

# Clinámenes

Por: Jorge Alberto Naranjo Mesa\*

En memoria de mi profesor  
Rafael Botero Hernández

## 1. UN "PROBLEMA VENERABLE"

La deflexión horizontal de los cuerpos en caída sobre la superficie de la tierra ha intrigado a los hombres de ciencia desde hace por lo menos dos milenios. Epicuro y su discípulo más notable, el poeta latino Lucrecio, afirmaban la existencia de una desviación de los cuerpos en caída de la línea vertical, en tiempos y lugares inciertos, como expresión de la "autonomía" del cuerpo en caída sobre su determinación por el espacio de caída. Lucrecio llamó clinamen al ángulo de desviación, considerándolo como un ángulo minimal, no discernible por ningún "ojo agudo", "tan pequeño como pueda ser dicho", pero esencial en la manera de producirse la caída: sin clinamen, el caer sería totalmente determinístico, y el espacio —la recta vertical— se devoraría al cuerpo en caída. El clinamen expresa la autonomía formal del cuerpo ante el espacio; es una irrupción de azar que rompe, brevemente, la determinación de la caída, un ejercicio de libertad en un espacio constrictivo, la desviación de la ley que constituye, a su vez, una ley.

En la teoría epicúreo-lucreciana<sup>1</sup> los cuerpos en caída se desvían de la vertical, o lo que es lo mismo, se deflektan horizontalmente, por principio. Esto fue considerado absurdo por muchos sabios, pero el hecho mismo de la deflexión —al margen de su explicación por medio del clinamen— se convirtió en un problema venerable, en cuyo examen se ocuparon Newton y Huygens, y tras su huella, los físicos más notables de la Epoca Clásica. Sólo recientemente, sin embargo, se ha podido disponer de las condiciones técnicas para medir con precisión las deflexiones. Y, hasta donde sabemos, no hay hasta ahora un modelo matemático completo para dar cuenta de los experimentos hechos. Se ha despreciado la resistencia del aire, se han despreciado términos en las ecuaciones de movimiento. En lo que sigue presentamos la solución

completa del sistema de ecuaciones que rigen la caída del cuerpo, y evaluamos los ángulos de desviación de la trayectoria de caída, hacia el este y hacia el sur, esto es, el "clinamen del este" y el "clinamen del sur" según la nomenclatura que usaremos.

## 2. LAS LEYES DE CAIDA

Consideramos una esfera sólida de radio " $r$ " y densidad " $\rho_c$ ", en caída desde una pequeña altura sobre la superficie de la tierra. Como fuerzas impresas, sobre ella actúan el peso corregido por el empuje arquimedeano del aire, y la resistencia cinética ofrecida por el medio fluido al paso de la esfera a través suyo, resistencia que asumimos de la forma stokesiana -  $6\pi r\eta v$  (en donde  $\eta$  es la viscosidad del aire, y  $v$  es la velocidad de caída medida por un observador sobre la superficie de la tierra); y como pseudo-fuerzas debidas a la rotación de la tierra— y del observador considerado— sobre ella actúan una fuerza de Coriolis y una fuerza centrífuga proporcionales a su masa  $(4/3) \rho_c \pi r^3$ . El observador referido verá a la esfera descender bajo la ley de movimiento:

$$m\ddot{\mathbf{a}} = (m - m') \vec{g} - 6\pi r\eta \vec{v} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad (1)$$

en donde  $\vec{\omega}$  es el vector de la velocidad angular de la tierra,  $\vec{R}$  es el vector de posición del observador respecto del centro de la tierra, y  $m, m'$  son las masas de la esfera y del volumen de aire desalojado.

Nos proponemos resolver (1) para averiguar la velocidad y la trayectoria de caída de la esfera desde el punto de vista del observador ligado a la tierra. Para ello conviene escoger los ejes de coordenadas en direcciones este, sur, y hacia el centro de la tierra, como se muestra en la Figura 1.

Sean  $\vec{e}$ ,  $\vec{s}$ ,  $\vec{d}$  los versores correspondientes. Entonces, como se ve fácilmente,

\* Experto, Facultad Nacional de Minas.



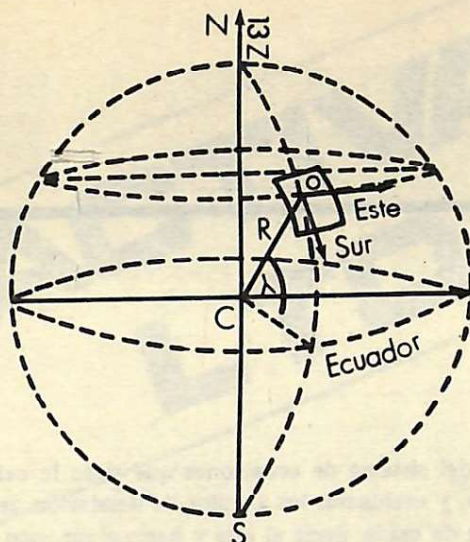


FIGURA 1. Sistema de coordenadas utilizado.

