

Determinación del Grado de Empotramiento Conferido por Diferentes Tipos de Cimentaciones a las Estructuras .

Por Gabriel García Moreno *

INTRODUCCION (G.D.E. dado por zapatas aisladas)

El presente estudio se ha guiado por las referencias (1), (2) y (3), por lo cual, a guisa de introducción, y dado que la metodología que se utilizará será prácticamente la misma seguida en la referencia (1), se reproducen los aspectos fundamentales del artículo 3 - II - a, pág. 54, de la misma.

En las Figuras 1-a y 1-b se representa a una zapata aislada y a su deformación representada por el giro θ . Sea K_s el módulo elástico de resistencia del suelo, llamado también indistintamente coeficiente de reacción o coeficiente de balasto, medido en kilogramos fuerza por centímetro cuadrado, por centímetro de desplazamiento ($\text{Kgf}/(\text{cm}^2\text{-cm})$). De ordinario K_s se obtiene de un ensayo directo de carga, como la carga por unidad de área correspondiente a una deformación del suelo de 1,27 cm.

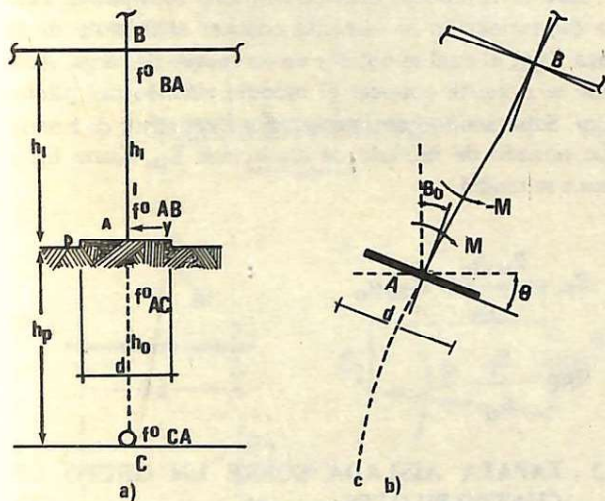


FIGURA 1. Esquema del conjunto cimentación - suelo - pilar y la deformación del suelo.

* Profesor Titulado, Facultad de Minas, U. Nal; U. EAFIT; Egeo Ltda., Medellín.

Si se considera una fundación rectangular de anchura b y largo d , de momento de inercia

$$I_b = \frac{bd^3}{12} \quad (1)$$

se producirá una compresión en el suelo, a una distancia 'y' del eje del pilar, en el plano de flexión, bajo la acción de un momento M aplicado a la zapata:

$$\sigma = \frac{My}{I_b} \quad (2)$$

El asentamiento S en este punto, si K_s es el coeficiente del balasto estará dado, entonces, por la expresión:

$$S = \frac{\sigma}{K_s} = \frac{My}{K_s I_b} \quad (3)$$

y la rotación θ por:

$$\theta = \frac{S}{y} = \frac{M}{K_s I_b} \quad (4)$$

M es el momento aplicado a la zapata y es igual a $-M$, momento aplicado al pilar. De la referencia (1) se deduce que el momento aplicado a una pieza prismática de rigidez K_1 ($K_1 = EI_c/h_1$, rigidez relativa del pilar), que gira un ángulo θ_0 bajo la acción de un momento M y con GDE en sus extremos f_{AB}^0 , f_{BA}^0 , está dado por la expresión (5).

$$M = 6K_1 \left[\frac{\theta_0}{\left(1 - f_{AB}^0\right) \left(1 + \frac{2f_{BA}^0}{4 - f_{AB}^0}\right)} \right] \left[\frac{f_{AB}^0 f_{BA}^0}{4 - f_{AB}^0} + \frac{2f_{AB}^0}{4 - f_{BA}^0} \right] \quad (5)$$

