

Problemas

Por: Oscar Mesa S.*

1. SOLUCION AL PROBLEMA DEL NUMERO ANTERIOR

Problema 1. Se requiere encontrar el número esperado de vigas de madera que se fallan si cada una de las vigas de un lote de tamaño n se ensaya de acuerdo al siguiente esquema: 1) la primera viga se falla, anotando su resistencia, que llamaremos la resistencia, R , de la más débil de las vigas hasta ahora analizadas. 2) Las demás vigas son ensayadas hasta alcanzar la carga R o hasta fallar, dependiendo cuál de las dos condiciones se presenta primero. En el segundo caso se actualiza el valor de R .

Solución. Sea $E(n)$ el valor esperado buscado. Evidentemente si $n = 1$, $E(1) = 1$. Ahora $E(n)$ es igual a $E(n - 1)$ más la probabilidad de que la última viga analizada falle. Esta probabilidad es $1/n$, puesto que la última viga falla sí y sólo si ella es la más débil; lo que es equivalente a escoger un objeto específico (una bola roja) de un conjunto de n objetos ($n - 1$ bolas negras y una bola roja). Por lo tanto:

$$E(1) = 1$$

$$E(n) = E(n - 1) + 1/n$$

Fácilmente se muestra que $E(n)$ tiene por solución.

$$E(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} ,$$

que es una serie armónica. Evidentemente $E(n)$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito pero lo hace muy lentamente. Por ejemplo $E(10) = 2,9$; $E(100) = 5,2$; $E(1000) = 7,5$; $E(1.000.000) = 14,4$. Como puede observarse, el método puede ser atractivo para algunos ensayos destructivos en el que es necesario tener certeza de la "resistencia" del miembro más débil de un lote. La varianza y otras propiedades de la variable aleatoria número de vigas falladas son conocidos (Click, 1978). Aplicaciones adicionales del anterior cálculo son por ejemplo:

- Comprobación de independencia y aleatoriedad de observaciones climatológicas, mediante conteo del nú-

mero de veces que la marca (Máximo o mínimo) sea batida.

- Estimación de percentiles de distribuciones, con aplicaciones a límites de tolerancia.

Más información puede ser encontrada en la referencia citada.

2. PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 2. El siguiente problema fue propuesto por Einstein a su hijo cuando éste tenía 14 años. Einstein hijo posteriormente confesó que éste fue su primer contacto con la teoría de probabilidad y sus aplicaciones al análisis de problemas físicos, área en la que luego aportó importantes contribuciones con sus estudios sobre el movimiento de sedimentos en corrientes de agua. El enunciado del problema original era únicamente: ¿cuánto se demora la lluvia para mojar un patio de área conocida e inicialmente seco?

Se espera que el lector complete el enunciado del problema con suposiciones razonables como la de que cada gota moja un área circular de $a \text{ cm}^2$ y de que las gotas caen aleatoriamente a una intensidad constante conocida. Evidentemente, nada garantiza que una nueva gota siempre caiga en un espacio seco.

3. AVISO

Se recibieron muchas soluciones al problema 1, casi todas correctas. Por falta de espacio no se publica la lista de los autores.

Es gratificante informarles que una empresa consultora de la ciudad ha ofrecido donar un premio a la mejor de las soluciones recibidas a cada problema. Mayores detalles se presentarán en el próximo número, pero el premio vale desde éste.

REFERENCIA

CLICK, NED. Breaking Records and Breaking Boards. The American Mathematical Monthly, 85 (1): 3-26, 1978.

* Profesor Facultad de Minas.