnitud del impulso y luego disminuirá como una curva geométrica hasta que se estabilice en el nivel original. Ver gráficos 2 y 3.

TABLA 1. Pronósticos de Inventarios usando la Suavización Exponencial

MES	Período	Observación	Valores Suavizados Exponencialmente		
			$\alpha = 0{,}1$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}9$
Enero	1	220	—	—	—
Febrero	2	150	220,0	220,0	220,0
Marzo	3	215	213,0	185,0	157,0
Abril	4	197	213,2	200,0	209,2
Mayo	5	290	211,6	198,5	198,2
Junio	6	185	219,4	244,3	280,8
Julio	7	160	216,0	214,6	194,6
Agosto	8	140	210,4	187,3	163,5
Septiembre	9	230	203,4	163,7	142,3
Octubre	10	280	206,0	196,8	221,2
Noviembre	11	240	213,4	238,4	274,1
Diciembre	12	—	216,1	239,2	243,4

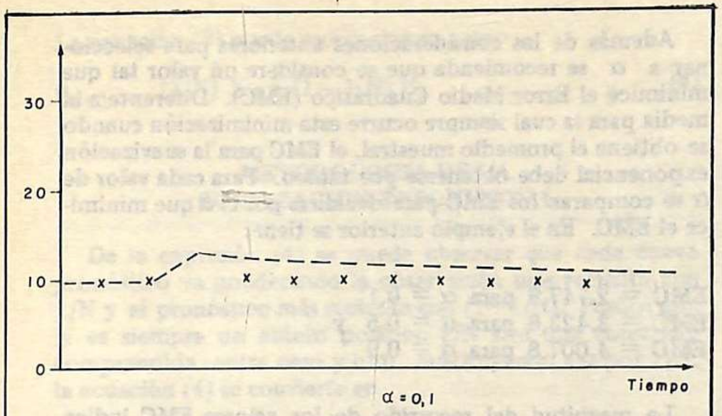


GRAFICO 2

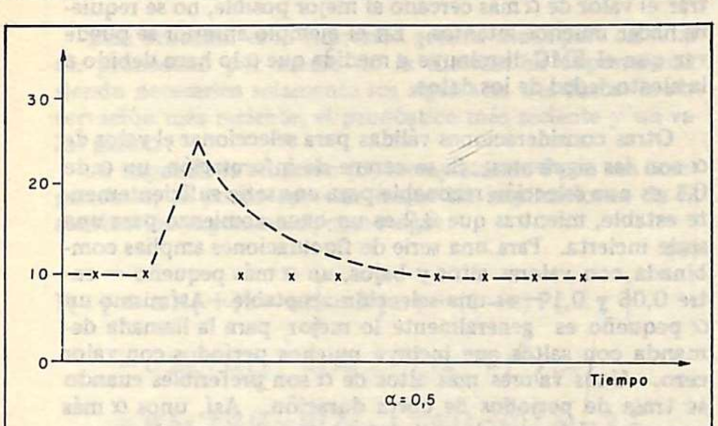


GRAFICO 3

Es de observar que a mayor impulso debido a un α más grande, se regresa más rápidamente al nivel correcto. Sinembargo cuando se trata de un promedio móvil de orden N, el incremento será de 1/N la magnitud del impulso y permanece en ese nivel N períodos antes de regresar al nivel original.

Si se presenta un incremento repentino en la serie a un nuevo nivel permanente, el promedio suavizado aumentará primero en α veces la magnitud del cambio para luego crecer invariablemente como una curva geométrica hasta estabilizarse en el nuevo nivel bajo la condición de que a mayor α, más rápidamente alcanzará al nuevo nivel. Ver gráficos 4 y 5.

Si la serie empieza a crecer a una tasa constante, el promedio suavizado también crecerá invariablemente, pero siempre permanecerá por debajo de la serie. Esto es lo que se llama "rezago" y a menor α mayor será el rezago. Ver gráficos 6 y 7.

Para un promedio móvil de orden N, el incremento será a una tasa constante, pero siempre habrá un rezago de (N − 1) /2 veces la tasa constante.

