LA SIMILITUD EN LOS ENSAYOS EN MODELOS HIDRAULICOS FLUVIALES (EXTRACTOS)

DISCUSION DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y DE SUS APLICACIONES

Para determinar las 13 variables resumidas en el cuadro 1, tenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

I* $x = \lambda^2 . \tau^{-2}$ V* $\alpha = \xi . x^{2/3} . \lambda^{2/3} . \delta^{-1} \tau^{-2/3}$

II* $\mu = x . \phi . \lambda$ VI* $\alpha = \beta . \gamma^{2/3} . \delta^{-1}$

IV* $\lambda \tau^{-1} = \zeta . \delta^{-1/6} . \xi . x^{2/3}$ VII* $\eta . \lambda . x = \gamma . \theta$

Y además, las igualdades simbólicas:

(6) $\zeta = f_1$ (material. d, γe) (8) $\beta = f_3$ (material d, γe)

(7) $\alpha = f_2$ (material. d, γe) (9) $\eta = f_4$ (material, d)

Se tiene pues para las trece variables, diez ecuaciones de condición, es decir que tres variables pueden ser escogidas arbitrariamente.

Infortunadamente, una discusión general del sistema no daría una idea justa de las posibilidades prácticas, de suerte que es racional hacer ciertas simplificaciones que corresponden a la técnica de los modelos reducidos.

Si se tiene en mente la ejecución de un ensayo en modelo reducido, se establece siempre de antemano un cierto número de hipótesis sobre la naturaleza de los materiales que deberán emplearse en el modelo.

Así, p. e., la substancia del material aluvial para el modelo, se considera como un dato. A continuación se toma una decisión sobre el empleo de un material de diámetro homogéneo o por el de una mezcla reproducida en forma análoga a la naturaleza. El grosor del grano (d ó δ) puede también considerarse como dato suministrado por la experiencia desde el punto de vista del orden de magnitud; finalmente, las dimensiones aproximadas del modelo (τe) vienen dadas normalmente por las condiciones de ocupación de espacios. Se puede pues considerar las cuatro magnitudes: ξ , α , β , η , como constantes susceptibles de ser determinadas mediante ensayos previos, de tal manera que el problema se reduce al de un sistema con seis ecuaciones y nueve incógnitas.

De entre las nueve incógnitas. (τ) es una magnitud que no puede ser medida directamente a partir del ensayo. Pero se puede reemplazar (τ) por (ε), ó (ψ) según las igualdades (1) ó (2). Aunque (ε) puede ser bien controlada por comparación de las velocidades medias en la naturaleza y en el modelo, se introduce (ψ) como nueva variable en lugar de (τ) porque (ψ), como relación de los caudales totales de agua (escala de caudales), representa una magnitud muy importante desde el punto de vista de la técnica de los ensayos y sobre la cual se puede actuar directamente. Los factores de transposición buscados son así:

$$\lambda \, . \, \phi \, , \, \chi \, , \, \xi \, , \, \psi \, , \, \theta \, , \, \gamma \, , \, \mu \, , \, \delta \, ,$$

Y se obtienen las ecuaciones de condición correspondientes reemplazando según la igualdad (2) a (τ) por:

$$\frac{\chi \, . \, \phi \, . \, \lambda}{\psi}$$

En el anterior sistema (10) de ecuaciones.

El sistema de ecuaciones (11) así modificado se resume en el **cuadro 2:** Para que éste sea completo se han indicado las ecuaciones para determinación de (τ) y de (ε) [ecuaciones (1) y (2)] así como las cuatro ecuaciones simbólicas (6) a (9).

A fin de poder discutir brevemente este sistema de ecuaciones, han sido marcadas con una cruz las variables que figuran en las diversas ecuaciones del cuadro 2.

CUADRO II — SISTEMA (11)

Las variables (μ) y (θ) que sólo figuran en las ecuaciones *II** y *VII** respectivamente, deben ser calculadas a partir de éstas.

Para las tres variables que deben ser escogidas arbitrariamente, existen ciertas restricciones: Es así como p.e., las dos magnitudes que hacen relación a los materiales (δ) y (γ) no pueden ser escogidas ambas ya que en la igualdad VI* figuran juntas como variables únicas. Igual cosa sucede según la ecuación I* para las tres variables (ψ), (χ) y (ϕ).

