

Un modelo bidimensional en elementos finitos para la simulación hidrodinámica en regiones cercanas a la costa

Por: Francisco Mauricio Toro B.
Profesor Asistente
Postgrado en Aprovechamiento de Recursos
Hidráulicos
Facultad de Minas

0. RESUMEN

El presente artículo presenta la solución numérica, utilizando el método de los Elementos Finitos, de las ecuaciones resultantes al integrar las ecuaciones de Navier-Stokes a lo largo de la profundidad. Se presentan ejemplos de interés académico y de interés ingenieril que muestran las bondades del modelo y su solución numérica. También se mencionan algunas de las restricciones más importantes que presenta el modelo. Por último se presentan algunos comentarios referentes a la complementación del modelo, para cubrir un mayor campo de aplicabilidad, y referentes al estado de avance en que se encuentra esta área de las técnicas numéricas aplicadas a la solución de problemas en el área de la Hidrodinámica.

1. PRESENTACION

Con el presente artículo se pretende ilustrar la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando una de las técnicas numéricas más utilizadas hoy en día: Los Elementos Finitos.

El problema a resolver hace referencia a la simulación de ondas en aguas poco profundas (mareas en regiones cercanas a la costa) utilizando las Ecuaciones de Navier-Stokes [4]. El modelo propuesto es bidimensional, esto es, las Ecuaciones de Navier-Stokes se integran a lo largo de la profundidad (la vertical) obteniéndose, por tanto, los valores medios de las variables en la vertical (la distribución de velocidades en la vertical es constante).

La solución numérica de este modelo se logra mediante la técnica de los Elementos Finitos: el dominio de solución se divide en pequeños subdominios en los cuales se aproximan las ecuaciones del modelo. Se aplica el método de los Residuos Ponderados, específicamente el

método de Galerkin, a las ecuaciones en cada subdominio (Elemento) con el objeto de transformar las ecuaciones del modelo en un conjunto de ecuaciones algebraicas para cada elemento.

Finalmente se ensambla dicho conjunto de ecuaciones en un sistema global, que tiene en cuenta las contribuciones de cada elemento, y se aplican las correspondientes condiciones de borde para obtener la solución particular buscada.

2. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES Y SU INTEGRACION A LO LARGO DE LA PROFUNDIDAD.

La Ecuación de Continuidad de masa y las ecuaciones del equilibrio de fuerza en las tres direcciones del sistema de coordenadas cartesianas se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u, v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u, w)}{\partial z} - \rho f_v \\ = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \Upsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Upsilon_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Upsilon_{zx}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v, v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v, w)}{\partial z} + \rho f_u \\ = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \Upsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Upsilon_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Upsilon_{zy}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$



$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \cdot w)}{\partial z} +$$

$$2\rho(W_x V - W_y U)$$

$$= - \frac{\partial P}{\partial Z} - \rho g + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial Z} \quad (4)$$

En donde:

u,v,w: componentes de las velocidades en los ejes x, y y z respectivamente

ρ : densidad del fluido en consideración.

P: Presión

T: Tensión de cizalladura

f: Coeficiente de coriolis

W_x, W_y: Componentes de la velocidad de rotación de la tierra.

Estas ecuaciones se aplican a un sistema de coordenadas cartesianas en el cual el eje X indica la dirección Este, el eje Y indica la dirección Norte y el eje Z indica la dirección vertical.

A continuación se presentan algunos detalles del desarrollo que nos conduce al modelo bidimensional: modelo tridimensional integrado a lo largo de la profundidad. La integración, a lo largo de la profundidad, del sistema de ecuaciones (1), (2), (3), (4) requiere las siguientes condiciones de borde para el caso en consideración:

La velocidad en la superficie libre:

$$w = \frac{D(Z)}{D(t)} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial(\eta)}{\partial t} + \frac{u\partial(\eta)}{\partial x} + \frac{v\partial(\eta)}{\partial y} \quad (5)$$

la velocidad en el fondo:

$$w = \frac{D(Z)}{D(t)} \Big|_{z=\xi} = \frac{\partial(\xi)}{\partial t} + u \frac{\partial(\xi)}{\partial x} + v \frac{\partial(\xi)}{\partial y} \quad (6)$$

la tensión de cizalladura en la superficie libre:

$$T_x^s = -T_{xx} \frac{\partial(\eta)}{\partial x} - T_{yx} \frac{\partial(\eta)}{\partial y} + T_{zx} \quad (7)$$

$$T_y^s = -T_{xy} \frac{\partial(\eta)}{\partial x} - T_{yy} \frac{\partial(\eta)}{\partial y} + T_{zy} \quad (8)$$

La tensión de cizalladura en el fondo:

$$T_x^f = -T_{xx} \frac{\partial(\xi)}{\partial x} - T_{yx} \frac{\partial(\xi)}{\partial y} + T_{zx} \quad (9)$$

$$T_y^f = -T_{xy} \frac{\partial(\xi)}{\partial x} - T_{yy} \frac{\partial(\xi)}{\partial y} + T_{zy} \quad (10)$$

Ahora, la integración a lo largo de la vertical se hace utilizando el teorema de Leibniz, para intercambiar el orden de la integración y la diferenciación. Así, por ejemplo, la ecuación de continuidad tomará la forma:

$$\int_{\xi}^{\eta} \frac{u}{\partial t} \frac{\partial(\rho)}{\partial z} dz + \int_{\xi}^{\eta} \frac{\eta}{\partial x} \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} dz + \int_{\xi}^{\eta} \frac{\eta}{\partial y} \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} dz + \int_{\xi}^{\eta} \frac{\eta}{\partial z} \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz = 0$$

o después de aplicar la regla de Leibniz y considerando ρ constante:

$$\rho \frac{\partial(\eta - \xi)}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{\xi}^{\eta} u dz + \rho \frac{\partial}{\partial y} \int_{\xi}^{\eta} v dz - \rho \left(\frac{\partial(\eta)}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w \right) + \rho \left(\frac{\partial(\xi)}{\partial t} + u \frac{\partial(\xi)}{\partial x} + v \frac{\partial(\xi)}{\partial y} - w \right) = 0$$

Finalmente se obtiene, después de aplicar las condiciones de borde (5) y (6):

$$\frac{\partial(h)}{\partial t} + \frac{\partial(q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(q_y)}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

donde:

$$q_x = \int_{\xi}^{\eta} u dz \quad y \quad q_y = \int_{\xi}^{\eta} v dz \quad \text{con } h = \eta - \xi$$

η : cota superficie libre;

ξ : cota fondo

De una manera análoga se procede a integrar (2) y (3) a lo largo de la profundidad. Se aplican, en este caso, las condiciones de borde (7), (8), (9), (10). El término de

presión en (2) y (3) se integra a partir de las suposiciones de ondas de aguas poco profundas que transforman a (4) en la ley hidrostática:

$$P = P_0 + \rho gh$$

con P_0 = presión en la superficie libre

h = profundidad del flujo

con estas consideraciones, la forma que alcanza (2) es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q_x)}{\partial t} + \frac{\partial(uq_x)}{\partial x} + \frac{\partial(uq_y)}{\partial y} - fq_y + gh \frac{\partial(\eta)}{\partial x} \\ = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\Upsilon_{xx}^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\Upsilon_{yx}^*)}{\partial y} \right] - \frac{1}{\rho} \left[T_x^s - T_x^f \right] \quad (12) \end{aligned}$$

en donde:

$$\frac{1}{\rho} T_x^f = \frac{g}{C^2} \cdot (u^2 + v^2)^{1/2} \cdot u$$

$\frac{1}{\rho} T_x^s$ = alguna forma específica para evaluar la fricción entre la superficie y la atmósfera

C : factor de fricción de Chezy

El término $\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\Upsilon_{xx}^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\Upsilon_{yx}^*)}{\partial y} \right]$ evalúa la fricción interna entre las "capas" de fluido y se debe básicamente a efectos de viscosidad del fluido. Tal término se representa de una manera simple mediante los dos modelos propuestos a continuación que depende del régimen de flujo que se tenga:

Flujo laminar:

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\Upsilon_{xx}^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\Upsilon_{yx}^*)}{\partial y} \right] = \vartheta h \nabla^2(u) \quad (13)$$