$$\begin{aligned}\vec{g} &= g\vec{d}, \quad \vec{\omega} = -(\omega \cos \lambda \vec{s} + \omega \sin \lambda \vec{d}) \\ \vec{R} &= -R\vec{d}, \quad \vec{v} = v_E \vec{e} + v_S \vec{s} + v_D \vec{d}\end{aligned}\quad (2)$$

y para los ejes escogidos la ecuación de movimiento se vuelve

$$\begin{aligned}m\dot{v}_D &= (m - m')g - 6\pi r\eta v_D - m\omega^2 R \cos^2 \lambda - 2m\omega v_E \cos \lambda \\ m\dot{v}_S &= -6\pi r\eta v_S + m\omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda + 2m\omega v_E \sin \lambda \\ m\dot{v}_E &= -6\pi r\eta v_E + 2m\omega (v_D \cos \lambda - v_S \sin \lambda)\end{aligned}\quad (3)$$

Sea " $\rho_f$ " la densidad del aire. Dividiendo por  $m$ , y reordenando, lo anterior se escribe

$$\dot{v}_D + \frac{9\eta}{2\rho_c r^2} v_S = \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_c}\right) g - \omega^2 R \cos^2 \lambda - 2\omega v_E \cos \lambda$$

$$\dot{v}_S + \frac{9\eta}{2\rho_c r^2} v_S = \omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda + 2\omega v_E \sin \lambda$$

$$\dot{v}_E + \frac{9\eta}{2\rho_c r^2} v_E = 2\omega (v_D \cos \lambda - v_S \sin \lambda)\quad (4)$$

La constante  $(9\eta/2\rho_c r^2)$  se conoce como el inverso del tiempo de relajación, y en lo que sigue la simbolizamos  $\alpha$ . Además definimos:

$$\begin{aligned}\alpha v_D^* &= \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_c}\right) g - \omega^2 R \cos^2 \lambda \\ \alpha v_S^* &= \omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda\end{aligned}\quad (5)$$

Ausente la fuerza de Coriolis,  $v_D^*$  y  $v_S^*$  serían precisamente los valores terminales, constantes, de las velocidades de descenso y de la deflexión hacia el sur. En términos de  $\alpha$ ,  $v_D^*$  y  $v_S^*$ , las ecuaciones de movimiento se escriben finalmente como:

$$\dot{v}_D + \alpha v_D = \alpha v_D^* - 2\omega v_E \cos \lambda\quad (6)$$

$$\dot{v}_S + \alpha v_S = \alpha v_S^* + 2\omega v_E \sin \lambda\quad (7)$$

$$\dot{v}_E + \alpha v_E = 2\omega (v_D \cos \lambda - v_S \sin \lambda)\quad (8)$$

para la dirección de descenso, sur y este, respectivamente.

### 3. SOLUCION DE LAS ECUACIONES

Derivando (6) y (7) respecto del tiempo, y eliminando  $v_E$  se obtiene

$$\frac{\ddot{v}_D + \alpha \dot{v}_D}{\ddot{v}_S + \alpha \dot{v}_S} = -\cot \lambda\quad (9)$$

y de (6) y (7) se obtienen también

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\omega} [\dot{v}_D + \alpha \dot{v}_D] \sec \lambda &= \dot{v}_E \\ \frac{1}{2\omega} [v_S + \alpha (v_S - v_S^*)] \csc \lambda &= v_E\end{aligned}$$

y esto, llevado a (8) con el uso de (9) para expresar  $\dot{v}_D + \alpha \dot{v}_D$  produce;

$$\begin{aligned}\dot{v}_S + 2\alpha v_S + (\alpha^2 + 4\omega^2 \sin^2 \lambda) v_S &= \\ \alpha^2 v_S^* + 4\omega^2 v_D \sin \lambda \cos \lambda\end{aligned}\quad (10)$$

y un proceso simétrico produce:

$$\begin{aligned}\dot{v}_D + 2\alpha v_D + (\alpha^2 + 4\omega^2 \cos^2 \lambda) v_D &= \\ \alpha^2 v_D^* + 4\omega^2 v_S \sin \lambda \cos \lambda\end{aligned}\quad (11)$$

Si se multiplica (10) por  $\cos \lambda$ , (11) por  $\sin \lambda$ , y se suman, se obtiene

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} + 2\alpha \dot{\phi} + \alpha^2 \phi &= \alpha^2 \phi^* & a) \\ \phi &= v_D \sin \lambda + v_S \cos \lambda & b) \\ \phi^* &= v_D^* \sin \lambda + v_S^* \cos \lambda & c)\end{aligned}\quad (12)$$

La ecuación (12 - a) se resuelve fácilmente. Las condiciones de borde para  $\phi$  son

$$\phi(0) = 0 \quad \dot{\phi}(0) = \alpha \phi^*\quad (13)$$

pues  $v_D(0) = v_S(0) = 0$ ; y  $\dot{v}_D(0) = \alpha v_D^*$ ,  $\dot{v}_S(0) = \alpha v_S^*$  según (6), (7), con  $v_E(0) = 0$ .



