

Respuesta de las estructuras planas reticulares sometidas a cargas laterales aplicadas en los nudos, estudiada por el método del grado de empotramiento

Por: Gabriel García Moreno*

SINOPSIS

Por medio del grado del empotramiento, sugerido por Shepley,² el autor deduce,¹ en una forma muy simple, los momentos y rotaciones de los extremos, parcialmente restringidos, de un pilar que sufre un desplazamiento relativo de sus extremos. El método permite medir en una forma muy precisa el grado de restricción, o de empotramiento que cada elemento de la estructura experimenta, debido a la posición geométrica y a las rigideces relativas de los miembros que la forman. Se crean, así, tres constantes estructurales γ , δ , β , en función de las cuales puede estudiarse todo el comportamiento de una estructura reticular sometida a cargas laterales aplicadas en los nudos. Adicionalmente, se estudia la determinación del grado de empotramiento de un pilar solidario con su zapata, en función del módulo de resistencia del suelo, obtenido en un ensayo de carga, y la rigidez modificada del suelo.

1) INTRODUCCION. ECUACIONES BASICAS

Este estudio forma parte del libro "LA DISTRIBUCION DE MOMENTOS POR EL METODO DEL GRADO DE EMPOTRAMIENTO"¹ que sigue la notación y método sugeridos por Shepley². En el libro se demuestra que si los grados de empotramiento de los extremos A, B, de un pilar, Fig. 1, se denominan f_A^0 y f_B^0 , respectivamente, con la hipótesis de que estos valores cumplan las relaciones

$$\begin{aligned} 1 &\geq f_A^0 \geq 0 \\ 1 &\geq f_B^0 \geq 0 \end{aligned}$$

(Si $f_i^0 = 0$, el extremo es una articulación. Si $f_i^0 = 1$ el extremo está empotrado y no rota)

* Profesor Emérito
Jefe del Laboratorio de Ensayo de Materiales
Facultad Nacional de Minas
Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

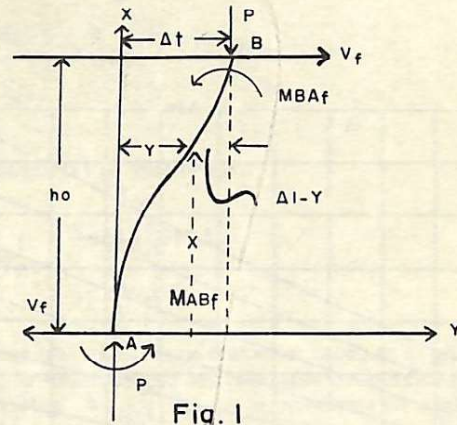


Fig. 1

y si además, se produce un desplazamiento relativo Δ entre los extremos del pilar, tal como se muestra igualmente en la Fig. 1, se produce en los extremos A, B, unos momentos M_{AB} , M_{BA} , que se pueden representar aproximadamente por las expresiones

$$\begin{aligned} M_{AB} &= -6K \phi \gamma_{AB} \\ M_{BA} &= -6K \phi \gamma_{BA} \end{aligned} \quad (1)$$

en donde

$$\gamma_{AB} = \frac{f_A^0 [f_B^0 (4 - f_B^0) + 2(4 - f_A^0)]}{(4 - f_A^0)(4 - f_B^0)} \quad (2)$$

$$\gamma_{BA} = \frac{f_B^0 [f_A^0 (4 - f_A^0) + 2(4 - f_B^0)]}{(4 - f_A^0)(4 - f_B^0)}$$

$$\phi = \frac{\Delta}{h}, \quad K = \frac{EI}{h}$$

Igualmente se demuestra que las rotaciones en los extremos A, B, se pueden dar aproximadamente por las ecs:

$$\theta_{AB} = \phi (1 - f_A^0) \left(1 + \frac{2f_B^0}{4 - f_A^0} \right) \quad (3)$$

$$\theta_{BA} = \phi (1 - f_B^0) \left(1 + \frac{2f_A^0}{4 - f_B^0} \right)$$

Los valores de γ_{AB} se dan por medio de la Fig. 2. Para obtener γ_{BA} de las curvas, basta con cambiar f_A^0 por f_B^0 y viceversa.

