

# Análisis modal de estructuras planas reticulares, por medio del grado de empotramiento

Por: Gabriel García Moreno\*

## INTRODUCCION

El desplazamiento lateral,  $\Delta$ , de una viga - columna, Fig. 1, que tiene sus extremos parcialmente restringidos por grados de empotramiento  $f_A^0$ ,  $f_B^0$ , ha sido estudiado en las referencias (1), (2), (3), (4), y su valor se puede representar aproximadamente por medio de la ec. (1)

$$\Delta = \frac{Vh^2}{12\lambda} \quad (1)$$

donde <sup>2, 4</sup>

$$V = V_B = -V_A = -\frac{M_A + M_B}{h} \quad (2)$$

$$\lambda = K \partial \quad (3)$$

$$\partial = \frac{f_A^0(2+f_B^0)(4-f_A^0) + f_B^0(2+f_A^0)(4-f_B^0)}{2(4-f_A^0)(4-f_B^0)} \quad (4)$$

El valor de (1) tiene una aproximación muy buena al verdadero valor, siempre que el punto de inflexión (0 en la Fig. 1), se encuentre comprendido entre los apoyos A y B. En este caso su localización con respecto, vg al punto A, se da por la expresión <sup>3,4</sup>

$$AO = \beta_{AB} \frac{h}{2} \quad (5)$$

donde <sup>3, 4</sup>

$$\beta_{AB} = \frac{2[f_A^0 f_B^0(4-f_B^0) + 2f_A^0(4-f_A^0)]}{f_A^0(2+f_B^0)(4-f_A^0) + f_B^0(2+f_A^0)(4-f_B^0)} \quad (6)$$

Siempre que esto suceda, el pilar se encontrará flexionado en dos curvaturas, excepto en los casos límites: cuando el PI coincida con uno de los dos extremos, A ó B. Llamaremos a esta forma de desplazamiento lateral, configuración o modo de cortante. (Shear Mode, en inglés). Cuando el PI se encuentra fuera del tramo, el pilar se deforma en una sola curvatura y este caso lo denominaremos, modo de flexión (Bending Mode, en inglés). En este caso las expresiones (4), (5), (6) no son buenas aproximaciones y hay necesidad de corregir los resultados <sup>2,3,4</sup>

## ANALISIS

Consideremos a la estructura de la Fig. 2 (a) deformada lateralmente por las cargas  $V_n$ , y supongamos que la deformación de sus pilares se efectuó en el modo de cortante. La deformación lateral del nivel n, estará dada por la expresión: <sup>1,4</sup>

$$\Delta_n = \frac{V_n^t h_n^2}{12 \lambda_n} \quad (7)$$

donde

$\Delta_n$  = desplazamiento relativo del nivel n con respecto al nivel n-1.

$V_n^t = \sum_{n=N}^n V_n$  = cortante lateral total en el piso n

$h_n$  = altura del piso n

$\lambda_n = \sum_{i=1}^{i=m} K_i \partial_i$  = factor de rigidez lateral al desplazamiento lateral, para m pilares del nivel n

En general, la estructura reticular de la Fig 2-(a), puede esquematizarse como la estructura de la Fig. 2 (b), llamada "en cadena", donde  $M_n$  representa a la masa del nivel n y  $\lambda_n$  al factor de rigidez lateral total del mismo nivel.

La fórmula (7) es particularmente bien adaptada para su utilización en el método de Holzer, que como es bien sabido, es un proceso iterativo, por medio del cual, a partir de la suposición del desplazamiento lateral total,  $\mu_N$ , del piso N, el cual se supone igual a la unidad, se deducen los demás de arriba hacia abajo, variando las frecuencias.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8)$$

donde:

$\omega$  = velocidad circular del movimiento armónico equivalente.

f = frecuencia de vibración

T = período de vibración

Para el efecto, la ec. (7), se escribe más frecuentemente así:

$$\Delta_n = \frac{V_n^t}{K_n} \quad (9)$$

\* Profesor Emérito  
Jefe de Laboratorio de Ensayo de Materiales  
Facultad Nacional de Minas  
Universidad Nacional de Colombia  
Sede de Medellín



$$K_n = \frac{12\lambda_n}{h_n^2} = \text{rigidez lateral al desplazamiento lateral del nivel } n \quad (10)$$

El método se puede sintetizar así:

la fuerza inercial provocada por la vibración de velocidad angular  $\omega$ , en la masa  $M_N$  del último piso será:

$$F_N = V_N = \omega^2 M_N \mu_N \quad (11)$$

Se deduce que el desplazamiento relativo del nivel N, será de acuerdo con (9).

