

Evaluación del modelo de cálculo de un elemento de máquina por medio de deformímetros resistivos

Por: Carlos Enríquez G.*

RESUMEN

En el diseño y construcción de elementos de máquinas, es importante contar con modelos teóricos relativamente simples que permitan dimensionar, comprobar resistencia, o deformación o buscar formas más adecuadas de las piezas de máquinas. Sin embargo, estos modelos teóricos, para poderlos aplicar de una manera confiable, requieren ser evaluados comparando los resultados que predicen, con el comportamiento real de la pieza, el cual debe ser establecido por medio de una serie de ensayos para determinar el valor de los esfuerzos y deformaciones reales que soporta.

En este artículo se presenta un procedimiento experimental utilizando deformímetros resistivos para medir las deformaciones sufridas por un elemento en un punto determinado de su superficie, calcular el esfuerzo correspondiente y comparar este valor con el valor previsto por un modelo de cálculo previamente establecido.

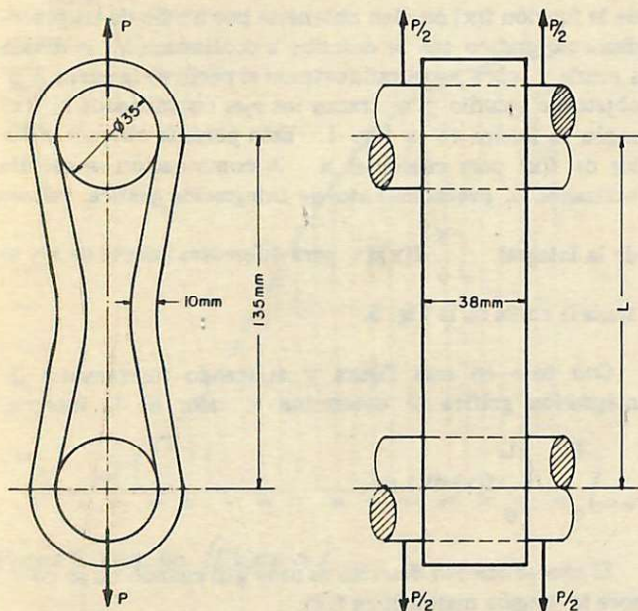


Figura 1. Forma y dimensiones de la pieza objeto de estudio.

* Profesor Sección Diseño de Maquinaria
Especialización: Análisis Experimental de Esfuerzos
Departamento de Tecnología Mecánica
Facultad de Minas, Universidad Nacional

Por lo tanto, no se hará ningún análisis de error ni de resultados, enfocando la atención al procedimiento.

Se supone, de igual manera, que el lector está familiarizado con las técnicas de análisis experimental de esfuerzos por medio de deformímetros resistivos (Strain Gage).

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la Fig. 1 se ilustra la forma y dimensiones del elemento real objeto del estudio, el cual, de ahora en adelante, se denominará ESLABON.

Se trata de establecer y evaluar un modelo de cálculo para dicho elemento, cuando éste es sometido a la acción de una fuerza de tracción P .

La fuerza de tracción sobre el eslabón se aplica mediante dos pasadores, alojados en sus extremos y montados sobre el dispositivo de ensayo que se describe en la Fig. 2.

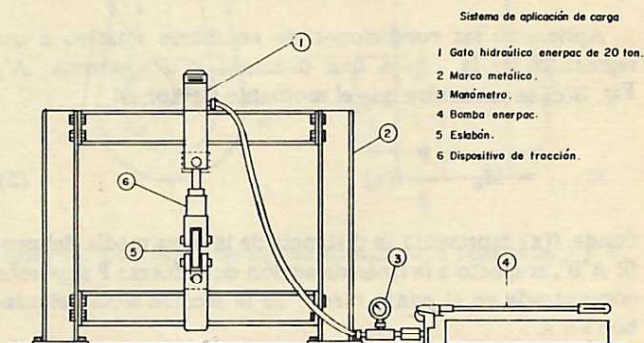


Figura 2. Sistema de aplicación de cargas.