Así resulta, finalmente, para  $\phi$ ,

$$\phi = \phi^* [1 - e^{-\alpha t}] \quad (14)$$

Y si se multiplica (11) por  $\cos \lambda$ , (10) por  $\sin \lambda$ , y se restan las dos ecuaciones, se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + 2\alpha\dot{\psi} + (\alpha^2 + 4\omega^2)\psi &= \alpha^2\psi^* & a) \\ \psi &= v_D \cos \lambda - v_S \sin \lambda & b) \\ \psi^* &= v_D^* \cos \lambda - v_S^* \sin \lambda & c) \end{aligned} \quad (15)$$

La solución de (15-a) es

$$\psi = Ae^{-\alpha t} \cos(2\omega t + \delta) + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\omega^2} \psi^*$$

sometida a las condiciones de borde

$$\psi(0) = 0 \quad \dot{\psi}(0) = \alpha\psi^* \quad (16)$$

Así resulta, finalmente, para  $\psi$ ,

$$\psi = \frac{\alpha^2 \psi^*}{\alpha^2 + 4\omega^2} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{4\omega^2}{\alpha^2}} e^{-\alpha t} \cos(2\omega t + \delta) \right] \quad (17)$$

con  $\tan \delta = 2\omega/\alpha$ . Nótese que  $\phi(\infty) \rightarrow \phi^*$ , mientras

$$\psi(\infty) \rightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\omega^2} \psi^*.$$

Por lo tanto, en lugar de (6), (7) y (8) podemos escribir ahora

$$\begin{aligned} v_D &= \phi \sin \lambda + \psi \cos \lambda \\ v_S &= \phi \cos \lambda - \psi \sin \lambda \\ \dot{v}_E + \alpha v_E &= 2\omega \psi \end{aligned} \quad (18)$$

con  $\phi$  y  $\psi$  dados por (14) y (17) respectivamente. Así quedan determinadas  $v_D$  y  $v_S$ . La solución para  $v_E$ , con la ayuda de un factor de integración, resulta ser

$$\begin{aligned} v_E &= 2\omega e^{-\alpha t} \int e^{\alpha t} \psi dt + c e^{-\alpha t} \\ \text{con } v_E(0) &= 0. \text{ Después de integrar resulta} \end{aligned}$$

$$v_E = \frac{\alpha^2 \psi^*}{\alpha^2 + 4\omega^2} \left[ \frac{2\omega}{\alpha} - \sqrt{1 + \frac{4\omega^2}{\alpha^2}} \sin(2\omega t + \delta) \right] \quad (19)$$

La Tabla 1 resume los resultados obtenidos.

TABLA 1. Velocidades de descenso, al sur y al este, y valores límites

---


$$\begin{aligned} \alpha &= 9\eta/2\rho c^2; \quad \alpha v_D^* = (1 - \rho f/\rho c)g - \omega^2 R \cos^2 \lambda; \\ \alpha v_S^* &= \omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda; \quad \omega = 7.272 \times 10^{-5} \text{ seg}^{-1}, \quad \omega^2 R = 3.37 \text{ cm/seg}^2 \\ v_D &= v_{LD} - e^{-\alpha t} \left[ v_D^* \sin^2 \lambda + v_S^* \cos \lambda \sin \lambda + \frac{\alpha \cos \lambda}{\sqrt{\alpha^2 + 4\omega^2}} [v_D^* \cos \lambda - v_S^* \sin \lambda] \cos(2\omega t + \delta) \right] \\ v_{LD} &= \frac{\alpha^2 + 4\omega^2 \sin^2 \lambda}{\alpha^2 + 4\omega^2} \left( 1 - \frac{\rho f}{\rho c} \right) \frac{g}{\alpha} - \frac{\omega^2 \cos^2 \lambda}{\alpha^2 + 4\omega^2} R \alpha, \text{ velocidad límite descenso} \\ v_S &= v_{LS} - e^{-\alpha t} \left[ v_D^* \sin \lambda \cos \lambda + v_S^* \cos^2 \lambda - \frac{\alpha \sin \lambda}{\sqrt{\alpha^2 + 4\omega^2}} [v_D^* \cos \lambda - v_S^* \sin \lambda] \cos(2\omega t + \delta) \right] \\ v_{LS} &= \frac{4\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda}{\alpha^2 + 4\omega^2} \left[ \left( 1 - \frac{\rho f}{\rho c} \right) \frac{g}{\alpha} + \frac{R\alpha}{4} \right], \text{ velocidad límite al sur} \\ v_E &= v_{LE} - \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{\sqrt{\alpha^2 + 4\omega^2}} [v_D^* \cos \lambda - v_S^* \sin \lambda] \sin(2\omega t + \delta) \\ v_{LE} &= \frac{2\omega \cos \lambda}{\alpha^2 + 4\omega^2} \left[ \left( 1 - \frac{\rho f}{\rho c} \right) g - \omega^2 R \right], \text{ velocidad límite al este} \end{aligned}$$


---



El análisis vale para números de Reynolds  $2\rho f v_L/\eta \ll 1$ ; en caso contrario estaríamos por fuera del régimen de resistencia viscosa stokesiana, y la resistencia sería proporcional al cuadrado de la velocidad, complicando la solución (sería necesario usar teoría de perturbaciones para resolver las ecuaciones de movimiento).