Flujo turbulento:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\Upsilon_{xx}^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\Upsilon_{yx}^*)}{\partial y} \right] \\ = Eh^2(u^2 + v^2)^{1/2} \nabla^2(u) \quad (14) \end{aligned}$$

donde:

ϑ : viscosidad del fluido

E : coeficiente de vorticidad

∇^2 : operador vectorial Laplaciano,

La ecuación de momentum en la dirección Y toma una forma similar a (12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q_y)}{\partial t} + \frac{\partial(vq_x)}{\partial x} + \frac{\partial(vq_y)}{\partial y} + fq_x + gh \frac{\partial(\eta)}{\partial y} = \\ + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\Upsilon_{xy}^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\Upsilon_{yy}^*)}{\partial y} \right] + \frac{1}{\rho} \left[T_y^s - T_y^f \right] \quad (15) \end{aligned}$$

En este punto se tiene el modelo bidimensional (flujo en el plano YX) con 3 incógnitas (u, v, h) que se solucionará al resolver simultáneamente (11), (12) y (15).

A continuación se ilustra la aplicación del método de los Elementos Finitos a la solución de problemas gobernados por un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

3. SOLUCION POR ELEMENTOS FINITOS: EL METODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS

El método de los Residuos Ponderados [8] se aplica en dos pasos como se indica a continuación. En el primer paso las variables dependientes se expresan como una serie de funciones conocidas con coeficientes desconocidos; de esta manera al reemplazar dichas expansiones en la ecuación original se obtiene un residuo que se busca sea nulo, en promedio, para todo el dominio, completándose así el segundo paso. Para ser más específicos, definimos un fenómeno físico que puede ser modelado por la ecuación diferencial.

$$L(\phi) - f = 0 \quad (16)$$

donde:

ϕ : campo de variables dependientes

L : operador diferencial

f : función conocida de las variables dependientes

el dominio de solución es el conjunto D encerrado por contorno Σ en donde se aplican las condiciones de borde que debe satisfacer la solución de (16).

$$\text{Sea } \phi \approx \tilde{\phi} = \sum_{i=1}^m (N_i C_i) \quad (17)$$

en donde:

N_i = funciones conocidas (asumidas) y utilizadas para "interpolar" el valor de las variables dependientes.

C_i = parámetros utilizados en la interpolación. En general coinciden con la variable dependiente a determinar.

Luego esta expansión se lleva a (16):

$$L(\tilde{\phi}) - f = R \neq 0$$

en donde R representa el residuo que se obtiene al hacer la interpolación (17). El objetivo es hacer que R sea nulo, en promedio, en todo el Dominio D :

$$\int_D W_i \left[L(\tilde{\phi}) - f \right] dD = 0 \quad (18)$$

en donde W_i representa una función de ponderación que hasta este punto es arbitraria como lo son las funciones de interpolación N_i .

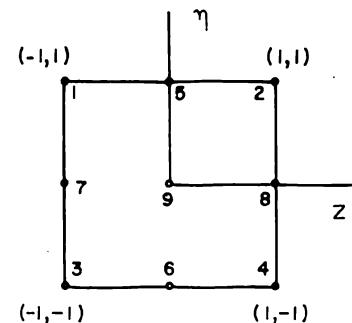
Un caso particular del método de los residuos ponderados es el método de Galerkin, en el cual la función de ponderación W_i se hace igual a la función de interpolación N_i .

A continuación se describe el método completo a manera de resumen. En primer lugar se divide el Dominio físico del problema en una malla de elementos (subdominios) de forma arbitraria en los cuales las ecuaciones (11), (12), (13), (14) y (15) se aproximan. Luego se escogen las funciones N_i que interpolan las variables dependientes en cada elemento y se aplica finalmente el método de Galerkin a cada elemento. La solución buscada resulta al ensamblar el sistema global teniendo en cuenta la contribución de cada elemento.