3 MODELO TEORICO

Para establecer el modelo teórico, se supone que el eslabón es perfectamente simétrico, de material continuo y homogéneo y que la carga se reparte uniformemente sobre la superficie de contacto entre el eslabón y el pasador.

Para obtener una relación que permita calcular los esfuerzos en un punto cualquiera comprendido en las zonas curvas A.B o A'B', Fig. 3(a), se propone el modelo teórico representado en la Fig.3.

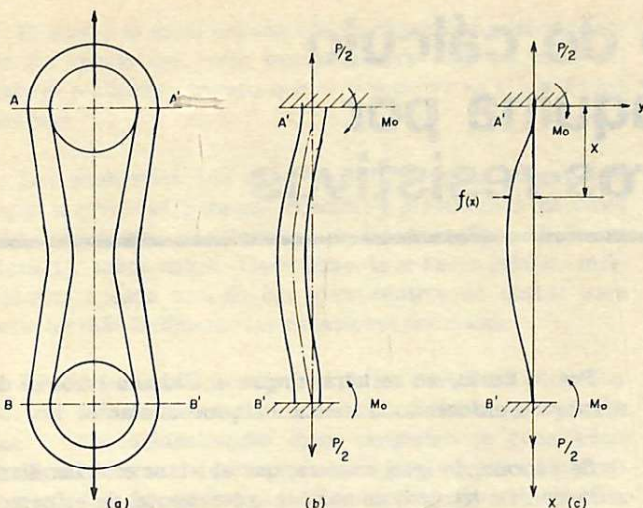


Figura 3. Modelo teórico del eslabón.

Este modelo reduce la zona A'B' de la pieza a un elemento curvo, supuestamente empotrado en los extremos y sujeto a una fuerza de tracción $P/2$ y a un momento flector M_o actuando en los extremos.

De la teoría de flexión de vigas, se tiene que:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}, \quad \frac{dy}{dx} = \theta \quad (1)$$

donde: Y y θ son la flecha y la pendiente de la viga respectivamente.

Aplicando las condiciones de equilibrio estático a un segmento de la viga a una distancia x del extremo A', Fig. 3(c) se encuentra que el momento flector es:

$$M_{(x)} = M_o - \frac{P}{2}f(x) \quad (2)$$

donde $f(x)$ representa la distancia de la línea media del perfil A'B', respecto a la línea de acción de la fuerza P supuesta concentrada en el punto medio de la sección recta del eslabón en A'.

Combinando las ecuaciones (1) y (2), se tiene:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_o + \frac{P}{2}f(x) \quad (3)$$

integrando una vez esta expresión entre cero y x , se tiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = -M_o x + \frac{P}{2} \int_0^x f(x) dx + C_1 \quad (4)$$

donde C_1 es una constante de integración, cuya magnitud

se determina aplicando las siguientes condiciones de límite:

$$\text{Cuando } x = 0 \quad \frac{dy}{dx} = 0, \text{ además la } \int_0^{x=0} f(x) dx = 0$$

Por lo tanto $C_1 = 0$.

Integrando la ecuación (4) se obtiene:

$$YEI = \frac{-M_o x^2}{2} + \frac{P}{2} \int_0^x \left[\int_0^x f(x) dx \right] dx + C_2 \quad (5)$$

C_2 es nuevamente una constante de integración. Aplicando condiciones de límite, se encuentra que $C_2 = 0$ considerando que $Y = 0$ para $X = L$, reemplazando en la ecuación (5) y resolviendo para M_o se obtiene:

$$M_o = \frac{P}{L^2} \int_0^L \int_0^L f(x) dx \cdot dx \quad (6)$$

reemplazando la expresión (6) en la ecuación (2) se obtiene una expresión general para el momento flector $M_{(x)}$:

$$M_{(x)} = \frac{P}{L^2} \int_0^L \left[\int_0^L f(x) dx \right] dx - \frac{P}{2} f(x) \quad (7)$$

El valor de la doble integral $\int_0^L \int_0^L f(x) \cdot dx \cdot dx$ y el valor

de la función $f(x)$ pueden obtenerse por medio de un procedimiento gráfico que se describe a continuación: se dibuja a escala y sobre papel milimetrado el perfil de la curva A'B' objeto de estudio y se trazan los ejes coordenados x , $f(x)$ según se ilustra en la Fig. 4. Esto permite obtener el valor de $f(x)$ para cualquier x . A continuación se calcula utilizando el procedimiento de integración gráfica, valores

de la integral $\int_0^x f(x) dx$ para diferentes valores de x y se

traza la curva de la Fig. 5.