Igualmente se consideró despreciable la variación de la gravedad con la altura de caída, es decir, se hizo nulo el cociente  $h/R$  en la expresión

$$g(h) = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2} \frac{1}{(1+h/R)^2} = g \frac{1}{(1+h/R)^2} \quad (20)$$

en donde  $h$  es la altura de caída. Posteriormente se examinan estas limitaciones de la solución hallada.

#### 4. LA DEFLEXION EN EL VACIO

Los modelos analíticos que se han venido usando<sup>2</sup> no consideran resistencia estática ni cinética del medio al paso del cuerpo en caída a través suyo. Los experimentos hechos (Gugliemini, Reich)<sup>3</sup> para detectar la deflexión se han realizado en aire, no "in-vacuo". El modelo usado aquí se aplica, pues, más adecuadamente, a los casos experimentados. El modelo clásico de análisis plantea las ecuaciones de movimiento bajo la forma

$$\begin{aligned} \ddot{v}_D &= (1 - \frac{\rho f}{\rho c})g - \omega^2 R \cos^2 \lambda - 2\omega v_E \cos \lambda \\ \ddot{v}_S &= \omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda + 2\omega v_E \sin \lambda \\ \ddot{v}_E &= 2\omega [v_D \cos \lambda - v_S \sin \lambda] \end{aligned} \quad (21)$$

y, aun, asimila " $\rho f/\rho c$ " a cero. Estas ecuaciones resultan de las ecuaciones (4) si se anula la resistencia stokesiana. Y luego no se resuelve el sistema (21) sino una simplificación suya: se asume  $\dot{v}_D$  de un orden de magnitud mayor que  $\dot{v}_S$  y  $\dot{v}_E$ , y por lo mismo se asume  $v_D$  de un orden de magnitud mayor que  $v_S$  y  $v_E$ . Entonces las ecuaciones (21) se escriben

$$\dot{v}_D \cong (1 - \rho f/\rho c)g, \dot{v}_S = 0, \dot{v}_E \cong 2\omega v_D \cos \lambda \quad (22)$$

Si en (22) se deriva  $\dot{v}_E$  respecto del tiempo, y se sustituye  $\dot{v}_D$ , resulta una ecuación para  $v_E$ ,

$$\ddot{v}_E = 2\omega (1 - \frac{\rho f}{\rho c})g \cos \lambda$$

que integrada tres veces nos da el desplazamiento hacia el este,  $X_E$ , en términos del tiempo. Se obtiene fácilmente

$$X_E = \frac{\omega}{3} [1 - \frac{\rho f}{\rho c}] g t^3 \cos \lambda \quad (23)$$

El descenso está regido por la ley de caída galileana

$$X_D = (1 - \frac{\rho f}{\rho c}) g \frac{t^2}{2} \quad (24)$$

Y la trayectoria de deflexión hacia el este resulta ser

$$X_E = \frac{2}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\rho f}{\rho c}}} X_D^{3/2} \quad (25)$$

como la "Parábola de Neil para la deflexión". Esta deflexión, debido al modelo escogido, se mide desde la vertical, y no desde la línea radial:  $X_E$  es la deflexión medida desde la línea de la plomada. Planck afirma que el resultado predicho de  $X_E$ , para  $X_D = 100$  pies, concuerda bien con lo obtenido en "numerosos experimentos". Goldstein, más cauteloso, afirma que la deflexión es difícil de medir pues se desdibuja fácil por viscosidad y golpes de viento del medio aéreo. Al parecer hoy existe acuerdo en considerar poco confiables los experimentos que se han realizado, y se plantea la necesidad de realizarlos de nuevo.

Las simplificaciones hechas, por otra parte, no son necesarias para encontrar una solución sencilla para las deflexiones en el vacío. En lo que sigue mostramos que la Parábola de Neil es sólo un caso límite de la trayectoria, para tiempos muy breves de caída. Si en (21) derivamos  $v_E$  respecto del tiempo, y reemplazamos  $v_D$  y  $v_S$  en términos de  $v_E$  se obtiene la ecuación

$$\ddot{v}_E + 4\omega^2 v_E = 2\omega (\alpha v_D^* \cos \lambda - \alpha v_S^* \sin \lambda)$$

con  $\alpha v_D^*$  y  $\alpha v_S^*$  como en (5). Esto ofrece una solución

$$v_E = A \cos(2\omega t + \delta) + \frac{\cos \lambda}{2\omega} [(1 - \frac{\rho f}{\rho c})g - \omega^2 R]$$

con  $A$  y  $\delta$  constantes por determinar según las condiciones de borde.