En resumen si los cambios en la componente permanente son pequeños en relación con las variaciones aleatorias entre dos períodos consecutivos, entonces α debe ser pequeño. Los pronósticos le darán ponderaciones a muchas observaciones pasadas para promediar el "ruido" (aleatoriedad encontrada a menudo en series de datos)[1]. En otras palabras, el pronóstico no debe depender mucho de la información más reciente que pueda decir poco sobre el futuro. Por otro lado, supóngase que los cambios en la componente permanente son grandes en comparación con el ruido, entonces α debe ser próximo a la unidad de tal manera que la información más reciente que es buena indicadora del fututo, se pondere con fuerza.

Si el nivel real de la serie es invariable, pero la serie contiene fluctuaciones aleatorias, el promedio suavizado reaccionará a este ruido en proporción al valor de α. A menor α menor será la influencia de las fluctuaciones aleatorias.

Suavización Exponencial Múltiple

En la suavización múltiple se supone que la demanda real puede ser representada por un polinomio de n−ésimo grado y que la demanda futura estimada $P_{t+\Delta t}$ se puede indicar como una serie de Taylor acerca del mejor estimador de la demanda corriente.

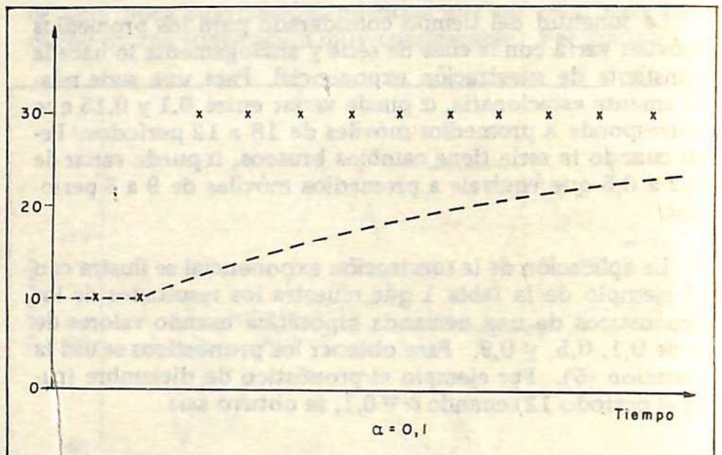


GRAFICO 4

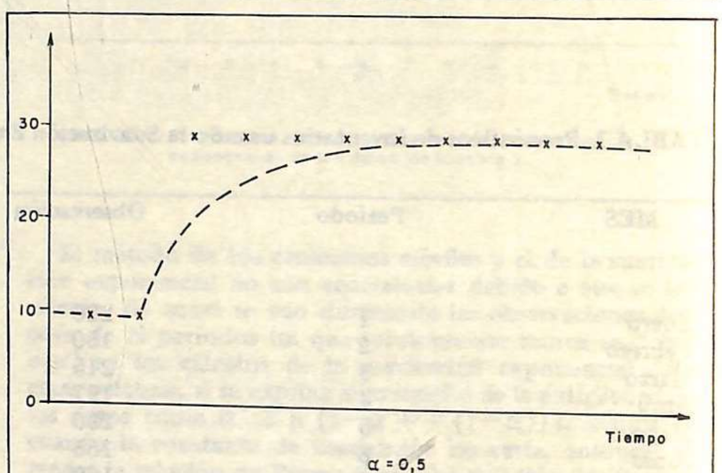
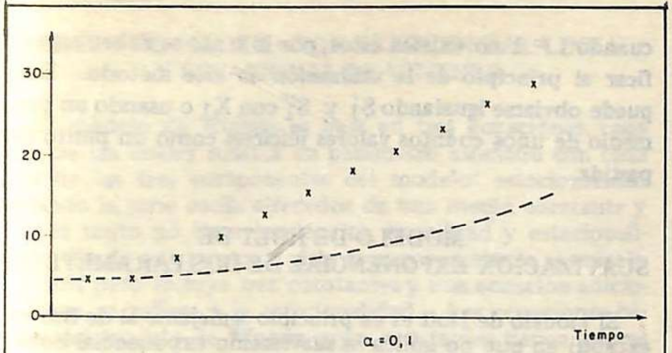