Con base en esta figura y aplicando nuevamente la integración gráfica se determina el valor de la integral

$$\int_0^L \int_0^L f(x) dx \cdot dx$$

El procedimiento descrito es muy útil cuando no se conoce la función matemática $f(x)$.

La ecuación (7) se puede entonces escribir como:

$$M_{(x)} = \frac{P}{L^2} \cdot s - \frac{P}{2} f(x) \quad (8)$$

$$\text{donde } S = \int_0^L \int_0^L f(x) \cdot dx \cdot dx$$

Los esfuerzos inducidos en la sección a la distancia x del extremo A' son:

$$\tau_x = \frac{P}{2A} \pm \frac{M(x)h}{2I} \quad (9)$$

donde:

el primer término representa al esfuerzo de tracción inducido por la fuerza P y el segundo término de la ecuación, el esfuerzo de flexión. Aquí se supuso que el tramo $A'B'$ se comporta como una viga recta, ya que la relación altura a radio de curvatura es menor que 0.1.

En la expresión anterior: A , h e I son el área, la altura y el momento de Inercia de la sección recta considerada.

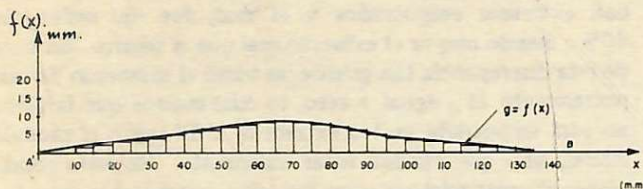


Figura 4. Perfil de la línea media $A'B'$ del eslabón. Función $f(x)$, vs. X .

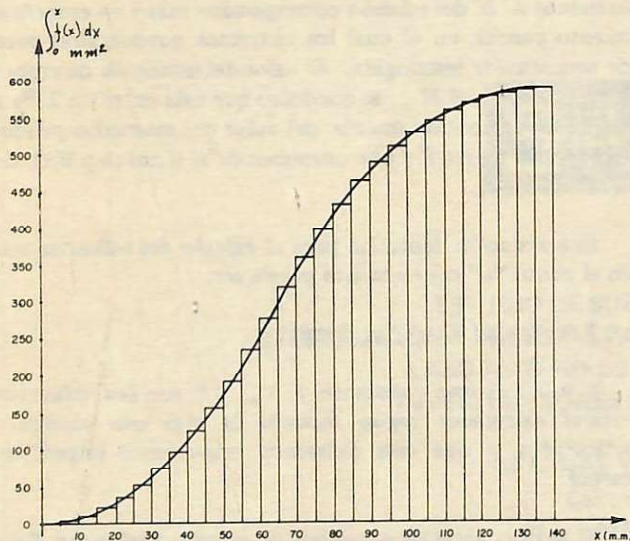


Figura 5. Función $\int f(x)dx$ vs x

4 VERIFICACION EXPERIMENTAL DE LA VALIDEZ DEL MODELO DE CALCULO

Para establecer la validez de la ecuación (9) de cálculo del esfuerzo en un punto cualquiera del tramo $A'B'$, se

procedió a medir la deformación de la pieza instalando un sistema de dos deformímetros resistivos (Strain gage) en la sección situada en la mitad de la longitud entre los puntos A' y B' . Fig. 6.

Con esta deformación medida, se puede establecer el valor real del esfuerzo en ese punto. Este valor se compara entonces con el valor dado aplicando la ecuación teórica (9) establecida.

Sin embargo, como la discrepancia mayor entre los valores reales y teórico del esfuerzo se deberá sobre todo al valor calculado para el esfuerzo de flexión, es conveniente poder establecer experimentalmente cuál es el valor del esfuerzo de flexión y cuál el del esfuerzo de tracción..

Estos esfuerzos pueden a su vez ser comparados con sus respectivos valores teóricos calculados por la ecuación (9).