Aquí  $\dot{v}_E(0) = \dot{v}_E(0) = (0)$ . Y esto da  $\delta = 0$ ,  $A =$

$$-\frac{\cos \lambda}{2\omega} [(1 - \frac{\rho f}{\rho c})g - \omega^2 R]. \text{ Y}$$

$$v_E = \frac{\cos \lambda}{2\omega} [(1 - \frac{\rho f}{\rho c})g - \omega^2 R] (1 - \cos 2\omega t) \quad (25a)$$



La velocidad oscila, pues, desde cero hasta un máximo, y vuelve a decrecer de manera periódica. Integrando de nuevo se obtiene el desplazamiento hacia el este:

$$x_E = \frac{\cos \lambda}{2\omega} \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right) \quad (26)$$

La expresión en serie del seno:

$$\sin 2\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2\omega t)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

permite escribir (26) como

$$x_E = \frac{\cos \lambda}{(2\omega)^2} \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2\omega t)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

es decir, como

$$x_E = \frac{\omega}{3} \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] t^3 \cos \lambda + \text{resto}$$

$$\text{resto} = \frac{\cos \lambda}{(2\omega)^2} \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\omega t)^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (27)$$

Como se ve, el desplazamiento  $x_E$  considerado en la parábola de Neil asume resto 0, es decir,

$$\sin 2\omega t = 2\omega t - \frac{(2\omega t)^3}{3!}$$

aproximación sin duda buena para tiempos breves, como 7 y 8 segundos—tiempo de caída libre desde  $h = 250$  m—comparados con el período de  $\sin 2\omega t$ , es decir,  $\approx 12$  horas. La  $x_E$  se diferencia de la prevista según la aproximación clásica si  $t$  crece notablemente. El cálculo de  $v_D$  y  $x_D$  es, por lo demás, inmediato. Una integración en la ecuación (21-a) nos da;

$$v_D = \alpha v_D^* t - 2\omega x_E \cos \lambda$$

y otra integración nos brinda

$$x_D = \alpha v_D^* \frac{t^2}{2} - 2\omega \cos \lambda \int_0^t x_E dt$$

con  $x_E$  como en (26). Esto produce

$$x_D = \left[ \alpha v_D^* - \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] \cos^2 \lambda \frac{t^2}{2} + \left\{ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right\} \frac{\cos^2 \lambda}{4\omega^2} [1 - \cos 2\omega t]$$

Usando la serie del coseno puede escribirse:

$$1 - \cos 2\omega t = \frac{(2\omega t)^2}{2!} - \frac{(2\omega t)^4}{4!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2\omega t)^{2n}}{(2n)!}$$

$$1 - \cos 2\omega t = \frac{4\omega^2 t^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2\omega t)^{2n}}{(2n)!}$$

y la expresión para  $x_D$  se vuelve

$$x_D = \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \cos^2 \lambda \right] \frac{t^2}{2} + \text{resto}$$

$$\text{resto} = \frac{\cos^2 \lambda}{4\omega^2} \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2\omega t)^{2n}}{(2n)!} \quad (28)$$

Como se ve, la caída según la parábola de Neil supone resto cero, es decir, sólo toma dos términos de la serie del coseno. Para tiempos breves, de nuevo, esta aproximación es buena, pero en tiempos largos la trayectoria se desvía de la parábola de Neil. La ley (21) permite, por un proceso semejante, hallar  $v_S$  y  $x_S$ . Dejaremos que el lector demuestre que

$$x_S = \omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda \frac{t^2}{2} + \text{resto} \quad (29)$$

con resto igual a

$$\frac{\sin \lambda \cos \lambda}{4\omega^2} \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{(2\omega t)^{2n}}{(2n)!} \quad (30)$$

La Tabla 2 presenta las velocidades y los ángulos desviatorios para caídas en el vacío ( $\rho f/\rho c = 0$ ) y en un medio que se resiste al peso y no al movimiento del móvil ( $\rho f/\rho c \neq 0$ ). Nótese que, en estos casos no aparecen velocidades límites. Los ángulos de desviación simbolizados como  $\kappa_S^*$  y  $\kappa_E^*$ , se llamarán los clinámenes del sur y del este en el vacío (para  $\rho f/\rho c = 0$ ), o en un medio arquimediano ( $\rho f/\rho c \neq 0$ ), para tiempos breves ( $t \ll 2\pi/\omega$ ). O, simplemente, los clinámenes de Neil.

Para tiempos largos será preciso tomar las velocidades con al menos parte de los términos de las sumatorias correspondientes. Obsérvese que  $\kappa_S^*$  es constante, por lo que la caída, en el plano SUR - DESCENSO, discurre en línea recta aunque inclinada un poco, y siguiendo la dirección de la plomada. En el puro vacío, el valor máximo de  $\kappa_S^*$ , para  $\lambda = \pi/4$ , apenas vale unos 5,9 minutos de grado. En Medellín, a latitud  $6,3^\circ$ , el clinamen del sur in vacuo apenas vale 1,29 minutos del grado, incluida la corrección por la altura sobre el nivel del mar. En el plano ESTE - DESCENSO, en cambio, el ángulo



TABLA 2. Velocidades y desviaciones, sin resistencia cinética.