$$\Delta_N = \omega^2 M_N \mu_N / K_N \quad (12)$$

y el desplazamiento total del piso N-1:

$$\mu_{N-1} = \mu_N - \Delta_N \quad (13)$$

De donde la fuerza inercial del nivel N-1 será

$$F_{N-1} = \omega^2 M_{N-1} \mu_{N-1} \quad (14)$$

Se puede, entonces, calcular el esfuerzo cortante acumulado para el nivel N-1:

$$V_{N-1} = V_N + F_{N-1} \quad (15)$$

y por medio de la ec. (9), se calcula el desplazamiento relativo  $\Delta_{N-1}$ :

$$\Delta_{N-1} = V_{N-1} / K_{N-1} \quad (16)$$

lo cual implica de nuevo:

$$\mu_{N-2} = \mu_{N-1} - \Delta_{N-1} \quad (17)$$

Se prosigue en esta forma, hasta encontrar el desplazamiento  $\mu_0$  en la base del sistema de masas en cadena.

Generalmente la iteración se inicia suponiendo un período de la forma  $T = 0,18 N$ . Como este valor no es la solución del período natural del sistema, se obtiene generalmente  $\mu_0 \neq 0$ . Si el período elegido, fuera el período real obtendríamos:  $\mu_0 = 0$ . Si el período inicial es mayor que el verdadero, se incrementa la velocidad  $\omega$  y se repite el proceso.

Cuando el desplazamiento  $\mu_0$  sea menor que una tolerancia aceptable e, muy pequeña, el proceso puede suspenderse y  $f = 1/T$  será la frecuencia fundamental requerida.

El vector de desplazamientos totales:  $\{\mu_n\}$ , asociado a esta última iteración, representará al primer modo de vibrar del sistema.

Para obtener el segundo modo de vibrar y los siguientes se continúa incrementando a  $\omega$  y se repite el proceso.

El método estudiado en el artículo anterior se programó en FORTRAN IV para un computador TI y en BASIC para una calculadora programable CASIO FX-702P. <sup>5</sup> Los resultados se compararon con la solución dada por el método de condensación estática, en el cual se consideraron dos grados de libertad por nudo: el desplazamiento lateral y la rotación, pero suponiendo nulo el vector de momentos aplicados en los nudos. Se despreció, además, la deformación causada por fuerza axial en los elementos del pórtico.

Los resultados obtenidos fueron excelentes en el cálculo de períodos fundamentales de pórticos hasta de cinco o seis pisos, teniendo en cuenta en el método del GDE (grado de empotramiento), las rigideces laterales (10) de los pilares. Pero para pórticos con un número de niveles mayor de seis pisos, los períodos dados por el GDE son más pequeños que los obtenidos por el método de condensación estática <sup>5</sup>.

Se hace necesario incorporar la condición de cortante cero <sup>\*</sup>, <sup>3,4</sup> reduciendo las rigideces de los pilares mediante el término  $m$  <sup>3,4</sup>

$$m = \frac{(2 + f_B^0)(4 - f_A^0) + (2 + f_A^0)(4 - f_B^0) f_B^0}{1,5(4 - f_A^0 f_B) f_B^0} \quad (18)$$

Pero como la flexibilización cambia los GDE, se hace necesario emplear un método de ensayo y error <sup>3,4</sup> Para simplificar el problema, se investigó en la referencia (5), la posibilidad de dividir las rigideces por un número arbitrario ZM, especificado como dato de entrada, número que se obtuvo por tanteos hasta obtener un divisor de las rigideces laterales reales, que igualara los períodos fundamentales del método de condensación estática y del G.D.E. En la Fig. 3, reproducida de la referencia (5) se da ZM contra el número de pisos, para el modo de cortante. Con este método, sin embargo, se hace necesario, todavía calcular los GDE y luego los factores  $\delta$ , dados por la ec. (4), para luego dividir por el ZM. El método, aunque muy preciso, es algo largo para su utilización en calculadoras eléctricas programables, como la CASIO FX-702P. Se procedió entonces, a examinar cuidadosamente los resultados de grupos de pórticos en los cuales se disminuyera gradualmente la sección de los pilares con la altura, cada dos, tres, o cuatro pisos y se constató que  $\delta$  tiene un valor alto para el primer piso, aproximadamente constante para los pisos intermedios y finalmente alto para los últimos tres o cuatro pisos.