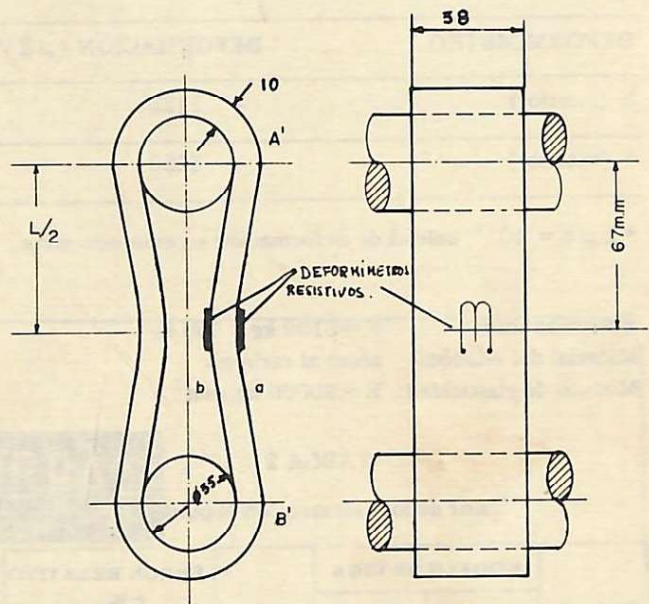


Figura 6. Ubicación de los deformímetros resistivos a y b.

Volviendo a la Fig. 6, se observa que cada deformímetro resistivo mide una deformación total ϵ_a y ϵ_b donde:

$$\epsilon_a = \epsilon_m + \epsilon_N$$

$$\epsilon_b = -\epsilon_m + \epsilon_N$$

ϵ_M = deformación debida al efecto de flexión

ϵ_N = deformación debida al efecto de tracción

Si sumamos o restamos las deformaciones medidas ϵ_a y ϵ_b se obtiene el valor de la deformación correspondiente al esfuerzo de tracción y la deformación correspondiente al efecto de flexión respectivamente, o sea:

$$\begin{aligned}\epsilon_a + \epsilon_b &= 2 \epsilon_N \text{ ó } \epsilon_N = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b}{2} \\ \epsilon_a - \epsilon_b &= 2 \epsilon_M \text{ ó } \epsilon_M = \frac{\epsilon_a - \epsilon_b}{2}\end{aligned}\quad (10)$$

Estos valores de deformación permiten determinar el valor del esfuerzo de tracción τ_N y el de flexión τ_M reales aplicando la Ley de Hooke $\tau = E \epsilon$.

Los valores de deformación medida y los resultados obtenidos en un primer ensayo, se dan en las Tablas 1 y 2 respectivamente.

TABLA 1

Deformación medida en los puntos interior y exterior.
Datos

DEFORMIMETRO	DEFORMACION ($\mu\epsilon$)*
b (interior)	- 1125
a (exterior)	2230

* $1 \mu\epsilon = 10^{-6}$ unidad de deformación en extensometría.

Fuerza aplicada: $F = 6100 \text{ kg} \pm 150 \text{ kg}$
Material del eslabón: acero al carbono
Módulo de elasticidad: $E = 20000 \text{ kg/mm}^2$

TABLA 2

Valor de los esfuerzos en el punto a

Esfuerzo τ	MODELO DE VIGA		Valor Medido, Kg/mm ²	ERROR RELATIVO e %	
	Extremos Empotrados. Kg/mm ²	Extremos Articula-dos. Kg/mm ²		Extremos Empotrados.	Extremos Articula-dos.
τ_M	20	43.3	33.5	40	30
τ_N	8	8	11	27	27
τ	28	51.3	43.5	36	18

En la Tabla 2, el error se calculó respecto al valor medido.

τ_M = esfuerzo de flexión

τ_N = esfuerzo debido a la fuerza de tracción

τ = esfuerzo total.

En el cálculo de estos errores relativos no se tuvo en cuenta el error de medición de los instrumentos ni ningún otro tipo de error cometido y son valores que dan un orden de magnitud solamente.