De la ec. (1) se obtiene las reacciones laterales.

$$V_{AB} = -V_{BA} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{h} = 6K \frac{\phi}{h} (\gamma_{AB} + \gamma_{BA}) = V_0 \quad (4)$$

Si llamamos

$$\partial_{AB} = \partial_{BA} = \partial = \frac{\gamma_{AB} + \gamma_{BA}}{2} \quad (5)$$

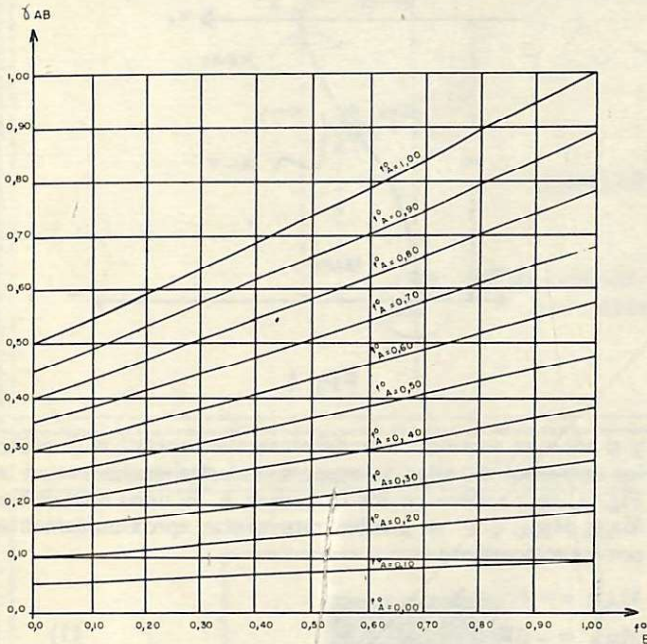


Fig. 2

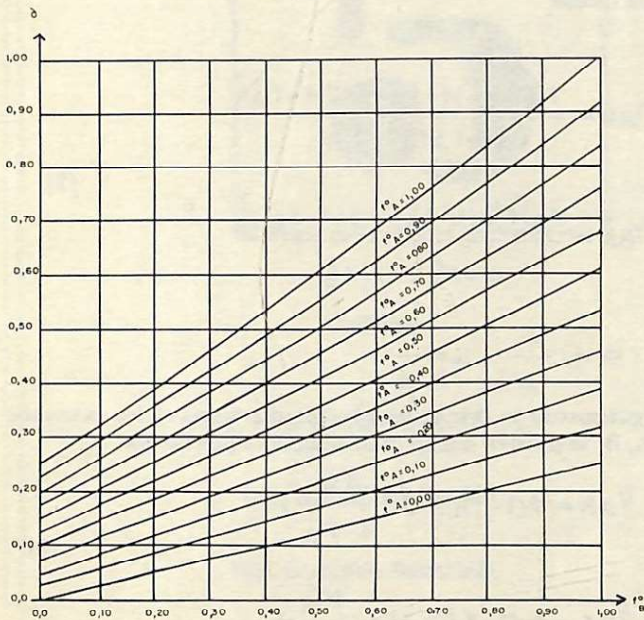


Fig. 3

Se puede reescribir a la ec. (4) así:

$$V_0 = 12K \frac{\Delta}{h^2} \partial = 12 \frac{\phi}{h} \partial \quad (6)$$

El valor de ∂ se da con las curvas de la Fig. 3 y su expresión algebraica es:

$$\partial = \frac{f_A^0 (2 + f_B^0) (4 - f_A^0) + f_B^0 (2 + f_A^0) (4 - f_B^0)}{2 (4 - f_B^0) (4 - f_A^0)} \quad (7)$$

2)