Del hecho de que solo 3 factores de transposición pueden ser escogidos arbitrariamente, es decir, por ejemplo, máximo tres de los cuatro valores geométricos (λ), (ϕ), (χ) y (ξ), en general, no será posible obtener un modelo no distorsionado y sinembargo correspondiente.

La cuestión de saber en qué circunstancias es posible un modelo no distorsionado aún si se emplean materiales aluvionarios de peso específico menor en el modelo, puede ser resuelto con la ayuda del siguiente sistema de ecuaciones:

Si en las igualdades I* a VII* se toma:

$$\lambda = \phi = \chi$$

$$\xi = 1$$

Al resolver las ecuaciones se obtienen las tres condiciones para el modelo no distorsionado; en efecto, se debe tener:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} \qquad \xi = \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{1/6}$$

$$\theta = \lambda^{1/2} \cdot \eta \cdot \beta^{3/2}$$

Las dos constantes de los materiales (α) y (ξ) deberían pues variar justamente de tal manera que la influencia de la escala de los aluviones, diferente de la escala de longitudes, desaparezca. La escala de los tiempos (θ) que normalmente según Froude sería (λ ½), recibe la corrección ($\eta \cdot \beta^{3/2}$), la cual, por ejemplo para polvo de carbón, es aproximadamente igual a 19. Pero, desafortunadamente, no es posible tener influencia sobre (α) y (ξ) en el intervalo indicado, de tal manera que en los ensayos con materiales de peso específico menor se está siempre obligado a introducir una distorsión.

Mientras que es prácticamente imposible obtener en modelo con materiales de peso específico menor una reproducción no distorsionada de la naturaleza, existe sin embargo otra posibilidad de ventajosa reproducción. Es el modelo no distorsionado pero **BASCULADO**, en el cual se tiene:

$$\lambda = \phi = \chi \text{ , pero } \xi \neq 1$$

Antes de considerar de manera detallada esta forma de reproducción, se pasa a tratar el caso más general y más frecuente en la construcción práctica de modelos.

Se supone de nuevo que el material aluvial que se empleará en el modelo, así como sus constantes, a saber (ξ), (α), (β) y (η), se conocen de antemano. A partir de las nueve variables, se escogen luego las dimensiones del modelo en planta, es decir, (λ) y (ϕ).

Normalmente se admite $\lambda = \phi$, es decir, que se tiene una configuración en planta no distorsionada; no obstante, por el momento no se establecerá esta hipótesis.

Como tercera variable para escoger arbitrariamente, se toma el grosor de los materiales, es decir, (δ)

Si ahora se calculan, según las 6 ecuaciones del cuadro II, los seis factores de transposición faltantes, se obtiene el sistema de ecuaciones de la columna 1 del cuadro III. Con el fin de que la presentación sea completa, es necesario indicar además (τ°) y ($\in$) así como las relaciones de otras magnitudes compuestas, (fuerzas, presiones, alimentación de materiales, caudales sólidos). A partir de estas igualdades se pueden determinar los otros factores de transposición, una vez que han sido escogidos (λ), (ϕ) y (δ); al respecto, es interesante anotar que (ξ) es independiente de la escogencia del diámetro de los aluviones.

CUADRO III

Para el caso particular del modelo no distorsionado pero basculado, se escoge primero $\phi = \lambda$; pero, para que se tenga también $\chi = \lambda$, es necesario que (δ), según la primera ecuación de la columna 1, cuadro III, se escoja de manera que se tenga:

$$\delta = \lambda \cdot \xi^{-3} \cdot \alpha^{-3/2}$$

con esto, todos los otros factores de transposición quedan también determinados y se obtiene para esta representación no distorsionada pero BASCULADA (inclinada), el sistema de ecuaciones de la columna 2 del cuadro III.

Con el fin de permitir comparaciones se indica así mismo en la columna 3 los factores de transposición para el modelo geométricamente no distorsionado y con materiales aluvionarios de igual peso específico que en la naturaleza, es decir, para:

$$\alpha = \beta = \eta = 1 \ ; \quad \xi = 1 \ \textit{(admitido)}.$$

Se constata que, con excepción de la pendiente ( ), las otras magnitudes puramente hidráulicas: , , , , así como también la relación de fuerzas y de presiones no han cambiado para el modelo no distorsionado pero basculado (inclinado)—sólo las magnitudes de arrastre de materiales, a saber:

—El diámetro de los granos (δ).