La precisión de la solución depende en gran parte del tipo de funciones de interpolación escogidas. Es práctica común escoger dichas funciones como funciones que dependen únicamente de las coordenadas espaciales. Es importante mencionar en este punto el problema de la continuidad entre elementos: continuidad de la función y de sus primeras derivadas, etc. Hay problemas que requieren que las funciones de interpolación garanticen no sólo la continuidad de la función sino la de varias de sus derivadas lo que hace que aquéllas sean de una forma muy especial. Son comunes los polinomios de Lagrange para garantizar la continuidad de la función solamente y los

polinomios de Hermite para garantizar la continuidad de la primera derivada y de la función.

En este caso particular, simulación de ondas en aguas poco profundas, se utilizaron las funciones bidimensionales biquadráticas de Lagrange:



- Nodos de las esquinas:

$$N_i = \frac{1}{4} ZZ_i (1 + ZZ_i) \eta \eta_i (1 + \eta \eta_i)$$

- Nodos con $Z_i = 0$:

$$N_i = \frac{1}{2} \eta \eta_i (1 + \eta \eta_i) (1 - Z^2)$$

- Nodos con $\eta_i = 0$:

$$N_i = \frac{1}{2} ZZ_i (1 + ZZ_i) (1 - \eta^2)$$

- Nodo interior:

$$N_i = (1 - Z^2) (1 - \eta^2)$$

Obsérvese que N_i están definidas de tal forma que:

$$N_i(Z_i, \eta_j) = 0 \quad \text{Si } i \neq j \text{ y } N_i(Z_i, \eta_j) = 1 \quad \text{Si } i = j$$

Nótese que la utilización de las funciones de interpolación definidas anteriormente, implica una transformación de sistema de coordenadas.

Ahora, a manera de ejemplo, se escribirán las ecuaciones diferenciales obtenidas al aplicar el método de Galerkin a la ecuación de continuidad (11):

Sea:

$$X = \sum_{i=1}^9 (N_i X_i); \quad Y = \sum_{i=1}^9 (N_i Y_i); \quad q_x = \sum_{i=1}^9 (N_i (q_x)_i)$$

$$q_y = \sum_{i=1}^9 (N_i (q_y)_i); \quad h = \sum_{i=1}^9 (N_i h_i)$$

Luego:

$$\sum_{k=1}^{NELEM} \left\{ \int_A N_i N_j \frac{dh}{dt} dA + \int_A N_i \frac{\partial(N_j)}{\partial x} (q_x) dA + \int_A N_i \frac{\partial(N_j)}{\partial y} (q_y) dA \right\} = 0 \quad (19)$$

con:

NELEM = número de elementos en que se ha dividido el Dominio D.

Obsérvese que en el primer término de (19) la derivada con respecto al tiempo no afecta a N_i pues por definición la función de interpolación sólo depende de las coordenadas espaciales. También es importante notar la forma de la ecuación (19): tal forma muestra claramente la transformación de la ecuación original en derivadas parciales a un conjunto de ecuaciones en derivadas ordinarias de primer orden que ha de ser resuelto simultáneamente.

Las ecuaciones de momentum (12) y (15) con (13) y (14) se pueden transformar al conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de una manera análoga e ilustrada con la ecuación de continuidad. Su forma se omite aquí por falta de espacio.

El arreglo final del sistema toma la forma:

$$[M] \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = \{f\} \quad (20)$$

donde

[M]: matriz de coeficientes

X: vector de variables dependientes u, v, h

[f]: vector de términos definido por los términos de las ecuaciones que no contienen la derivada respecto al tiempo.

Obsérvese que la matriz [M] no depende de la coordenada temporal, hecho que trae ventajas desde el punto de vista computacional: sólo se requiere calcularla una vez lo mismo que su inversa.

Para la solución del sistema (20) se pueden utilizar diversos esquemas: aproximaciones en diferencias finitas, los métodos Runge-Kutta, [1], etc. Entre los más utilizados se encuentran los métodos Runge-Kutta, especialmente el de 4o. orden, pero llevan consigo la desventaja del gran esfuerzo computacional que requieren. En este trabajo se utilizó con gran éxito la aproximación de segundo orden:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{X_{t+\Delta t} - X_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (21)$$

Obteniéndose, entonces, el siguiente esquema de solución:

$$X_{t+\Delta t} = X_{t-\Delta t} + 2\Delta t [M]^{-1} [f] \quad (22)$$

la estabilidad numérica de este esquema está gobernada por el criterio de Courant-Friedrichs-Lowy [6]:

$$\Delta t \leq \Delta t_c = \frac{\Delta S}{(2gh)^{1/2}}$$

en donde:

ΔS : mínima distancia entre dos nodos consecutivos

h: máxima profundidad calculada en el dominio D.

g: aceleración de la gravedad.