ANÁLISIS³

El estudio del artículo anterior, vamos a aplicarlo a este caso como sigue:

Consideremos al miembro AB, Fig. 4, que forma parte de una estructura plana reticular, sometida a las cargas laterales H_{n-1} , H_n , H_{n+1} aplicadas en los nudos:

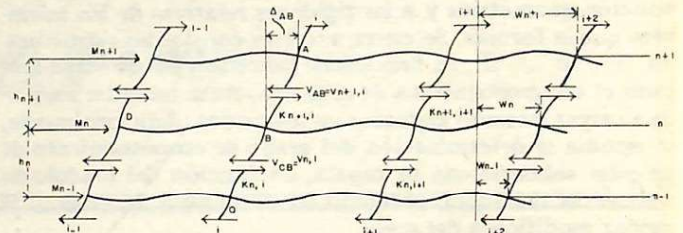


FIG. 4

Aplicando a este miembro la ec. (6), tendremos:

$$V_{AB} = V_{n+1,i} = 12 \Delta_{AB} \frac{K_{n+1,i}}{h_{n+1}^2} \partial_{n+1,i} \quad (a)$$

Como el desplazamiento lateral Δ_{AB} es el mismo para todas las columnas en un nivel de piso dado, el esfuerzo cortante total para el piso en consideración, $n+1$, será para las m columnas:

$$V_{n+1}^t = \sum_{i=1}^m V_{n+1,i} = \frac{12 \Delta_{AB}}{h_{n+1}^2} \sum_{i=1}^m K_{n+1,i} \partial_{n+1,i} \quad (b)$$

Si designamos

$$\lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^m K_{n+1,i} \partial_{n+1,i} \quad (8)$$

a la suma de los productos de las rigideces, de m columnas, por sus respectivos $\partial_{n+1,i}$, dados para cada columna por la expresión (7), podemos representar a la ec. (b), en una forma más simple: ec. (9).

$$V_{n+1}^t = \frac{12}{h_{n+1}^2} \lambda_{n+1} \Delta_{n+1} \quad (9)$$

donde se ha designado al desplazamiento relativo entre los niveles $n+1$ y n , como Δ_{n+1} ; se puede, entonces, establecer la siguiente relación:

$$\Delta_{AB} = \Delta_{n+1} = W_{n+1} - W_n \quad (10)$$

Para el nivel n , se puede escribir, igualmente,

$$V_n^t = \frac{12}{h_n^2} \lambda_n \Delta_n, \quad (11)$$

y del equilibrio estático del nudo D. Fig. 4, deducimos

$$H_n = V_n^t - V_{n+1}^t \quad (12)$$

En el caso de un entramado reticular de r niveles, se puede considerar al primer nivel $r=1$ como fijo. Esto implicaría, considerando las ecs. (10) y (12).

$$\begin{aligned} W_0 &= \Delta_0 = 0 \\ W_1 &= \Delta_1 \\ W_2 &= \Delta_2 + W_1 = \Delta_2 + \Delta_1 \\ W_3 &= \Delta_3 + W_2 = \Delta_3 + \Delta_2 + \Delta_1 \\ &\vdots \\ W_n &= \sum_{i=1}^n \Delta_i \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} V_r^t &= H_r^t \quad (\text{ya que } V_{r+1} = 0) \\ V_{r-1}^t &= H_{r-1} + V_r^t = H_{r-1} + H_r \\ V_{r-2}^t &= H_{r-2} + V_{r-1}^t = H_{r-2} + H_{r-1} + H_r \\ &\vdots \\ V_n &= H_n + V_{n+1} = \sum_{i=n}^r H_i \end{aligned} \quad (14)$$

Conociendo las cargas laterales H_n y la suma de las rigideces modificadas de las columnas, λ_n , dada por la expresión (8), se deduce, a partir del nivel superior, sucesivamente hacia abajo, el valor de los desplazamientos Δ_n , por medio de las ecs. (14):

$$\Delta_n = \frac{h_n^2}{12} \frac{V_n^t}{\lambda_n} = \frac{h_n^2}{12} \frac{\sum_{i=n}^r H_i}{\lambda_n} \quad (15)$$

Conociendo los desplazamientos relativos Δ_n , se encuentran los desplazamientos totales W_n , por medio de las fórmulas (13), y los momentos en las partes superior e inferior

de las columnas, similarmente, se deducen de las ecs. (1). Los esfuerzos cortantes dados por las ecs. (14), repartidos proporcionalmente a los productos $k_n \partial_n$, de cada pilar, completan la solución.