Se tomó, en consecuencia un valor para el primer piso, otro para los intermedios y otro para los últimos tres pisos, se dividieron por el ZM correspondiente y se dedujo, entonces, unos factores de corrección,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , que se multiplican directamente por las rigideces dadas por la fórmula (19)

$$K'_n = \frac{12}{h_n^3} \sum_{i=1}^{i=m} EI_i \text{ para } m \text{ pilares del nivel } n \quad (19)$$

\* Esta condición ha sido la base fundamental de la deducción de la fórmula (1) <sup>3,4</sup>



para obtener las rigideces laterales  $K_n$  de la fórmula (10):

$$K_n = \alpha_i K'_n \quad i = 1, 2, 3 \text{ según sea el nivel} \quad (10)$$

En esta forma se puede aplicar directamente el método de Holzer, sin tener que calcular previamente, los GDE. En la tabla I, extraída de la referencia (5), damos los valores  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , junto con los  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  y ZM correspondientes.

TABLA I

FACTORES DE CORRECCION PARA RIGIDECES  
LATERALES DE LOS PISOS DE PORTICOS PLANOS.  
MODO CORTANTE

No. de pisos	$\partial_1$	$\partial_2$	$\partial_3$	ZM	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\bar{\alpha}$
3	0,78	0,56	0,56	1,95	0,40	0,29	0,29	0,33
5	0,78	0,61	0,65	2,10	0,37	0,29	0,31	0,32
7	0,79	0,61	0,71	2,25	0,35	0,27	0,32	0,31
10	0,78	0,63	0,74	2,77	0,28	0,23	0,27	0,26
15	0,78	0,64	0,77	3,43	0,23	0,19	0,22	0,21
20	0,77	0,65	0,78	3,79	0,20	0,17	0,21	0,19
25	0,77	0,66	0,78	3,94	0,20	0,17	0,20	0,19

En la última columna se dan los promedios de los  $\alpha_i$ ; se puede utilizar para todos los pisos, pero, obviamente, se pierde algo más la precisión.

APLICACION DE LA METODOLOGIA<sup>5</sup>

Se consideraron siete pórticos regulares, simétricos, de una luz y para dos relaciones de rigideces entre vigas y pilares, es decir, 14 casos en total. Los pórticos se escogieron de 3, 5, 7, 10, 15, 20, y 25 pisos, con lo cual se buscaba abarcar un buen número de alturas usuales. Se trató de que la relación (o relaciones) de rigideces fuese típica del modo de cortante.

Este modo se manifiesta en aquellos pórticos, en los cuales la relación de rigideces viga/columna se mantiene  $> 1$ , o cercanamente por debajo de uno.

Cada uno de los siete pórticos se calculó así:

Caso 1<sup>o</sup>). Un ensayo con el programa del GDE dividiendo las rigideces por el término m.

Caso 2<sup>o</sup>). Un ensayo con el programa de condensación estática, con propósitos comparativos.

Caso 3<sup>o</sup>). Varios ensayos para determinar por tanteo y error el valor de ZM, en tal forma que se obtenga el mismo período obtenido por condensación estática.

En la Fig. 4 se muestra el pórtico correspondiente a 20 pisos, y en la Fig. 5 mostramos los períodos obtenidos, y su variación con el número de pisos para el primer caso: GDE con flexibilización mediante términos m (curva A) y para

el segundo caso: condensación estática. El resultado también lo presentamos en la TABLA II, también extraída de la referencia (5).

TABLA II  
PERIODO FUNDAMENTAL VS. NUMERO DE PISOS

MODO CORTANTE

Número de pisos	GDE seg.	Condensación Estática seg.
3	1,01	0,75
5	1,21	0,92
7	1,66	1,30
10	2,11	1,80
15	2,84	2,65
20	3,62	3,52
25	4,51	4,45

La aproximación de GDE mejora a medida que aumenta el No. de pisos. La mayor diferencia se presenta para tres pisos: 35% por exceso. Para 25 pisos la diferencia se reduce a 1,3% también por exceso.

La Fig. 5, y la TABLA II se presentan como un ejemplo de la excelente correlación del método del GDE con el de condensación estática, tomado este como patrón. No se pretende con ellas dar una correlación entre el número de pisos y el período fundamental para todo tipo de pórticos, pues éste depende principalmente del valor absoluto de las rigideces laterales de los elementos en cadena. En estos ejemplos se han tomado pórticos un poco flexibles con el fin de hacer destacar la correlación de los dos métodos.

Como los pórticos analizados son regulares, simétricos y de una luz, se quiso someter a prueba la bondad de los procedimientos propuestos y se sometió a estudio el pórtico asimétrico de seis pisos y tres crujiás mostrado en la Fig. 6. Se empleó el método del divisor ZM, obtenido éste, de la TABLA II.

Se empleó  $ZM = 2,1$  como valor para flexibilizar el pórtico.

Se calcularon los dos primeros modos de vibrar y los períodos correspondientes. El período obtenido para el primer modo de vibrar por el método del GDE fue:  $T_1 = 1,29$  seg. El resultado del programa de condensación estática fue:  $T_1 = 1,17$  seg.