$$v_D = \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \cos^2 \lambda \right] t + \frac{\cos^2 \lambda}{2\omega} \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2\omega t)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$v_S = [\omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda] t + \frac{\cos \lambda \sin \lambda}{2\omega} \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2\omega t)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$v_E = \omega t^2 \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] \cos \lambda + \frac{\cos \lambda}{2\omega} \left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2\omega t)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\kappa_S^* = \arctan \frac{v_S}{v_D} = \arctan \frac{\omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda}{\left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \cos^2 \lambda}, \text{ para tiempos breves}$$

$$\kappa_E^* = \arctan \frac{v_E}{v_D} = \arctan \frac{\left[ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \right] \omega t \cos \lambda}{\left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \cos^2 \lambda}, \text{ para tiempos breves}$$

$$\kappa_S^* = \arctan \frac{3,37 \cos \lambda \sin \lambda}{983,22 - 3,37 \cos^2 \lambda}, \text{ superficie de la Tierra, } \rho f / \rho c = 0$$

$$\kappa_E^* = \arctan \frac{71,1255 \times 10^{-2} t \cos \lambda}{983,22 - 3,37 \cos^2 \lambda}, \text{ Superficie de la Tierra, } \rho f / \rho c = 0, \\ t \text{ en segundos.}$$

$\kappa_E^*$  crece con el tiempo, indicando una ganancia progresiva de inclinación. Para una caída in vacuo de 30 metros de altura, en Medellín  $\kappa_E^*$  valdría un poco más de 0,6 minutos de grado. El desplazamiento  $x_E$  no excederá medio centímetro. Se trata de "ángulos minúsculos" en el sentido lucreciano, pero de todos modos surgen determinísticamente, y no por las razones lucrecianas. Si los nombramos "clinámenes" por reconocimiento a quienes afirmaron, hace dos milenios, la deflexión horizontal de los cuerpos en caída, no obstante ha de tenerse en cuenta el distinto modo de producción de la desviación en cada caso.

## 5. LOS CLINAMENES EN UNA CAIDA STOKESIANA

Si se considera la resistencia viscosa sobre la esfera en caída las desviaciones se modifican sustancialmente: por una parte, los ángulos alcanzan valores límites, pues se alcanzan velocidades límites, lo que no sucede en caída en el vacío, donde el clinamen del este crece indefinidamente en tiempos breves, y el clinamen del sur es constante sólo para tiempos breves. El parámetro  $\alpha$  es decisivo, y como veremos, introduce cambios formales, en la

expresión de las desviaciones, notables respecto de las expresiones de los mismos in vacuo. En la Tabla 3 presentamos los clinámenes stokesianos del este y del sur, y sus valores para la caída de una esfera de radio "r" y densidad " $\rho c$ " en una atmósfera de aire a 20°C en la superficie de la tierra.

Las velocidades están dadas en la Tabla No. 1. Es notorio cómo incide el valor de la densidad del material en el valor del clinamen. Puesto que la ley de Stokes vale para  $\alpha \ll 1$ , hemos calculado el valor máximo del radio permisible para caída stokesiana considerando cuatro materiales, acero, aluminio, agua y aceite de oliva. Para ello se asumió, grosso modo, la ley stokesiana simplificada:

$$v_L = \frac{2}{9} \frac{\rho c - \rho f}{\eta} g r^2$$

y se hizo  $\alpha = 1$ . Esto introduce una ecuación para "r":

$$\frac{2 \rho f v_L r}{\eta} = 1 = \frac{4 \rho f (\rho c - \rho f)}{9 \eta^2} g r^3$$



TABLA 3. Clinámenes stokesianos del sur y el este.

$\omega$	$= 7,232 \times 10^{-5} \text{ rad segundo}^{-1}$	$\rho f = \rho \text{ aire} = 1,205 \text{ g cm}^{-3}$
$R$	$= 6,37 \times 10^8 \text{ cm}$	$\eta \text{ aire} = 1,81 \times 10^{-4} \text{ poises}$
$g$	$= 983,22 \text{ cm segundo}^{-2}$	$\nu \text{ aire} = 0,150 \text{ stokes}$
$\omega^2 R$	$= 3,37 \text{ cm segundo}^{-2}$	$\lambda \text{ MEDELLIN} = 6,30 \text{ Norte}$
$\omega^2$	$= 5,288 \times 10^{-9} \text{ segundo}^{-2}$	$\alpha \text{ aire} = 8,145 \times 10^{-4} (\rho_c r^2)^{-1}$
$\alpha$	$= 9\eta/2\rho_c r^2 \text{ segundo}^{-1}$	$\alpha^2 \text{ aire} = 6,634 \times 10^{-7} (\rho_c r^2)^{-2}$

$$\kappa_{LS} = \arctan \frac{\nu_{LS}}{\nu_{LD}} = \arctan \left[ \frac{4\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \left\{ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho_c}\right)g + \frac{R\alpha^2}{4} \right\}}{(\alpha^2 + 4\omega^2 \sin^2 \lambda) \left(1 - \frac{\rho f}{\rho_c}\right)g - \omega^2 R\alpha^2 \cos^2 \lambda} \right]$$

$$\kappa_{LE} = \arctan \frac{\nu_{LE}}{\nu_{LD}} = \arctan \left[ \frac{2\omega \alpha \left\{ \left(1 - \frac{\rho f}{\rho_c}\right)g - \omega^2 R \right\} \cos \lambda}{(\alpha^2 + 4\omega^2 \sin^2 \lambda) \left(1 - \frac{\rho f}{\rho_c}\right)g - \omega^2 R\alpha^2 \cos^2 \lambda} \right]$$