Como se ve, todo el proceso depende del conocimiento previo de los valores de $\partial_{n,i}$ dados por la ecuación (7). Para facilitar su determinación, damos en la Fig. 3 unos gráficos, en función de los grados de empotramiento f_A^0, f_B^0 , en los extremos del pilar, del valor de ∂ .

Por creerlo útil, vamos a reemplazar el valor de Δ_n dado por la ec. (15) en las ecs. (1), para obtener el momento en una columna, digamos: AB, Fig. 4. Se obtiene:

$$M_{AB} = -\frac{h_{n+1}}{2} V_{n+1}^t \frac{K_{n+1,i}}{\lambda_{n+1}} \gamma_{AB} \quad (16)$$

Como de la ec. (a) se deduce que:

$$V_{n+1,i}^t = V_{n+1}^t \frac{K_{n+1,i} \partial_{n+1,i}}{\lambda_{n+1}} \quad (17)$$

que significa que el esfuerzo cortante, total, en el piso, a nivel $n+1$, se distribuye en las columnas proporcionalmente a los productos $k_{n+1,i} \partial_{n+1,i}$ e inversamente a las sumatorias de los mismos productos en todo el piso: λ_{n+1} , se puede, entonces, reescribir a la ec. (16) en la forma:

$$M_{AB} = -\frac{h_{n+1}}{2} V_{n+1,i}^t \frac{\gamma_{AB}}{\partial_{n+1,i}} \quad (18)$$

Llamando

$$\beta_{AB} = \frac{\gamma_{AB}}{\partial_{n+1,i}} = \frac{\gamma_{AB}}{\partial_{AB}} \quad (c)$$

La ec. (18) queda en la siguiente forma:

$$M_{AB} = -\frac{h_{n+1}}{2} V_{n+1,i}^t \beta_{AB} \quad (18) - A$$

Reemplazando en la (c) los valores de γ_{AB} y ∂_{AB} dados por las ecs. (2) y (7), respectivamente, se obtiene el valor de β_{AB} en función de los grados de empotramiento de los extremos de la columna:

$$\beta_{AB} = \frac{2f_A^0 [f_B^0(4-f_B^0) + 2(4-f_A^0)]}{f_A^0(2+f_B^0)(4-f_A^0) + f_B^0(2+f_A^0)(4-f_B^0)} \quad (19)$$

En el gráfico de la Fig. (5) damos las curvas correspondientes de β_{AB} , en función de f_A^0 y f_B^0 .

Es bueno observar que el coeficiente β_{AB} , representa,

en la fórmula (18)—A, la corrección que habría que hacerle al momento M_{AB} , si éste se calculara suponiendo el punto de momento nulo en $h/2$, o sea, el punto de inflexión en la mitad de la altura del pilar. En otras palabras, puede considerarse que β_{AB} localiza correctamente al punto de inflexión. Cuando los grados de empotramiento son iguales arriba y abajo, puede verse de la Fig. (5) que $\beta_{AB} = 1$. En este caso, el punto de inflexión está estrictamente en la mitad de la altura. Si el nudo B es una articulación, $f_B = 0$ y $\beta_{AB} = 2$, para cualquier valor de f_A exceptuando el valor 0, en cuyo caso β_{AB} es indeterminado. Para $\beta_{AB} = 2$, el punto de inflexión coincide con la articulación en el punto B y el momento $M_{AB} = h_{n+1} V_{n+1}$, según la ec. (18)—A.