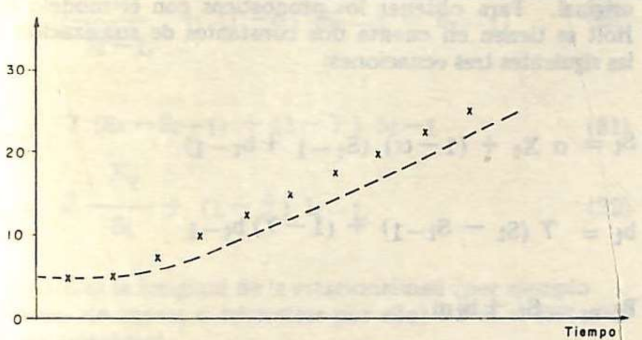
GRAFICO 5

[1] Este término procede del lenguaje de la ingeniería para casos en los cuales se usa un filtro para eliminar las interferencias y así poder identificar al verdadero patrón de trabajó.



α = 0,1

GRAFICO 6



α = 0,5

GRAFICO 7

$$P_{t+\Delta t} = P_t + \frac{dP}{dt}\Delta t + (1/2)\frac{d^2P_t}{dt^2}(\Delta t)^2 + \ldots \frac{1}{n!}\frac{d^nP_t}{dt^n}(\Delta t)^n$$

donde $\frac{d^kP_t}{dt^k}$ es el mejor estimador de la k—ésima derivada evaluada en el tiempo t. Dada la expresión anterior, sólo es necesario relacionar al pronóstico con los valores P_t^n de los promedios suavizados exponencialmente, donde n representa el número de veces que se suaviza cada valor. Muy rara vez se lleva la serie más allá del término de segundo orden debido a que los errores aunque pequeños en la estimación de las derivadas, se multiplican por potencias cada vez mayores de Δt. Si se ignoran todas las derivadas, sólo se necesitan los promedios suavizados simples. Si sólo se considera una derivada, se necesitan los promedios suavizados dobles y simples. Si se consideran dos rerivadas, se necesitan los promedios suavizados simples, dobles y triples, etc. Al suavizar de nuevo los pronósticos obtenidos inicialmente por el método de la suavización exponencial, se obtendrá la suavización exponencial doble.

$$P_t^{(2)} = \alpha P_t + (1-\alpha)\, P_{t-1}^{(2)} \tag{8}$$

Estos datos caerán sobre una línea paralela a los de la suavización exponencial simple a una distancia $b\beta/\alpha$ donde b es la pendiente de la recta de la suavización exponencial simple y $\beta = 1 - \alpha$.

Debido a que la distancia entre la línea de los datos reales y la de la suavización simple es igual a la de los datos entre las suavizaciones simple y doble, la ecuación de predicción puede ser desarrollada así para estimar el primer término de la ecuación de la línea de los datos reales.

$$a' = P_t + (P_t - P_t^{(2)}) = 2P_t - P_t^{(2)} \tag{9}$$

y el estimador del segundo término del polinomio será

$$b' = \frac{\alpha}{\beta}(P_t - P_t^{(2)}) \tag{10}$$

que se pueden usar en la siguiente ecuación de los pronósticos

$$P_{t+T} = a_t' + b_t\, T \tag{11}$$

MODELO DE BROWN DE SUAVIZACION EXPONENCIAL DE UN PARAMETRO

El modelo de Brown es similar al de los promedios móviles. Debido a que tanto la suavización exponencial simple como la doble rezagan los datos reales cuando existe una tendencia, se le puede agregar la diferencia entre los valores de suavización simple y doble a los valores de la suavización simple para ajustarles la tendencia. Así, las ecuaciones del modelo de Brown son:

$$S_t' = \alpha X_t + (1-\alpha)\, S_{t-1}' \tag{12}$$

$$S''_t = \alpha S_t^{\alpha} + (1-\alpha)\, S''_{t-1} \tag{13}$$

donde S´representa los valores de la suavización simple y S'' los de la suavización doble.

$$a_t = S_t' + (S_t' - S''_t) = 2S_t' - S''_t \tag{14}$$

$$b_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_t' - S''_t) \tag{15}$$

$$P_{t+m} = a_t + b_t m \tag{16}$$

donde m es el número de períodos por pronosticar.