Material	Densidad $\rho_c$	$(\rho_c/\rho f - 1)^{-1}$	$(1 - \rho f/\rho_c)$	$r_{TOPE}$	$\alpha \text{ (S}^{-1}\text{)}$	$\alpha^2 \text{ (S}^{-2}\text{)}$
Acero	7,87	$1,536 \times 10^{-4}$	0,99987	$2 \times 10^{-3} \text{ cm}$	26,125	628,51
Aluminio	2,70	$4,465 \times 10^{-4}$	0,99961	$2,8 \times 10^{-3} \text{ cm}$	37,311	1392,13
Agua	0,9982	$1,209 \times 10^{-3}$	0,99894	$4 \times 10^{-3} \text{ cm}$	51,96	2699,83
Aceite de Oliva	0,918	$1,314 \times 10^{-3}$	0,99885	$4,1 \times 10^{-3} \text{ cm}$	53,427	2854,46

Material	$\tan \kappa_{LS} \times 10^3$	$\tan \kappa_{LE} \times 10^6$	$\kappa_{LS} \text{ MEDELLIN}$	$\kappa_{LE} \text{ MEDELLIN}$
Acero	$\approx 3,4382 \sin \lambda \cos \lambda$	$\approx 5,5671 \cos \lambda$	$\approx 1,29 \text{ minutos}$	$\approx 1,14 \text{ segundos}$
Aluminio	$\approx 3,4391 \sin \lambda \cos \lambda$	$\approx 3,8980 \cos \lambda$	$\approx 1,29 \text{ minutos}$	$\approx 0,80 \text{ segundos}$
Agua	$\approx 3,4414 \sin \lambda \cos \lambda$	$\approx 2,7991 \cos \lambda$	$\approx 1,29 \text{ minutos}$	$\approx 0,57 \text{ segundos}$
Aceite de Oliva	$\approx 3,4417 \sin \lambda \cos \lambda$	$\approx 2,7222 \cos \lambda$	$\approx 1,29 \text{ minutos}$	$\approx 0,56 \text{ segundos}$

$$r_{TOPE} = \left[ \frac{9\nu^2}{4(\rho_c/\rho f - 1)g} \right]^{1/3} \quad (31)$$

con  $\nu = \eta/\rho f$  la viscosidad cinemática del fluido (aire en todos los casos calculado). los valores de  $r_{TOPE}$  así obtenidos fijan una cota para el radio de la esfera. Los valores aceptables serían un poco menos de la mitad de la cota de cada material, y tamaños aún más pequeños. Los resultados obtenidos muestran que la desviación hacia el sur, medida por el clinamen stokesiano, es muy aproximadamente la misma que la producida por el va-

cio y dada por  $\kappa_s^*$ . Para la latitud de Medellín,  $\kappa_{LS} \approx 1,29$  minutos de grado, independiente de la densidad " $\rho_c$ " (de hecho,  $\kappa_{LS}$  es menor mientras mayor la densidad, pero la variación, de acero a aceite de oliva, es minúscula, milésimas de minuto). En cambio, el clinamen del este es mucho menor que el que se produce en el vacío ( $0,6 \text{ minutos} = \kappa_E^*$  para caída in vacuo desde 30 metros de altura sobre la superficie a nivel de Medellín, mientras  $\kappa_{LE}$  es del orden del segundo). La acción viscosa, pues, anula prácticamente la deflexión hacia el este; y mientras menos denso el material menor su clinamen stokesiano  $\kappa_{LE}$ . Y la reducción es tal que



hace dudar, claramente, de los pretendidos ajustes de las mediciones con las fórmulas de deflexión in vacuo. La acción viscosa hace disminuir la deflexión hacia el este como en sesenta veces! Podría objetarse, sin duda, que en las caídas experimentadas la resistencia no es stokesiana tampoco; esto lo consideramos en el punto 6. Por ahora es más importante ver cuán grande es la influencia de la resistencia cinética, NO considerada en los modelos clásicos de análisis de la deflexión. Nótese que  $\alpha^2$  es de mucho mayor orden que  $\omega^2$  para los casos considerados, de modo que, muy aproximadamente

$$k_{LS} \cong \arctan \left[ \frac{\omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda}{(1 - \rho f / \rho c) g - \omega^2 R \cos^2 \lambda} \right] \cong k_S^*, \text{ fórmula en cuadro No. 2}$$

$$k_{LE} \cong \arctan \left[ \frac{2\omega}{\alpha} \cos \lambda \right] = \arctan [\tan \delta \cos \lambda]$$