Se supone, para simplificar, que $f_{BA}^0 = 1$, la (5) se reduce a:

$$M = 2\theta_0 K_1 \frac{f_{AB}^0 (11 - 2f_{AB}^0)}{(1 - f_{AB}^0) (6 - f_{AB}^0)}$$

de la cual se puede despejar a θ_0 :

$$\theta_o = \frac{M}{2K_1} \frac{(1 - f_{AB}^o)(6 - f_{AB}^o)}{f_{AB}^o(11 - 2f_{AB}^o)} \approx \frac{M(1 - f_{AB}^o)}{4K_1 f_{AB}^o} \quad (6)$$

Como θ_o debe ser igual a θ dado en la (4), se obtiene al igualar (6) y (4):

$$\theta = \frac{M}{K_s I_b} = \frac{M(1 - f_{AB}^o)}{4K_1 f_{AB}^o}$$

de la cual se puede despejar a f_{AB}^o :

$$f_{AB}^o = \frac{1}{1 + \frac{4K_1}{K_s I_b}} \quad (7)$$

Reemplazando en esta expresión los valores de:

$$K_1 = \frac{EIc_1}{h_1}$$

$$I_b = \frac{bh^3}{12}$$

se obtiene la expresión buscada

$$f_{AB}^o = \frac{1}{1 + \frac{48}{K_s b d^3} \left(\frac{EIc_1}{h_1} \right)} \quad (8)$$

que da el grado de empotramiento, f_{AB}^o , de un pilar solidario con su zapata, cimentada ésta, en un suelo de coeficiente de balasto K_s .

Este mismo procedimiento se seguirá en el próximo numeral que trata del estudio de zapatas aisladas soportadas por pilotes resistentes de punta.

1. ZAPATAS AISLADAS SOPORTADAS POR PILOTES RESISTENTES DE PUNTA.

1.1 DETERMINACION DEL MODULO ELASTICO CONJUNTO ROCA-PILOTE

En este caso se considera que la punta del pilote se apoya en la roca. Sea:

- K_{ST} = módulo elástico conjunto del pilote y de la roca
 P_p = carga en el pilote
 a = área de la sección del pilote
 S_T = asentamiento total de la roca más el pilote.

Por definición del módulo elástico:

$$K_{ST} = \frac{P_p/a}{S_T} \quad (9)$$

$$S_T = \frac{P_p}{aK_{ST}} \quad (10)$$

Sean:

- S_R = asentamiento en la roca
 S_p = asentamiento en el pilote

Si K_{SR} y K_{SP} son los módulos elásticos de la roca y del pilote respectivamente se tendrá:

$$S_R = \frac{P_p/a}{K_{SR}} \quad (11)$$

$$S_p = \frac{P_p/a}{K_{SP}}$$

$$S_T = \left(\frac{1}{K_{SR}} + \frac{1}{K_{SP}} \right) \frac{P_p}{a} \quad (12)$$

Igualando las ecuaciones (12) y (10) se obtiene

$$K_{ST} = \frac{K_{SR} K_{SP}}{K_{SR} + K_{SP}} \quad (13)$$

Este es el módulo elástico conjunto roca-pilote. Para su determinación se necesita conocer el módulo de la roca K_{SR} , el cual se obtiene de un ensayo de carga. Además se necesita conocer el módulo elástico del pilote, K_{SP} . Suponiendo que éste se vaya a construir de hormigón armado de módulo de elasticidad E_p , altura h_o y área a se tendrá

$$E_p = \frac{P_p h_o}{a S_p} = K_{SP} h_o \quad (14)$$

$$K_{SP} = \frac{E_p}{h_o}$$

1.2 ZAPATA AISLADA SOBRE UN GRUPO DE CUATRO PILOTES

En todas las cimentaciones estudiadas se consideró que los pilotes son de sección circular con separación entre centros $3d$, siendo d el diámetro del pilote⁴. Se consideró, además, que la cimentación se comporta como una viga rígida apoyada en los pilotes, y que la carga del pilar se aplica en el centroide de la cimentación. Vistas así las cosas, y si se considera una zapata

cuadrada, Figura 2-a, con esfuerzos de sollicitación P y M del pilar a la cimentación (carga y momento respectivamente suponiendo un vector \vec{M} normal al plano de la Figura 2-b), se tendrá por consideraciones de equilibrio estático:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{3Pd - 2M}{6d} \\ R_2 &= \frac{3Pd + 2M}{6d} \end{aligned} \quad (15)$$