Brown ha demostrado que la respuesta constante de una suavización exponencial a una función en forma de "rampa" $P_t = t$, tiene un rezago de tiempo constante β/α donde $\beta = (1-\alpha)$.

Si los datos siguen el modelo lineal $P_t = a + bt$, los datos suavizados exponencialmente darán: $P_t = \alpha D_t + \beta P_{t-1}$ si el modelo exponencial es simple y $P_t = a + b \frac{\beta}{\alpha} + bt$ restando el rezago. Estos datos suavizados caerán sobre una línea paralela a la línea formada por los datos originales pero se rezagarán en el tiempo en un valor de β/α.

Los siguientes datos se refieren a las ventas mensuales del artículo XX a las cuales se les va a aplicar el modelo de Brown. La constante de suavización será aquí $\alpha = 0{,}2$.

Los cálculos de la TABLA 2 sirven para obtener el pronóstico de un período hacia adelante. Por ejemplo, el pronóstico para el período 6 en el período 5 es:

$$P_6 = a_5 + b_5(1) = 375{,}7 + 9{,}43\,(1) = 385$$

donde $a_5 = 2S_5' - S_5'' = 375{,}7$

$$b_5 = (0{,}2/0{,}8)\,(S_5' - S_5'') = 0{,}25 \times 37{,}7 = 9{,}43$$

El pronóstico para el período 6 será:

$$P_6 = a_6 + b_6\,(1) = 394{,}5 + 10{,}48 = 405$$

El pronóstico para el período 7 será:

$$P_7 = a_6 + b_6\,(2) = 394{,}5 + 10{,}48 \times 2 = 415$$

y el pronóstico para el período 15 será:

$$P_{15} = a_6 + b_6\,(9) = 394{,}5 + 10{,}48 \times 9 = 489$$

puesto que los datos disponibles más recientes son del período 6.

Al aplicar las fómulas para hallar los valores S_{t-1}' y S_{t-1}'' se deben conocer los valores iniciales. Sinembargo cuando $t = 1$ no existen éstos; por lo tanto se deben especificar al principio de la utilización de este método. Esto puede obviarse igualando S_1' y S_1'' con X_1 o usando un promedio de unos cuantos valores iniciales como un punto de partida.

MODELO DE HOLT DE SUAVIZACION EXPONENCIAL DE DOS PARAMETROS

El modelo de Holt es en principio semejante al de Brown excepto en que no aplica la suavización exponencial doble sino que suaviza directamente los valores de la tendencia. Esto da mucha flexibilidad puesto que permite suavizar la tendencia con un parámetro diferente al usado en la serie original. Para obtener los pronósticos con el modelo de Holt se tienen en cuenta dos constantes de suavización y las siguientes tres ecuaciones:

$$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\,(S_{t-1} + b_{t-1}) \tag{17}$$

$$b_t = \gamma\,(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)\,b_{t-1} \tag{18}$$

$$P_{t+m} = S_t + b_t m \tag{19}$$

La ecuación (17) le ajusta directamente la tendencia, b_{t-1}, del período previo a S_t, sumándoselo al último valor suavizado S_{t-1}. Esto elimina el rezago y lleva a S_t a un valor aproximado de la observación correspondiente. La ecuación (18) actualiza la tendencia expresada como la diferencia entre los dos últimos valores suavizados. Esto es aproximado porque si hay una tendencia en los datos, los nuevos deben ser mayores o menores que los anteriores. Puesto que es posible la existencia de alguna aleatoriedad remanente, ésta se puede eliminar suavizando con γ la tendencia en el último período $(S_t - S_{t-1})$ y sumándosela a la estimación previa de la tendencia multiplicada por $(1-\gamma)$. Así, la ecuación (18) es similar a las formas básicas de la suavización simple pero teniendo en cuenta la actualización de la tendencia.