En la mayor parte de los edificios de hormigón armado, los grados de empotramiento, para los pisos intermedios se encuentran entre los valores de 0,35 a 0,65, en cuyo caso, los valores de β_{AB} varían entre 0,78 y 1,22, véase la Fig. (5) donde hemos trazado estos valores con líneas punteadas.

Cuando las secciones de las columnas se mantienen constantes, lo mismo que las de las vigas de los pisos intermedios, se tiene además que $f_A = f_B$, lo cual hace que β_{AB} sea estrictamente la unidad. En los pisos inferiores, de ordinario los dos primeros pisos y el sótano, y los dos últimos pisos, esto no se cumple, debido a la gran diferencia que presentan los grados de empotramiento superior e inferior, de los pilares en cada piso. Más adelante veremos como se puede encontrar, conociendo las características físico-mecánicas del suelo, el grado de empotramiento de las cimentaciones.

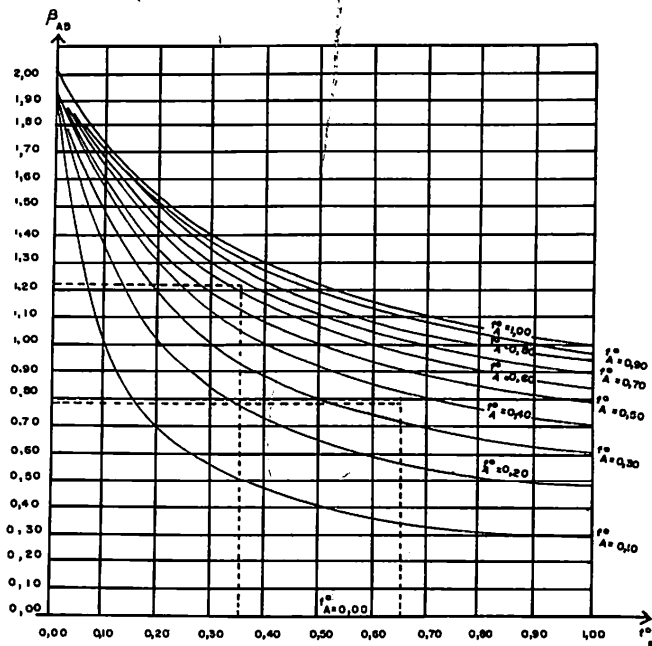


FIG. 5

Para obtener β_{BA} , de las curvas, cambie f_A por f_B y viceversa.

Lo anterior, el hecho de que en los pisos intermedios $f_A = f_B$ y $\beta_{AB} = 1$, justifica el empleo del método

aproximado llamado "Portal Frame Method",⁴ siempre que se corrijan los momentos en los primeros y en los últimos pisos, por las razones expuestas.

Cuando la estructura en consideración consta de muchos niveles, el método expuesto, más adaptado a un proceso manual, se hace muy largo y engorroso, y hay necesidad de recurrir al computador.

En este caso es mejor, entonces, presentar el problema en forma matricial, para lo cual basta reemplazar las ecs. (11) y (9) en la ec. (12), quedando esta así: (utilizando la equivalencia (10)).

$$-\frac{\lambda_{n+1}}{h^2_{n+1}} W_{n+1} + \left(\frac{\lambda_{n+1}}{h^2_{n+1}} + \frac{\lambda_n}{h^2_n}\right) W_n - \frac{\lambda_n}{h^2_n} W_{n-1} = \frac{H_n}{12} \quad (20)$$

Como para cada nivel se puede plantear una ecuación de este tipo, si hay r niveles, tendríamos r ecuaciones con r incógnitas W_n . Matricialmente el problema queda así, considerando que $\lambda_{r+1} = 0$, y que $W_{0-1} = 0$.