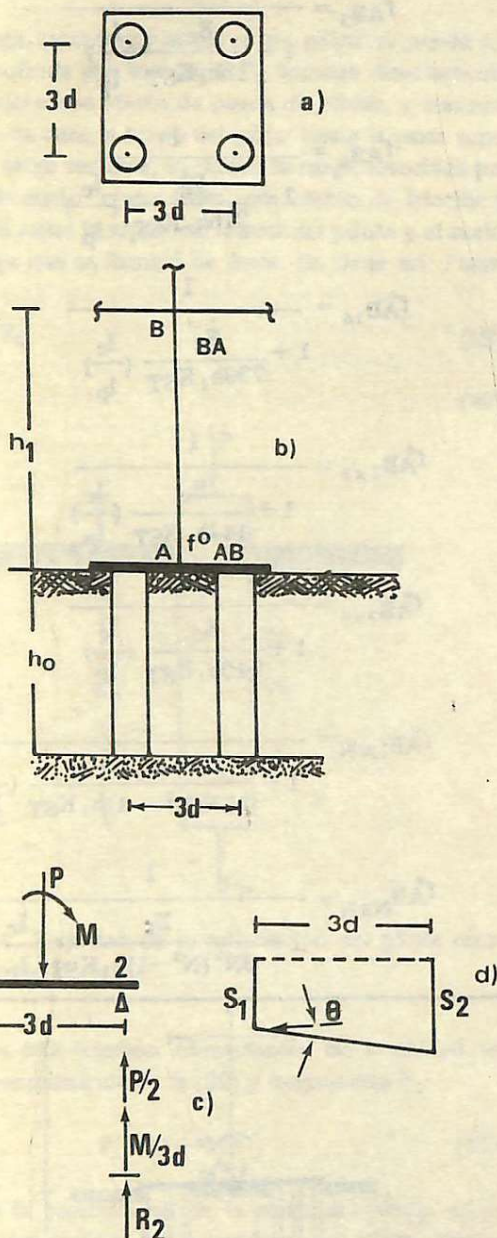


FIGURA 2. Esquema de una cimentación apoyada en cuatro pilotes de punta.

La diferencia entre estos dos esfuerzos hará que la cimentación sufra una rotación θ en el plano de la Figura 2-b, producida por la diferencia de asentamiento S_1 y S_2

$$\theta = \frac{S_2 - S_1}{3d} \quad (16)$$

Como cada una de las reacciones R_1 y R_2 , corresponde a una fila de 2 pilotes, la carga aplicada a cada pilote es la mitad de la reacción correspondiente a su lado de colocación. Utilizando el valor de K_{ST} dado por la ecuación (13), se tendrá

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(3Pd - 2M)}{12d \text{ a } K_{ST}} \\ S_2 &= \frac{(3Pd + 2M)}{12d \text{ a } K_{ST}} \end{aligned} \quad (17)$$

las cuales, reemplazadas en la (16), dan el valor de la rotación

$$\theta = \frac{M}{9d^2 \text{ a } K_{ST}} \quad (18)$$

Como $a = \frac{\pi d^2}{4}$, e $I_p = \frac{\pi d^4}{64}$, la ecuación (18) se puede reescribir:

$$\theta = \frac{M}{144 I_p K_{ST}} \quad (19)$$

Igualando esta expresión con la (6) y despejando f_{AB}^0 se obtiene:

$$f_{AB_4}^0 = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{36 I_p K_{ST}}} \quad (20)$$

la cual, poniendo en forma explícita el valor de K_1 , se escribe también:

$$f_{AB_4}^0 = \frac{1}{1 + \frac{E_c}{36h_1 K_{ST}} \left(\frac{I_c}{I_p} \right)} \quad (21)$$

donde I_c es el momento de inercia del pilar, h_1 su altura y E_c el módulo de elasticidad del pilar.