La tabla de datos para aplicar el modelo de Holt se compone de las siguientes columnas: (1) períodos; (2) observaciones; (3) los datos suavizados; (4) la tendencia suavizada y (5) el pronóstico rezagado 1 mes.

TABLA 2. Pronósticos de Ventas usando el Modelo de Brown

Períodos	Ventas	Suavización Exponencial Simple	Suavización Exponencial Doble	Valor de a	Valor de b	Pronóstico rezagado 1 Período
1	278,4	278,4	278,4	—	—	—
2	279	278,5	278,4	278,6	0,025	—
3	404	303,6	283,4	323,8	5,05	279
4	389	320,7	290,9	350,5	7,45	329
5	407	338,0	300,3	375,7	9,43	358
6	411	352,6	310,7	394,5	10,48	385
7	—	—	—	—	—	405

MODELO DE SUAVIZACION EXPONENCIAL LINEAL Y ESTACIONAL DE WINTERS

El modelo de Winters se basa en tres ecuaciones, cada una de las cuales suaviza un parámetro asociado con cada una de las tres componentes del modelo: estacionaridad (cuando la serie oscila alrededor de una media constante y por lo tanto no tiene tendencia), linealidad y estacionalidad. Desde este punto de vista es muy semejante al modelo de Holt pero incluye tres constantes y una ecuación adicional que se refiere a la estacionalidad. Las ecuaciones básicas del modelo de Winters cuyas constantes tienen valores comprendidos entre cero y uno, son:

$$S_t = \alpha \frac{X_t}{I_{t-L}} + (1-\alpha)\,(S_{t-1} + b_{t-1}) \qquad (20)$$

$$b_t = \gamma\,(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)\,b_{t-1} \qquad (21)$$

$$I_t = \beta \frac{X_t}{S_t} + (1-\beta)\,I_{t-L} \qquad (22)$$

donde L es la longitud de la estacionalidad (por ejemplo número de meses o trimestres por año) e I es el factor de ajuste estacional.

La ecuación (22) es parecida al índice estacional que se obtiene al dividir los valores observados por el valor suavizado correspondiente de la serie, S_t. Es importante saber que los valores suavizados no incluyen estacionalidad. Sinembargo los datos sí la contienen y además incluyen la aleatoriedad de la serie. Para suavizar la aleatoriedad, la ecuación (22) pondera con β el nuevo factor estacional calculado y al número estacional más reciente correspondiente a la misma estación con $(1-\beta)$.

La ecuación (21) es la misma (18) de Holt para suavizar la tendencia. La ecuación (20) difiere ligeramente de la ecuación (17) de Holt que en ésta el primer término se divide por el número estacional I_{t-L}. Esto se hace para eliminar las fluctuaciones estacionales de las observaciones, X_t. Finalmente, el pronóstico basado en el modelo de Winters se obtiene por medio de

$$P_{t+m} = (S_t + b_t m)\,I_{t-L+m}$$

La tabla de datos para aplicar el modelo de Winters se dispone de la siguiente manera: (1) períodos; (2) observaciones; (3) suavización simple (4) suavización estacional (5) suavización de tendencia y (6) pronóstico rezagado un mes o un período.

BIBLIOGRAFIA

[1] Browm, Robert Goodell, "Smoothing, Forcasting and Prediction of Discrete Time Series", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1963.

[2] D'Esopo, D. A. 1961, "A note of Forcasting by Exponential Smoothing Operator" Operations Research, Vol. 9 (5) pp. 667 - 86.

[3] Magee, J. F. 1958, "Production Planning and Inventory Control", New York: Mc Graw Hill.

[4] Wheelwright, Steven C., and Spyros Makridakis. "Forcasting Methods for Management", Wiley Interscience, New York, 1973.

[5] - - - - - - -, - - - - - - - "Forcasting Methods and Applications", John Willey and Sons, 1978.