$$\begin{bmatrix} \lambda_r & \lambda_r & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda_r}{h^2_r} & \frac{\lambda_r}{h^2_r} & & & \\ \lambda_r & \lambda_r & \lambda_{r-1} & \lambda_{r-1} & \\ \frac{\lambda_r}{h^2_r} & \frac{\lambda_r}{h^2_r} & \frac{\lambda_{r-1}}{h^2_{r-1}} & \frac{\lambda_{r-1}}{h^2_{r-1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_r \\ W_{r-1} \\ \vdots \\ W_1 \\ W_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_r \\ H_{r-1} \\ \vdots \\ H_3 \\ H_0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

que se puede representar por la forma usual:

$$[\lambda/h^2] [W] = \frac{1}{12} [H] \quad (22)$$

Premultiplicando por el inverso de la matriz $[\lambda/h^2]$: $[\lambda/h^2]^{-1}$ tendremos:

$$[W] = \frac{1}{12} [\lambda/h^2]^{-1} [H] \quad (23)$$

expresión que nos permite conocer los desplazamientos totales W_n para cada nivel. Una vez conocidos los W_n , se deduce los desplazamientos relativos Δ , por medio de la relación (10), y luego con los Δ conocidos se deduce el valor de $V_{n+1,i}$ por medio de la ec. (a). El problema quedará completamente resuelto llevando los valores $V_{n+1,i}$ a la ec. (18)—A, que nos dará el valor de los momentos en cada

pilar, valores que nos permiten, a su vez, conocer los momentos en las vigas, utilizando para el efecto la ec. (24), véase la Fig. 6, donde M_n es el momento total aplicado al nudo n ; para este caso M_n sería la suma algebraica de los momentos de los pilares superior e inferior del nudo.

$$M_i = M_n \frac{R_i}{\sum R_n} \quad (24)$$

donde R_i se llama a lo que se define como "rigidez ajustada" del miembro de rigidez convencional K_i .

$$R_i = \frac{4K_i}{4 - f_{ii}^o} \quad (25)$$

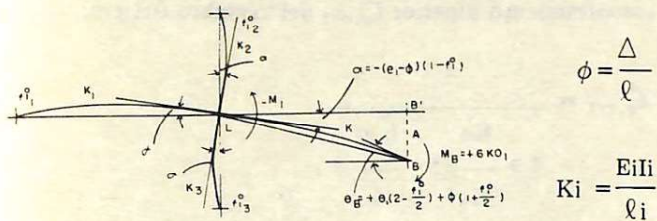


FIG. 6

Igualmente se puede demostrar que el grado de empotramiento f_{ii}^o , del miembro LB, Fig. 6 tiene como valor el dado por la siguiente expresión:

$$f_i^o = \frac{1}{1 + \frac{K}{\sum_{i=1}^n \frac{4K_i}{4 - f_{ii}^o}}} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{K + \sum_{i=1}^n R_i} \quad (26)$$

Esta ecuación permite encontrar, sucesivamente, los grados de empotramiento de las estructuras reticulares, a partir de puntos de grados de empotramiento conocidos. Es una fórmula de recurrencia.

Antes de terminar este artículo, conviene que nos ocupemos de dos problemas, el uno ya mencionado y que consiste en la determinación del grado de empotramiento de un pilar solidario con la zapata; el otro que consiste en la determinación de la rigidez modificada λ_o , perteneciente a la rigidez proporcionada por el terreno a la estructura, y que se necesita para evaluar las ecs. (21).

En realidad ambos problemas son uno solo, pero presentado bajo dos aspectos diferentes como lo vamos a ver. Empecemos, pues, con:

a) DETERMINACION DEL GRADO DE EMPOTRAMIENTO DE UN PILAR SOLIDARIO CON SU ZAPATA.

En lo que sigue nos referiremos a las Figs. 7a y 7b:

Sea K_s el módulo elástico de resistencia del suelo, medido por ejemplo en kilogramos fuerza por centímetro cuadrado, por centímetro de deformación, ($\text{kgf/cm}^2 - \text{cm}$).