1.3 ZAPATAS AISLADAS CARGADAS EN GRUPOS DE MAS DE TRES PILOTES

Se generalizan las hipótesis que se hicieron en el numeral anterior, a saber:

- Se considera que la zapata es infinitamente rígida en comparación con los pilotes y por consiguiente, que la carga P del pilar se distribuye igualmente en el número de pilotes situados en cada fila paralela al eje de flexión de la cimentación.

Esta hipótesis se justifica dada la pequeña separación, en la práctica, de los pilotes, comparada con el espesor de la zapata.

- La carga del pilar se aplica en el centroide de la cimentación.

- Los pilotes son de sección circular, de diámetro d , y su separación centro a centro es $3d$.

Enseguida se procede a aplicar la metodología del numeral anterior a los siguientes casos, obteniendo el GDE indicado:

- 1) Para una cimentación con tres pilotes dispuestos en forma de triángulo equilátero:

$$f_{AB_3}^{\circ} = \frac{1}{1 + \frac{E_c}{18h_1 K_{ST}} \left(\frac{I_c}{I_p} \right)} \quad (22)$$

- 2) Para una cimentación de 9 pilotes dispuestos en cuadrado de 3×3 :

$$f_{AB_9}^{\circ} = \frac{1}{1 + \frac{E_c}{216h_1 K_{ST}} \left(\frac{I_c}{I_p} \right)} \quad (23)$$

- 3) Para una cimentación de 16 pilotes en planta de 4×4 :

$$f_{AB_{16}}^{\circ} = \frac{1}{1 + \frac{E_c}{720h_1 K_{ST}} \left(\frac{I_c}{I_p} \right)} \quad (24)$$

- 4) Para una cimentación rectangular de 2×3 pilotes, con flexión en el sentido largo:

$$f_{AB_{2 \times 3}}^{\circ} = \frac{1}{1 + \frac{E_c}{144h_1 K_{ST}} \left(\frac{I_c}{I_p} \right)} \quad (25)$$

- 5) Para una cimentación rectangular de 3×4 pilotes, con flexión en el sentido largo:

$$f_{AB_{3 \times 4}}^{\circ} = \frac{1}{1 + \frac{E_c}{540h_1 K_{ST}} \left(\frac{I_c}{I_p} \right)} \quad (26)$$

- 6) Se puede generalizar el resultado de zapatas rectangulares de L por N pilotes en el sentido de la flexión Fig. (3).

$$f_{AB_{L \times N}}^{\circ} = \frac{1}{1 + \frac{E_c}{3LN(N^2 - 1)h_1 K_{ST}} \left(\frac{I_c}{I_p} \right)} \quad (27)$$

la cual da para zapatas cuadradas con $N \times N$ pilotes:

$$f_{AB_{N \times N}}^{\circ} = \frac{1}{1 + \frac{E_c}{3N^2(N^2 - 1)h_1 K_{ST}} \left(\frac{I_c}{I_p} \right)} \quad (28)$$

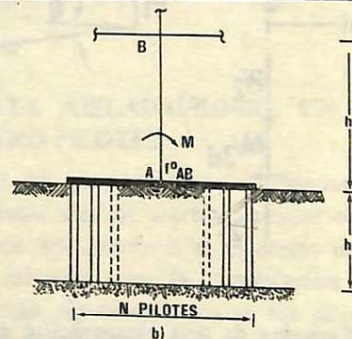
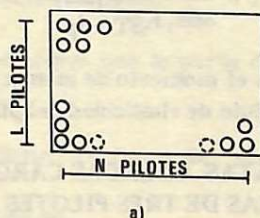


FIGURA 3. Esquema general de una cimentación apoyada sobre pilotes de punta.

2. ZAPATAS AISLADAS SOPORTADAS POR PILOTES RESISTENTES POR FRICCIÓN

El estudio que se presenta a continuación se ha fundamentado en el procedimiento de Vésic expuesto en la referencia (4), para el cálculo del asentamiento de un pilote, que deriva su resistencia principalmente de la fricción lateral.