5 CONCLUSION

La evaluación del modelo de cálculo propuesto requiere un análisis de error cometido, tanto en los cálculos realizados como en los valores medidos. Dependiendo de esta discrepancia y del error relativo entre los valores reales y teóricos del esfuerzo, se podrá concluir si el modelo es adecuado o si, por el contrario, es necesario desecharlo definitivamente o, si es necesario corregirlo introduciendo en las ecuaciones resultantes, efectos que inicialmente no se consideraron y que aparecen en los resultados de los ensayos.

Como el objetivo del artículo se centró, sobre todo en plantear un procedimiento de aplicación de la extensometría por medio de deformímetros resistivos en la evaluación de modelos de cálculo de elementos de máquinas, aquí no se hará un análisis más profundo del caso que se ha descrito como ejemplo de aplicación.

En el ensayo descrito se encontró que el error relativo entre el esfuerzo de flexión teórico en el modelo de viga con extremos empotrados y el real, fue del orden del 40%. Siendo mayor el esfuerzo real que el teórico. En vista de esta discrepancia tan grande, se tomó el momento de empotramiento M_o igual a cero, lo cual supone que la pieza no está empotrada en los extremos A' B' según el modelo inicial, sino que pueden rotar libremente. En estas condiciones el error relativo entre los esfuerzos real y teórico fue de 30%, siendo ahora mayor el esfuerzo teórico que el real.

Como es de esperarse, las condiciones de apoyo de los extremos A' B' del eslabón corresponden más a un empotramiento parcial, en el cual los extremos pueden girar pero de una manera restringida. El valor del momento de empotramiento parcial M_o , se encontró que está entre un 23% a un 30% aproximadamente del valor del momento producido por la fuerza P y que corresponde al término $p.f(x)$ de la ecuación (8).

Una ecuación tentativa para el cálculo del esfuerzo real en el punto "a" del elemento puede ser:

$$\tau \approx \tau_o - k (\tau_o - \tau^*), \text{ donde:}$$

$k = 0.3$ es una constante y τ_o , τ^* son los esfuerzos totales calculados según modelo de viga con extremos articulados y viga con extremos empotrados respectivamente.

El análisis anterior es apenas un estudio preliminar. Esto significa que para llegar a plantear un modelo de cálculo definitivo, es necesario realizar más ensayos para determinar la influencia de los errores de forma, de construcción de la pieza y la relación entre sus diferentes dimensiones, en el valor de los esfuerzos.

Sin embargo, los resultados que se acaban de presentar, son ya útiles en el diseño de elementos de máquinas que tengan formas similares al eslabón y los cuales requieren, en muchos casos, definir tentativamente sus dimensiones

aproximadas con el fin de establecer su tamaño con respecto a otros elementos de un conjunto mecánico a los que puede estar conectado. En esta situación un modelo aproximado de cálculo como el que se presentó considerando el momento de empotramiento $M_o = 0$, puede ser aplicado teniendo en cuenta que el esfuerzo de flexión calculado es un 30% mayor que el real.

BIBLIOGRAFIA

- AVRIL, J. Enciclopedia Vishay d'Analyse des Contraintes. (Enciclopedia Vishay de Análisis de Esfuerzos). Malakoff, Vishay Micro-mesures.
- ENRIQUEZ, C. Análisis Experimental de Esfuerzos (Tensometría por medio de galgas de deformación). Departamento de Tecnología Mecánica, Universidad Nacional, Medellín. 1980.
- PERRY, C., LISSNER, H. The Strain Gage Primer. (Fundamentos de los deformímetros resistivos). 2a. Ed., Nueva York, Mc.Graw Hill, 1962.



ESTUDIO DE SUELOS Y FUNDACIONES
INVESTIGACION Y ASESORIA PARA MATERIALES DE CONSTRUCCION
LABORATORIO DE CONCRETO Y ASFALTO
INVESTIGACIONES GEOLOGICAS Y MINERAS

OFICINAS Y LABORATORIOS
Calle 51 No. 70-25
MEDELLIN

TELEFONOS:
Depto. de Campo 234 51 01; Laboratorio 234 54 41
Gerencia 234 54 80; Depto. Técnico 234 54 21

Afiliado a Camacol