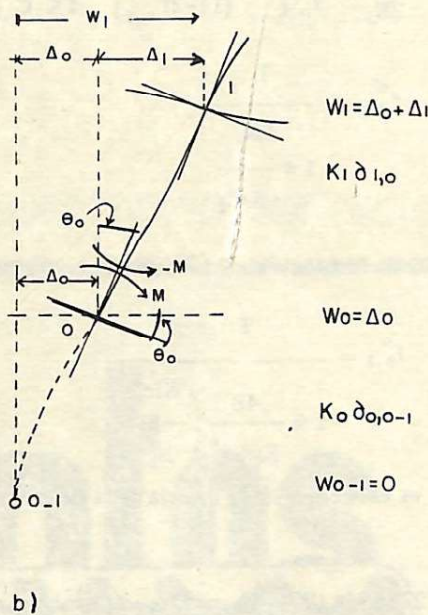
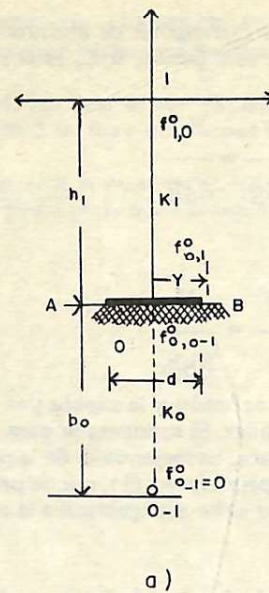


Fig. 7

De ordinario K_s se mide como la carga por unidad de área correspondiente a una deformación de 1,27 cm.^{3,5} A una distancia y del eje del pilar, la zapata AB, Fig. 7, producirá una tensión de compresión en el suelo de: (Si M es el momento aplicado a la zapata)

$$\sigma = \frac{M_y}{I_b} \quad (d)$$

siendo

$$I_b = \frac{bd^3}{12} \quad (e)$$

para una fundación rectangular de anchura b y altura d . El asentamiento S , en este punto, si K_S es el módulo elástico, será entonces,

$$S = \frac{\sigma}{K_S} = \frac{M_y}{K_S I_b} \quad (f)$$

y la rotación θ

$$\theta_o = \frac{S}{y} = \frac{M}{K_S I_b} \quad (g)$$

M es el momento aplicado a la zapata y es igual a: $-M$, momento aplicado al pilar. Si suponemos, para simplificar, que $f_{1,0}^o = 1$, se deduce, despejando ϕ de la primera ec. (3) y reemplazada en la primera ec. (1), que se produce una rotación θ_o en 0, que debe ser igualada a la ec. (g), (Véase la Fig. 7)

$$\theta = \frac{M}{K_S I_b} = \frac{M}{2K_1} \frac{(1-f_{o,1}^o)}{f_{o,1}^o} \frac{(6-f_{o,1}^o)}{(11-2f_{o,1}^o)} = \frac{M(1-f_{o,1}^o)}{4K_1 f_{o,1}^o} \quad (h)$$

$$\therefore f_{o,1}^o = \frac{1}{1 + \frac{4K_1}{K_S I_b}} \quad (27)$$

Para una zapata rectangular, la (27) puede escribirse como:

$$f_{o,1}^o = \frac{1}{1 + \frac{48}{K_S b d^3} \left(\frac{E I c_1}{h_1} \right)} \quad (27)-A$$

donde I_{c1} es el momento de inercia de la columna, y h_1 su altura.

La ec. (27), o la (27) - A, resuelve el problema que nos habíamos propuesto y nos proporciona el grado de empotramiento $f_{o,1}^o$ de un pilar solidario con su zapata, cimentada ésta en un suelo de resistencia modular K_S .

b) DETERMINACION DE LA RIGIDEZ MODIFICADA DEL SUELO, λ_o PROPORCIONADA POR EL TERRENO A LA ESTRUCTURA

Al deformarse la estructura, la zapata AB puede sufrir un corrimiento W_o ; aunque esta condición sea poco probable puede tomarse en cuenta en la matriz (21), y de hecho la hemos representado en la Fig. 7-b.