2.1 DETERMINACION DE LAS CARGAS QUE ACTUAN SOBRE EL PILOTE

La carga total P que actúa en un pilote se puede suponer absorbida así: una parte P_p tomada directamente por el suelo como efecto de punta de pilote, y transmitida desde la base, a través del pilote hasta la parte superior, y la carga restante, P_s , como la carga absorbida por la masa de suelo, circundante, por efecto de fricción y adherencia entre la superficie lateral del pilote y el suelo. Es la carga que se llamará de fuste. Se tiene así, Figura (4):

$$P = P_p + P_s \quad (29)$$

$$P_p = \lambda P \quad (30)$$

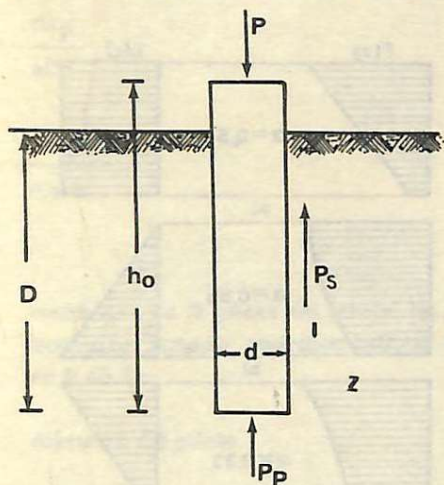


FIGURA 4. Esquema de la sollicitación del pilote resistente por fricción.

donde λ es una fracción adimensional de la unidad, se obtiene, reemplazando en la (29) y despejando P_s :

$$P_s = (1 - \lambda)P \quad (31)$$

Si D es la profundidad de la punta del pilote, π_o el perímetro del fuste y h_o la longitud del pilote, Figura (4), se puede considerar la carga P_s de fuste, como dada por la expresión:

$$P_s = \pi_o D f_s \quad (32)$$

donde:

$\pi_o D$ = superficie enterrada del pilote

f_s = valor medio de la fuerza resultante de fricción entre la superficie lateral del pilote y el suelo.

Igualando las ecuaciones (32) y (31), y despejando λ se tendrá:

$$\lambda = 1 - \frac{\pi_o D}{P} f_s \quad (33)$$

El valor de f_s se puede considerar como igual a:

$$f_s = \bar{\gamma} \bar{D} \beta \quad (34)$$

donde:

$\bar{\gamma}$ = gravedad específica media en la profundidad D

\bar{D} = profundidad media, que tomaremos como $D/2$

β = valor adimensional obtenido suponiendo que la componente vertical de la tensión es constante, y que la superficie del pilote es una superficie de deslizamiento, o falla. (Vésic⁴, 1975).

Aplicando estas consideraciones a un suelo con ángulo ϕ de fricción interna, se obtiene, (véase la Figura (5)):

$$R = \frac{f_s \cot \phi + \bar{\gamma} \bar{D}}{2} \sin \phi \quad (35)$$

$$f_s = R \cos \phi \quad (36)$$

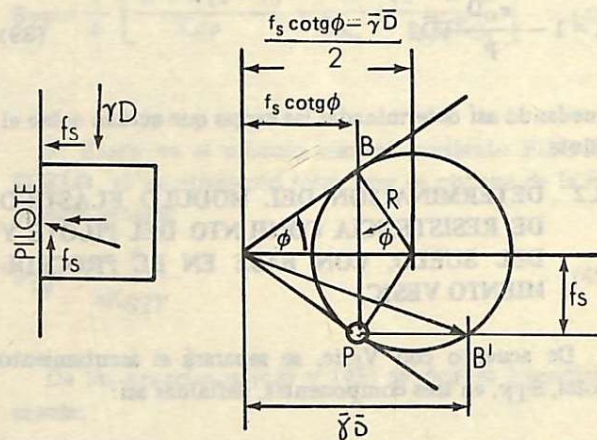


FIGURA 5. Representación de Mohr de las condiciones superficiales del pilote.