—Los caudales sólidos (γ).

—Y la escala de tiempos propia del modelo, han cambiado.

Para dar una idea del orden de magnitud de las variaciones de las relaciones de transposición, en el caso de ser empleados en el modelo materiales de peso específico más liviano, se indican a continuación algunas cifras sacadas de la experiencia del Laboratorio de Hidráulica de Zurich. Para el polvo de carbón que ha sido empleado, cuyo peso específico fue $\gamma_s = 1{,}25$ (contra 2,68 para los aluviones naturales) y para el intervalo de números de Reynolds más frecuente en los modelos que se extiende entre 3000 y 4000, las constantes de los materiales son:

α = 8 a 9.5

β = 1.7 a 1.9

η = 7.7 aproximadamente

ξ = 0.8 aproximadamente

Con estos valores se encuentra como orden de magnitud en el caso general, los coeficientes de transposición que figuran en la columna (1ª) y para el modelo no distorsionado pero basculado, los de la columna (2ª) del cuadro III.

Los valores confirman las constataciones del Laboratorio de Hidráulica de Zurich en relación con dicho material para el modelo. Esto es especialmente cierto para la escala de tiempos (θ), notablemente cambiada respecto a la del modelo perfectamente semejante ya que con el empleo de polvo de carbón como material aluvial en el modelo, de peso específico menor pero con granos más grandes, sólo una escala de tiempos de este orden de magnitud ha dado lugar a una reproducción exacta de los bancos de aluviones y de su movimiento. La pendiente del modelo en estas condiciones se estableció siempre, como lo exige el valor de (ξ), en valores mayores que la pendiente en la naturaleza.

Para control de los ensayos que han sido ejecutados con otro material en el modelo, se recuerda la ley general de caudal sólido del laboratorio de Hidráulica de Zurich.

$$\frac{Je \cdot q^{2/3}}{d} \quad 9{,}57\,\gamma_s''^{\,10/9} + 0{,}462\,\gamma_s''^{\,1/3}\,\frac{g^{2/3}}{d}$$

En la cual (γ_s'') es el peso específico de los materiales pesados bajo el agua. Esta fórmula empírica concuerda bien con los resultados experimentales en un campo que cubre desde $\gamma_s'' = 0.25$ (polvo de carbón) hasta $\gamma_s'' = 3.22$ (barita).

Para los cálculos aproximados o de control se puede pues poner:

$$\alpha = \left(\frac{\gamma''_{SN}}{\gamma''_{SM}}\right)^{\frac{10}{9}} \quad \text{Y} \quad \beta = \left(\frac{\gamma''_{SN}}{\gamma''_{SM}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

"En las anteriores fórmulas, se ha tomado:

γ''_{SN} - peso específico de los materiales en la naturaleza, pesados bajo el agua.

γ''_{SM} - peso específico de los materiales en el modelo, pesados bajo el agua.

La relación de pesos específicos (η) puede también calcularse a partir del peso específico y el volumen de los espacios vacíos en los materiales de la naturaleza y del modelo; se encuentra:

$$\eta = \frac{\gamma''_{SN}}{\gamma''_{SM}} \quad \frac{1 - n_N}{1 - n_M}$$

Designando por (n_N) y (n_M) los volúmenes de intersticios vacíos del material en la naturaleza y en el modelo.

Así, de los valores relativos a los materiales que han sido considerados como datos, sólo falta la relación (ξ) de la constante (C') de Strickler. Este valor de (ξ) como lo ha mostrado la figura 5, depende del número de Reynolds (Re) en el modelo.

El valor es, según las experiencias:

Re = 3.000 a 4.000 : $\xi = 0.8$ aprox.

Re = 4.000 a 10.000 : $\xi = 0.9$ aprox.

$Re > 10.000$: $\xi = 1.0$ aprox.

Para una determinación más precisa podría sin embargo ser más racional determinar en un canal más pequeño antes de iniciar los ensayos en sí, las constantes de los materiales que van a ser empleados, para condiciones de flujo tales como las que existirán en el futuro modelo, dado que, como lo muestran los cuadros II y III las denominadas constantes de la ley de transporte de materiales deben considerarse como dependientes del número de Reynolds.

Para los materiales de la naturaleza, las constantes (a) y (b) de la ley de transporte de materiales, pueden ser calculadas a partir de la ecuación general de transporte.