En la misma figura, hemos supuesto que el terreno se puede asimilar, o mejor representar, por un miembro ficticio 0,01, de altura h_o y de rigidez K_o , desconocidos ambos, pero articulado en 0-1, tal como se ha representado en la Fig. 7. Aplicando a estos dos miembros continuos 1, 00, 0-1; la

fórmula dada por la ec. (26), y conociendo ya el grado de empotramiento $f_{o,1}^o$, dado por la ec. (27) y $f_{o,0-1}^o = 0$, se puede escribir así la ec. (26)

$$f_{o,1}^o = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{K_o}}$$

$$\therefore K_o = K_1 \frac{f_{o,1}^o}{1 - f_{o,1}^o} \quad (28)$$

Aplicando de nuevo la ec. (26) se obtiene el grado de empotramiento superior $f_{o,0-1}^o$ del miembro ficticio:

$$f_{o,0-1}^o = \frac{1}{1 + \frac{K_o}{K_1} \left(1 - \frac{f_{1,0}^o}{4} \right)} \quad (j)$$

la cual nos da, reemplazando en ella K_o/K_1 deduciendo de la (28)

$$f_{o,0-1}^o = \frac{4(1-f_{o,1}^o)}{4-f_{o,1}^o f_{1,0}^o} \quad (29)$$

Ahora, conocidos $f_{o,0-1}^o$ y $f_{o,1}^o = 0$, es posible encontrar el factor de cizallamiento lateral $\partial_{o,0-1}$ utilizando para ella la fórmula (7)

$$\partial_{o,0-1} = \frac{f_{o,0-1}^o}{4} = \frac{1-f_{o,1}^o}{4-f_{o,1}^o f_{1,0}^o} \quad (30)$$

La rigidez modificada parcial del terreno, para este pilar, será entonces: (utilizando las ecs. (28) y (30))

$$K_o \partial_{o,0-1} = K_1 \frac{f_{o,1}^o}{4-f_{o,1}^o f_{1,0}^o} \quad (31)$$

Si la estructura tiene m pilares, la rigidez modificada λ_o que se debe usar en la matriz (21) será:

$$\lambda_o = \sum_{i=1}^m K_{1,i} \frac{f_{o,1,i}^o}{4-f_{o,1,i}^o f_{1,0,i}^o} \quad (32)$$

Quedaría, ahora, faltando por determinar, únicamente la altura h_o del miembro ficticio. Como lo único que podemos determinar completamente es $K_o = E.I./h_o$, se puede tomar tranquilamente $h_o = h_1$.

Usualmente se supone que $W_o = 0$, con lo cual, como puede verse de una inspección a las ecs. (21), no es necesario computar a λ_o .

REFERENCIAS

1. Gabriel García Moreno. "LA DISTRIBUCION DE MOMENTOS POR EL METODO DEL GRADO DE EMPOTRAMIENTO". Gabriel García Moreno. Calle 35A No. 65D-22. Medellín - Colombia, 1981. 158 pp.
2. E. Shepley. "CONTINUOUS BEAM STRUCTURES". Concrete Publications Ltd., London 1950.
3. P.C.A. "DESING OF COMBINED FRAMES AND SHEAR WALLS". Advanced Engineering Bulletin 14. 1965. (Appendix)
4. CH. H. Morris and J.B. Wilbur. "ELEMENTARY STRUCTURAL ANALISIS". Mc Graw-Hill, Second Edition, 1960.
5. Karl Terzaghi and R.B. Peck. "SOIL MECANICS IN ENGINEERING PRACTICE". Wiley International Edition, 1967.

Cimientos

INGENIERIA DE SUELOS Y CIMENTACIONES

ESTUDIO DE SUELOS
PERFORACION

FRANK MONTOYA C.
INGENIERO CIVIL

Dirección: Cra. 80 No. 47-84 Teléfono: 250 20 66