La diferencia es del 10%, muy pequeña para el propósito del diseño de estructuras sometidas a cargas laterales. La estimación de éstas envuelve generalmente incertidumbres que son mayores del 10%.

CONCLUSIONES

El método propuesto basado en el GDE es un método rápido, fácil de programar en calculadoras programables, y en minicomputadoras, y es suficientemente exacto para ser tenido en cuenta en los diseños modales corrientes de edificios de hormigón armado. Proporciona una base excelente para calcular los períodos de vibración, los cuales se aproximan muy mal por las fórmulas dadas en los códigos.







REFERENCIAS

1. García Gabriel. "RESPUESTA DE LAS ESTRUCTURAS PLANAS RETICULARES SOMETIDAS A CARGAS LATERALES APLICADAS EN LOS NUDOS ESTUDIADA POR EL METODO DEL GRADO DE EMPOTRAMIENTO" XXI Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural. Anais. Rio de Janeiro, Brasil 1981.
2. García Gabriel. "ELASTIC LATERAL INSTABILITY OF COLUMNS STUDIED BY THE DEGREE OF FIXITY METHOD (P - Δ EFFECT)" A. C. I. Jnl. Proceedings, V-78, No. 5, Sept-Oct 1981, pp 358-368
3. García Gabriel "RAPID EVALUATION FOR BENDING MOMENTS IN A RETICULATED PLANE FRAME" A. C. I. Jnl. Proceedings, V. 80, No. 1, Jan-Feb. 1983, pp 40-48
4. García Gabriel "LA DISTRIBUCION DE MOMENTOS POR EL METODO DEL GRADO DE EMPOTRAMIENTO". G. García Medellín - Col., 1981, 158 pp
5. Orozco C. Eduardo. "PROGRAMACION DEL METODO DEL GRADO DE EMPOTRAMIENTO EN CALCULADORAS ELECTRONICAS Y MINICOMPUTADORAS". Tesis de grado para optar el título de Ingo. civil de C. Eduardo Orozco, dirigida por Gabriel García. Facultad Nal. de Minas. U. Nal. de Colombia. Medellín 1983
6. Newmark Nathan "INTRODUCCION A LA INGENIERIA SISMICA" Conferencias en la U.C. de Venezuela, editadas por J. Marín. Caracas 1976 pp 30-190.

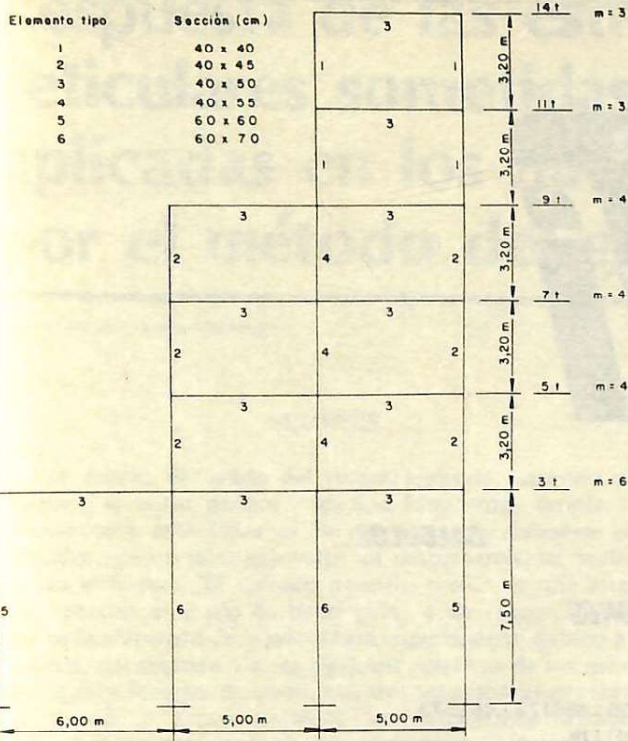
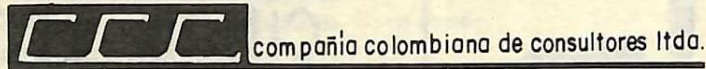


FIG 6

Pórtico asimétrico de seis pisos y tres crujeas.  
 Masas en  $\text{ton s}^{-2} \text{m}^{-1}$  (1ton = 9,8 KN)



# INGENIERIA CIVIL

Transversal 37 No. 71-22  
 Teléfonos: 2438880 - 2438881  
 2438882 - 2438883 - 2438884  
 Apartado Aéreo 50870  
 CABLES: "CONSULTORES"  
 Medellín - Colombia