Reemplazando la (35) en la (36) se obtiene:

$$f_s = \bar{\gamma} D \frac{\sin \phi \cos \phi}{1 + \sin^2 \phi} \quad (37)$$

Comparando las expresiones (37) y (34) se obtiene el valor del coeficiente β :

$$\beta = \frac{\sin \phi \cos \phi}{1 + \sin^2 \phi} \quad (38)$$

Se ha representado el valor del coeficiente β en la Fig. (6). Según Burland⁴, los límites de ϕ para las arcillas son $\phi = 16^\circ$, $\phi = 26^\circ$. Para estos valores β varía entre 0,246 y 0,331. En las ciudades en donde se usan extensamente pilotes resistentes por fricción, los valores de f_s derivados de la experiencia local, son de ordinario, bastante buenos.

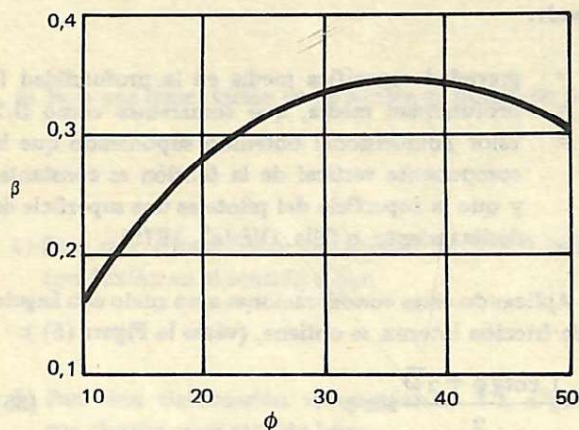


FIGURA 6. Variación de β Vs. ϕ

Reemplazando la ecuación (34) en la ecuación (33) se obtiene finalmente:

$$\lambda = 1 - \frac{\pi_o D}{P} \bar{\gamma} D \beta \quad (39)$$

quedando así determinadas las cargas que actúan sobre el pilote.

2.2 DETERMINACION DEL MODULO ELASTICO DE RESISTENCIA CONJUNTO DEL PILOTE Y DEL SUELO, CON BASE EN EL PROCEDIMIENTO VESIC.

De acuerdo con Vésic, se separará el asentamiento total, STF, en tres componentes, definidas así:

S_p = Asentamiento debido a la deformación axial del propio pilote.

S_{pp} = Asentamiento de la punta del pilote debido a la carga aplicada por ésta al terreno.

S_{ps} = Asentamiento del pilote causado por las cargas transmitidas al terreno por el pilote a lo largo del fuste.

Se tendrá entonces:

$$STF = S_p + S_{pp} + S_{ps} \quad (40)$$

Teniendo en cuenta la definición de coeficiente de balasto dado por la ecuación (14), y llamando, como ya se ha dicho, a, el área de la sección del pilote, se puede, inmediatamente dar el valor de S_p :

$$S_p = \frac{P_p + \alpha P_s}{a K_{sp}} \quad (41)$$

donde α es un coeficiente que depende de la forma de distribución de la fuerza P_s a lo largo del fuste del pilote.

Vésic, nos da en la Fig. (7) algunas distribuciones posibles de la tensión tangencial a lo largo de un pilote, y valores aproximados de α .

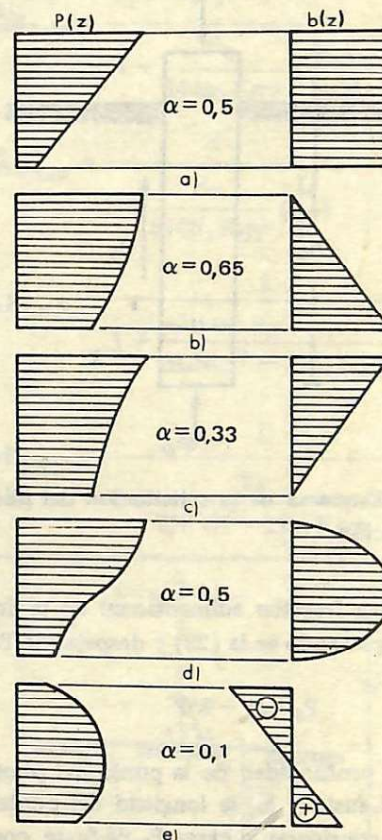


FIGURA 7. Algunas distribuciones de la tensión tangencial a lo largo de un pilote, y valores aproximados del coeficiente α , según Vésic.