En los casos resueltos mediante el esquema (22) se controló la estabilidad al utilizar $\Delta t = \frac{\Delta t_c}{2}$

4. EJEMPLOS NUMERICOS

En este numeral se presentarán 3 casos resueltos. El primer caso es el de la solución para una onda en un canal recto y horizontal. Como condiciones de borde se usaron: a la entrada del canal la profundidad del flujo se asigna como una función senoidal en el tiempo, en la pared del extremo opuesto a la entrada del canal las velocidades u y v se asignan como nulas y en las paredes laterales se asigna como nula la velocidad normal al eje del canal. En la Figura 1 se muestra la distribución de velocidades para el tiempo igual a 6 períodos de onda, en la Figura 2 se muestra la variación de la profundidad en el tiempo para un punto localizado en el eje del canal y sobre la pared opuesta a la entrada al canal. Obsérvese en la Figura 1 la distribución de velocidades que es básicamente unidimensional, hecho de esperarse dadas las condiciones de borde que se utilizaron

El segundo caso ilustra la simulación de una marea semidiurna en la Bahía de Massachusetts, Estados Unidos. Las características de la onda de marea utilizadas fueron:

Período de la onda: 12,5 horas

Amplitud de la onda: 1,25 - 1,21 m

Δt_c : 112,0 S

Δt : 45,0 S



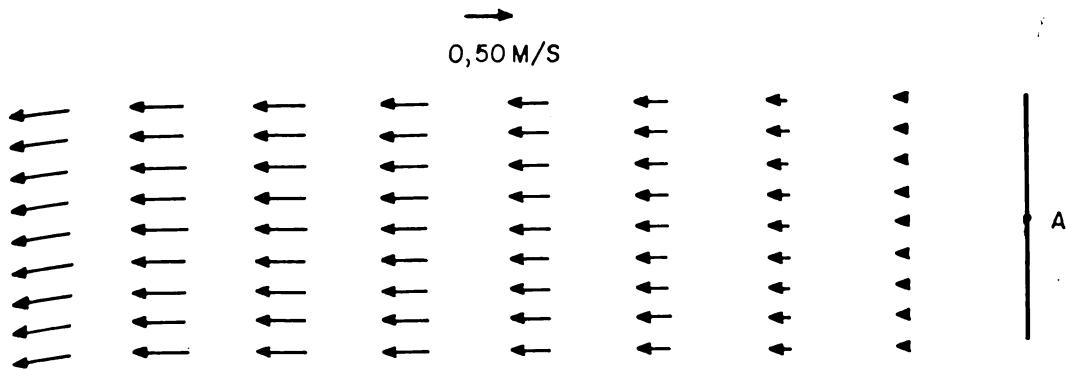


Figura 1. Canal recto y horizontal. Distribución de velocidades.