## 6. CAIDAS CON OTRAS FORMAS DE RESISTENCIA CINETICA

En el caso general la resistencia cinética asume la forma

$$\vec{R} = -C_D \frac{1}{2} \rho f v^2 \cdot \pi r^2 \vec{u} \quad (32)$$

con  $C_D$  el coeficiente de dragado del móvil en el medio, una función del número de Reynolds y de la forma del móvil; en el caso stokesiano,  $Re \ll 1$ , se muestra fácil que  $C_D = 24/Re$ . Para  $Re > 1$ , la forma de  $C_D$  varía según tipos de régimen de flujo, aunque en todos los casos  $C_D > 24/Re$ . Por tanto estaremos en presencia de una mayor amortiguación de las deflexiones. Las ecuaciones de movimiento se escriben ahora, con  $v = (v_D^2 + v_E^2)^{1/2}$ ,

$$\dot{v}_D + \frac{3 \rho f C_D}{8 \rho c r} v v_D = \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \cos^2 \lambda - 2\omega v_E \cos \lambda$$

$$\dot{v}_S + \frac{3 \rho f C_D}{8 \rho c r} v v_S = \omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda + 2\omega v_E \sin \lambda$$

$$\dot{v}_E + \frac{3 \rho f C_D}{8 \rho c r} v v_E = 2\omega [v_D \cos \lambda - v_S \sin \lambda] \quad (33)$$

y aun las velocidades límites se hacen difíciles de despejar. Si, para ser sensibles al cambio de resistencia, nombramos

$$\frac{3 \rho f C_D^*}{8 \rho c r} v_{SD}^* v_D^* = \beta^* v_{SD}^* v_D^*$$

al valor  $\alpha v_D^*$  en (5), y lo mismo con  $\alpha v_S^*$ , las condiciones terminales en una caída sin aceleración de Coriolis se encontrarían como

$$\beta^* (v_D^{*2} + v_S^{*2})^{1/2} v_D^* = \left(1 - \frac{\rho f}{\rho c}\right) g - \omega^2 R \cos^2 \lambda$$

$$\beta^* (v_D^{*2} + v_S^{*2})^{1/2} v_S^* = \omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda$$

y el clinamen del sur permanece como antes; y el sistema (33), en el caso límite, podría escribirse como

$$\beta_L v_{L,SDE} v_{LD} = \beta^* v_{SD} v_D^* - 2\omega v_E \cos \lambda$$

etc., con  $v_{L,SDE} = (v_{LS}^2 + v_{LD}^2 + v_{LE}^2)^{1/2}$ , con  $\beta_L$  El valor límite del coeficiente  $(3/8) (\rho f / \rho c) \frac{C_D}{r}$ . Cuando  $C_D$  alcanza el valor correspondiente a  $v_{L,SDE}$ . El sistema límite puede resolverse para encontrar las tres velocidades límites (resulta una cúbica para  $v_{LE}$  en términos de  $v_{LS}$ ,  $v_{LD}$ ; este resultado llevado a las dos ecuaciones iniciales (33), deja dos ecuaciones y dos incógnitas en un sistema ya no tan difícil de resolver); aunque no presentamos aquí esos cálculos, aseguramos que ese protocolo nos brindará los clinámenes en la caída generalizada, y en el caso terminal de las velocidades. No se ve, en los resultados así obtenidos, manera alguna de obtener clinámenes del este como  $\kappa_E^*$  in vacuo. La resistencia del aire destruye gran parte de la deflexión. No es posible atribuir, pues, las "concordancias de numerosos experimentos" con la fórmula (25) sino a un hecho: ¡que hubo viento, azar, "en tiempos y lugares inciertos", desviando la caída de los móviles más de lo que, en un aire quieto, se hubieran desviado! Los experimentos se hicieron en torres con ventanas, en pozos con salidas laterales. Quizá incluso en contra de flujos de aire por "efecto de chimenea". Que se nos perdone: los experimentos sólo han medido clinámenes lucrecianos. Es preciso reproducirlos y hacer otros con un control riguroso de esos golpes de azar para poder aseverar que la teoría de caída in vacuo es buena para explicar deflexiones en aire. De ello trataremos en otro estudio.

## REFERENCIAS

1. Véase Tito Lucrecio CARO. La Naturaleza de las Cosas, Libro II, traducción Marchena en Ed. Espasa-Calpe, Madrid, 1943. Allí mismo se pueden consultar las Cartas de Epicuro a Heródoto, Meneceo y Pitocles, o bien, véase en Diógenes Laercio, Vidas de Filósofos Ilustres, Libro X.
2. Véase por ejemplo: Max Planck, General Mechanics, Vol. I de Introduction to Theoretical Physics, 61, 62, 63, 64; Ed. MacMillan, Londres, 1933. O véase Goldstein, Classical Mechanics, sección 4.9, Ed. Addison-Wesley, 1964. O bien, véase Kittel, Knight, Rutherman, Mecanics, Vol. I del Berkeley Physics Course, Ed. McGraw-Hill, 1965. O, en American Journal Physics, Vol. 51 (1983), pag. 236 y 257, los trabajos de Sterling y Potgieter: estos autores usan un sistema de referencia inercial para estudiar la caída; y la deflexión se calcula componiendo lo obtenido con el giro de la tierra. Para nada se considera resistencia del aire.
3. Véase American Journal Physics, Vol. 51, pag. 683 para una bibliografía sobre esos experimentos.