Los valores de S_{pp} y de S_{ps} pueden encontrarse a partir de las siguientes expresiones:

$$S_{pp} = \frac{P_p}{a K_{S_1}} \quad (42)$$

$$S_{ps} = \frac{P_s}{\pi_o D K_{S_2}} \quad (43)$$

En las cuales se llama:

$\pi_o D$ = Superficie enterrada del pilote: perímetro π_o , por profundidad enterrada D .

K_{S_1} = módulo elástico de resistencia del suelo en la punta del pilote.

K_{S_2} = módulo elástico de resistencia del suelo alrededor del fuste del pilote.

a = área de la sección del pilote.

Se puede encontrar K_{S_1} y K_{S_2} por medio de las relaciones propuestas por Vésic, según la referencia (4):

$$K_{S_1} = \frac{d \sigma_p}{a C_p} \quad (44)$$

$$K_{S_2} = \frac{\sigma_p}{\pi_o C_s} \quad (45)$$

donde:

σ_p = resistencia en la punta del pilote. En pilotes de hormigón armado podemos estimar este valor en 0,45 f'c

d = diámetro del pilote

C_s, C_p = coeficientes empíricos de Vésic.

C_p se puede estimar a partir de la Tabla 1.

TABLA 1. Valores de C_p , según Vésic.

TIPO DE SUELO	PILOTES HINCADOS	PILOTES CON EXTRACCION
Arena (densa a floja)	0,02 a 0,04	0,09 a 0,18
Arcilla (firme o blanda)	0,02 a 0,04	0,04 a 0,08
Limo (denso a flojo)	0,03 a 0,05	0,09 a 0,012

El valor de C_s se puede calcular a partir de C_p , por medio de la expresión

$$C_s = (0,93 + 0,16 \sqrt{D/d}) C_p \quad (46)$$

o también de la Tabla 2.

TABLA 2. Valores de C_s en función de D/d y C_p

D/d C_p	5	10	20	40	80	200
0,02	0,026	0,029	0,033	0,039	0,047	0,064
0,03	0,039	0,043	0,049	0,058	0,071	0,096
0,04	0,052	0,057	0,066	0,078	0,094	0,128
0,05	0,064	0,072	0,082	0,097	0,118	0,160
0,08	0,103	0,115	0,132	0,155	0,189	0,255
0,09	0,116	0,129	0,148	0,175	0,212	0,287
0,12	0,155	0,172	0,197	0,233	0,283	0,383
0,18	0,232	0,258	0,296	0,350	0,425	0,575

Reemplazando, ahora, las ecuaciones (43), (42) y (41), en la ecuación (40) se obtiene el asentamiento total STF:

$$STF = \frac{P_p + \alpha P_s}{a K_{S_1}} + \frac{P_p}{a K_{S_1}} + \frac{P_s}{\pi_o D K_{S_2}} \quad (47)$$

Reemplazando en esta expresión los valores P_p y P_s dados por las ecuaciones (30) y (31) se obtiene finalmente:

$$STF = \frac{P}{a} \left[\frac{\lambda + \alpha (1 - \lambda)}{K_{S_1}} + \frac{\lambda}{K_{S_1}} + \frac{(1 - \lambda) a}{\pi_o D K_{S_2}} \right] \quad (48)$$

Si K_{STF} es el módulo elástico conjunto PILOTE-SUELO, el asentamiento total STF se obtiene de la expresión general:

$$STF = \frac{P}{a K_{STF}} \quad (49)$$

De las ecuaciones (48) y (49) se deduce inmediatamente:

$$K_{STF} = \frac{1}{\left[\frac{\lambda + \alpha (1 - \lambda)}{K_{S_1}} + \frac{\lambda}{K_{S_1}} + \frac{(1 - \lambda) a}{\pi_o D K_{S_2}} \right]} \quad (50)$$

Queda así completamente definido el coeficiente de balasto, o módulo elástico de resistencia conjunto del pilote y del suelo.