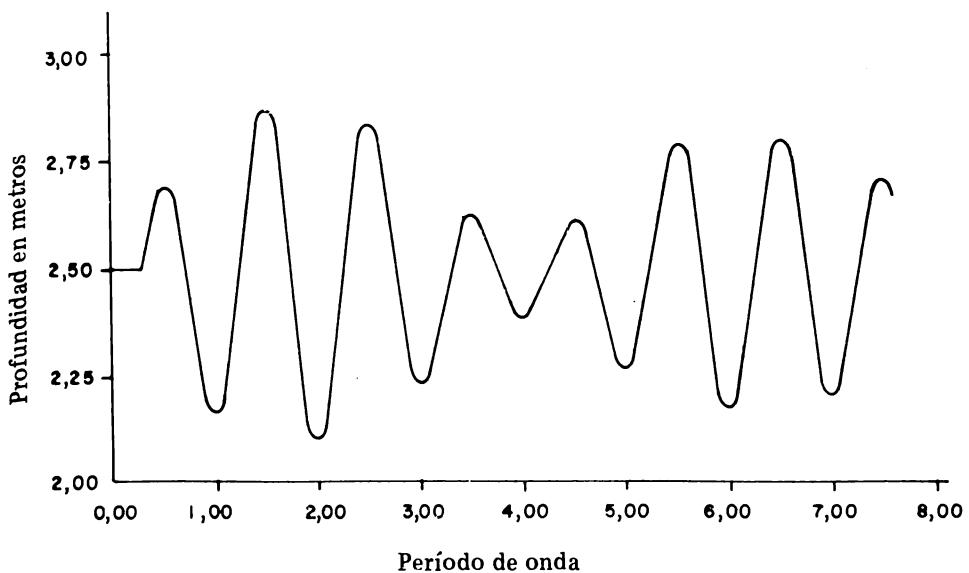


Figura 2. Canal recto y horizontal. Variación de las profundidades con el tiempo para el punto A.

En este caso, el fondo de la Bahía se supuso plano, con una profundidad media de 20,0 m. En las Figuras 3 y 4 se muestran las distribuciones de velocidades para los instantes de marea baja y marea alta correspondientes al segundo período de onda de la simulación.

Este caso se simuló hasta el tercer período de onda con el fin de verificar que el efecto de las condiciones iniciales (cero velocidades en todo el dominio) ya no tiene importancia: se nota periodicidad en los resultados para el intervalo de cálculo entre el segundo y tercer período de onda. Las condiciones de borde en este caso fueron la asignación de la profundidad como una función cosenoidal a la entrada de la bahía y la asignación de velocidad cero (0) a lo largo de la línea costera.

El tercer y último caso presenta los resultados de la simulación de la marea diurna que se presenta en la Bahía de Mobile en la Costa del Golfo de México, estado de Alabama, de los Estados Unidos. En este caso, la bahía presenta dos bocas, una que comunica la bahía con el Golfo de México directamente y la segunda boca que comunica la bahía con una zona de baja profundidad limitada por las islas del sistema "Mississippi Sound". La simulación hecha consideró además la batimetría de la bahía obtenida de cartas de navegación actualizadas y de los datos de caudales entregados a la bahía por el Río Mobile en el extremo Norte de la bahía (parte superior en las Figuras 5 y 6). Los resultados del modelo fueron verificados mediante la comparación de las profundidades con las obtenidas en varias estaciones colocadas en

BAHIA DE MASSACHUSETTS

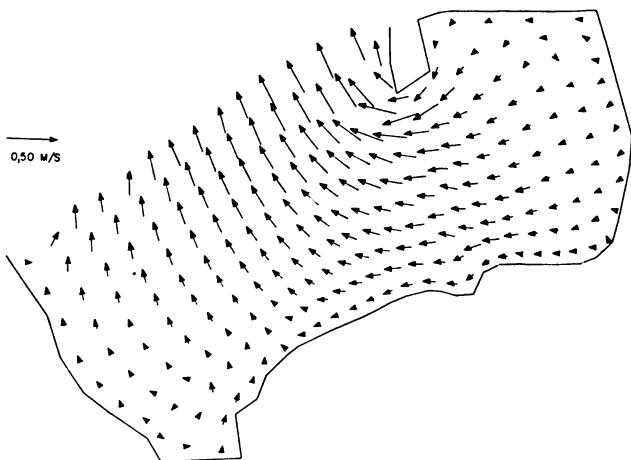


Figura 3. Distribución de velocidades para marea baja.