Los valores de λ , K_{SP} , K_{S1} , K_{S2} , se calculan con las fórmulas (39), (14), (44) y (45) respectivamente. a es el área de la sección del pilote y α un coeficiente que se puede calcular a partir de la Fig. (7). Pero este módulo elástico ha sido deducido para un solo pilote. La carga tomada por un pilote a partir de la carga P aplicada al conjunto de N pilotes será,⁴

$$P_{\text{pilote}} = \frac{P_{\text{conjunto}}}{\epsilon N} \quad (51)$$

donde ϵ se toma de las curvas de la Fig. (8) para terrenos arcillosos. Para terrenos arenosos $\epsilon = 1$.

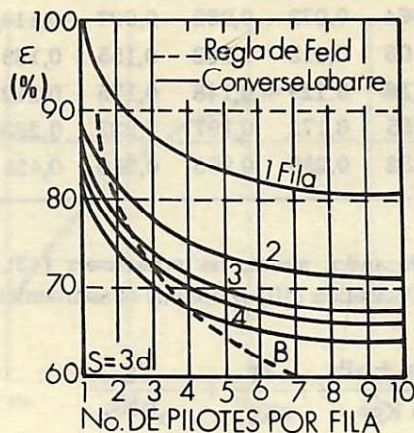


FIGURA 8. Valores de ϵ

Lo anterior equivale a que la carga P que actúa sobre la cimentación debe dividirse por ϵ . Pero este nuevo parámetro no afecta el grado de empotramiento, ya que éste es independiente de la magnitud de la carga. Esto puede comprobarse, sencillamente calculado el caso de la zapata aislada sobre cuatro pilotes. Se tendrá que los asentamientos S_1 y S_2 dados por las ecuaciones (17) quedarían:

$$S_1 = \frac{3Pd - 2\epsilon M}{12ad\epsilon K_{STF}} \quad (17)-A$$

$$S_2 = \frac{3Pd + 2\epsilon M}{12ad\epsilon K_{STF}}$$

de donde se deduce siguiendo el procedimiento del artículo 1.2:

$$\theta = \frac{M}{9d^2 a K_{STF}} \quad (52)$$

que es la ecuación (18), con la única diferencia de que se ha utilizado el coeficiente de balasto K_{STF} , de la ecuación (50) en lugar de K_{ST} de la ecuación (13). Naturalmente esto implica que el G.D.E*, para una zapata aislada sobre cuatro pilotes soportados por fricción sea:

$$f_{AB4}^{\circ} = \frac{1}{1 + \frac{Ec}{36h_1 K_{STF}} \left(\frac{I_c}{I_p} \right)} \quad (53)$$

la cual también es igual a la (21), pero cambiando K_{ST} , por K_{STF} . Igual sucede con números diferentes de pilotes, siendo válidas las formas algorítmicas dadas por las ecuaciones (22), (23), (24), (25), (26), (27) y (28), cambiando K_{ST} por K_{STF} .

REFERENCIAS

1. GARCIA MORENO, Gabriel, "La distribución de momentos por el método del grado de empotramiento". Medellín, Universidad Nacional de Colombia, Facultad Nacional de Minas, 1980, 158 p.
2. TERZAGHI, K. y PECK, R. Mecánica de suelos en la Ingeniería práctica. 2a. ed., Madrid, El Ateneo, 1975. 722 p.
3. LONDOÑO, J.C.; VELASQUEZ, D.H. y GARCIA, A.J. Estudio del grado de empotramiento que los diferentes tipos de cimentaciones confieren a las estructuras planas reticulares. Tesis Ingeniería Civil. Medellín, Universidad de Medellín, 1984, 110 p.
4. JIMENEZ SALAS, J. A. Geotecnia y cimientos. 2a. ed., Madrid, Ed. Rueda, 1981. Vol. 2 - vol. 3.

*GDE = grado de empotramiento.