BAHIA DE MASSACHUSETTS

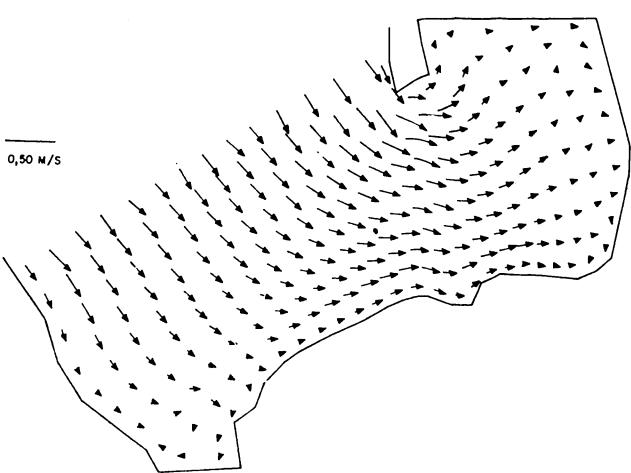


Figura 4. Distribución de velocidades para marea alta.

varios sitios de la bahía. En las figuras 5 y 6 se muestran las distribuciones de velocidad para dos instantes de tiempo correspondientes a la marea baja y a la marea alta. Como en el caso anterior, las condiciones de borde especifican la profundidad del flujo en las dos bocas de la bahía y velocidades nulas a lo largo de la línea costera.

5. COMENTARIOS FINALES

En este último numeral se presentan, a manera de resumen, las principales limitaciones del modelo. Tales limitaciones no opacan las bondades del modelo, bondades que fueron ilustradas con ejemplos ya mencionados en el numeral anterior.

En primer lugar se hace imperante recordar que el modelo es válido para la simulación de ondas en aguas

BAHIA DE MOBILE

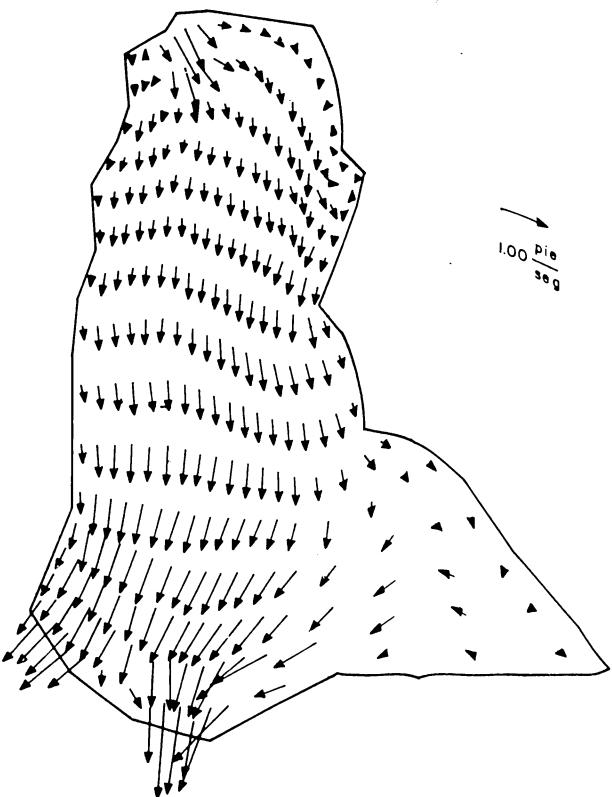


Figura 5. Distribución de velocidades para marea baja.

BAHIA DE MOBILE

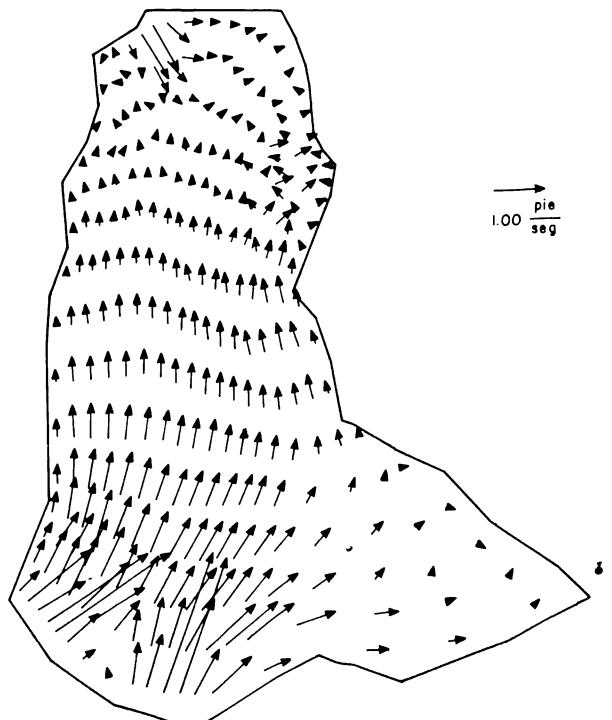


Figura 6. Distribución de velocidades para marea alta.



poco profundas, esto es, la longitud de onda es mucho mayor que la profundidad media. Cuando esta condición no se cumple su efecto se muestra en la inestabilidad numérica de la solución. También es necesario tener presente que la distribución de velocidades en la vertical es constante y por eso se habló de un modelo bidimensional. En cuanto a la solución numérica, es importante mencionar la presencia de unas oscilaciones de pequeña longitud de onda que afecta a los valores de nodo a nodo, este efecto se hace más notorio cuanto más irregular es el fondo del medio a simular. Estas oscilaciones se han logrado controlar mediante el planteamiento de las ecuaciones de una manera diferente y utilizando esquemas especiales para realizar la integración en el tiempo, para mayores detalles ver la referencia [2].

Con base en los ejemplos presentados en el numeral anterior, las bondades del modelo se muestran evidentes. En las aplicaciones hidrodinámicas el modelo predice acertadamente corrientes y patrones de flujo. Si se hace necesario un mayor detalle en la simulación (flujos estratificados, por ejemplo) se puede utilizar el modelo de varias capas que viene a ser la aplicación del modelo aquí propuesto a cada capa del dominio, aplicando las correspondientes condiciones de compatibilidad entre dos capas adyacentes. Cualquiera de los dos modelos acabados de mencionar permite simular el transporte de sedimentos y de contaminantes, simular los fenómenos de variación de salinidad en un estuario, etc. Para este tipo de simulación se requiere una ecuación adicional —la ecuación de difusión que representa el fenómeno del transporte— a las ecuaciones que representan el fenómeno hidrodinámico propuestas en este artículo. Las aplicaciones de este modelo bidimensional en ingeniería son obvias e innumerables.

Cuando el grado de sofisticación del estudio a realizar lo exige se pueden obtener los modelos tridimensionales y cuasitridimensionales actualmente en desarrollo [5]. Aunque dichos modelos simulan el fenómeno físico más

acordemente con la realidad (menos restricciones), en algunos casos no justifican sus resultados por los costos que lleva consigo el montarlos y calibrarlos.

Por último cabe notar la importancia que presentan estos modelos matemáticos y sus soluciones numéricas para la ingeniería. Estos modelos se muestran como una alternativa en muchos casos, más económica que los métodos convencionales de estudio: los modelos físicos a escala. Las ventajas de la simulación matemática sobre la simulación por medio de modelos a escala son evidentes: la gran cantidad de información que entrega un modelo matemático que supera a la información que entrega un modelo físico a escala.

REFERENCIAS

- [1] Carnahan, B., Luther, H.A., Wilkes, J.O. "Applied Numerical Methods", John Wiley and Sons, New York, 1969.
- [2] Gray, W.G., Lynch, D.R., "On the Control of the Noise in Finite Element Tidal Computations: A semi-Implicit Approach", Computer and Fluids, Vol. 7, 1979, pp. 46-47.
- [3] Kawahara, M., Kabayashi, M., Nakata, K., "Multiple Level Finite Element Analysis and its Applications to Tidal Current Flow in Tokyo Bay", Applied Mathematical Modelling, Vol. 7, 1983.
- [4] Tietjens, O.G., "Fundamentals of Hydro-and Aeromechanics", Chapter XV, Dover Publications Inc, New York, 1957.
- [5] Toro, F.M., "A Two Dimensional Finite Element Model for Coastal Hydrodynamic Simulation", M.S. thesis, the University of Mississippi, May 1985.
- [6] Su, T.Y., "Computer Simulation of Sediment Transport", Ph.D. Dissertation, The University of Mississippi, 1980.
- [7] Wang, J.D., Connor, J.J., "Mathematical Modeling of Near Coastal Circulation", M.I.T. Raph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, report No. 200, 1975.
- [8] Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method", Chapter III, McGraw-Hill Book Company, 3rd. edition, 1982.