El valor de (c') en la naturaleza y el peso específico en la naturaleza pueden determinarse mediante levantamientos y nivelaciones de la superficie del agua y análisis de los materiales de fondo.

EJEMPLO

ENSAYOS SOBRE MODELO DEL RIO RIN EN EL LABORATORIO DE HIDRAULICA DE ZURICH

Si un ejemplo de aplicación ha de ser tomado como control, se debe poder medir en el caso considerado, el mayor número de magnitudes existentes, no sólo en el modelo, sino también en la naturaleza.

Es especialmente precioso tener en la naturaleza determinaciones aún sobre el transporte de materiales sólidos, de tal suerte que no se tiene la limitación de juzgar sobre dicho transporte únicamente por sus efectos.

El ejemplo ciertamente más apropiado y al mismo tiempo el más actual, de un ensayo con materiales de peso específico menor en el modelo, entre todos los ejecutados en el Laboratorio de Hidráulica de Zurich, es el ensayo sobre el río Rin aguas arriba del lago de Constanza, sobre el cual se conoce todo lo que es necesario para las comparaciones acerca del transporte de materiales sólidos, no sólo mediante cálculos sino también por medidas directas en la naturaleza por medio de dispositivos de muestreo de materiales.

En el cálculo de verificación de un ensayo ya efectuado y del cual, en consecuencia, se conocen todos los elementos, es inevitable una cierta dosis de arbitrariedad por tratarse de un problema con determinaciones varias veces superabundantes, tal como sucede para el problema considerado. Se tiene la escogencia de las magnitudes que se quiere admitir y de las que se quiere someter a control.

En lo que sigue se consideran inicialmente como datos los factores de transposición que han sido determinados exactamente por la construcción del modelo y la ejecución práctica de los ensayos. Estos son:

—La escala de longitudes .... $\varnothing = 100$

—La escala de tiempos para el transporte de materiales .... $\theta = 360$

—La escala de caudales de agua .... $\psi = 105$

—Entre las constantes de los materiales, ha sido medida directamente .... $\eta = 77$

El coeficiente (c') de la ecuación de Strickler ha sido determinado mediante ensayos a dos dimensiones en un pequeño canal de paredes transparentes para el material de fondo empleado y con $\rho = \delta$, como función del número de Reynolds de conformidad con la figura 5 (cinco) y se ha tomado, para el dominio determinante en el modelo de $re = 3000$ a 4000 como igual a entre 23 y 24, mientras que el valor límite para grandes valores de Reynolds, puede ser encontrado en los alrededores de 19 (naturaleza). Así, la relación (ξ) es:

$$\xi = 0.78 \quad a \quad 0.83$$

ó sea (0.8) en promedio.

En lugar de las otras dos constantes (α) y (β) que para la época de este ensayo (1932) no se conocían exactamente, se han tomado como datos otras dos magnitudes que en el modelo han sido determinadas exactamente, a saber, el caudal sólido (alimentación de materiales) y la pendiente. Las magnitudes correspondientes en la naturaleza sólo vienen dadas a partir de los cálculos, pero se han confirmado, hasta donde ello es posible, mediante medidas de materiales en el río Rín.

A lo largo de la distancia total de unos 25 km. desde la desembocadura del Ill hasta el lago de Constanza, la pendiente y el caudal sólido varían como consecuencia del desgaste de los materiales. (γ) y (ξ) son pues diferentes según el recorrido parcial que se tome para comparación con el modelo. Es precisamente el hecho de que (γ) y (ξ) dependan del recorrido de comparación en la naturaleza, lo que ha permitido la posibilidad de encontrar el recorrido correspondiente en el modelo.

Para caracterizar los recorridos parciales en la naturaleza se recurrirá de preferencia a su pendiente, es decir, al valor de (ξ), ya que la pendiente del modelo es conocida y tiene un valor fijo.

Las pendientes del río Rín entre la desembocadura del río Ill y el Lago de Constanza varían entre 0.8 y 1,35% (m./km.); la pendiente del modelo es del 1.46% (m/km.) de tal suerte que (ξ) varía entre 0.55 y 0.93. La relación entre (ξ) y (γ) está dada por el gráfico 1 de la figura 6.

En consecuencia, están dados los 7 factores de transposición siguientes:

$$\phi,\ \theta,\ \psi,\ \eta,\ \varsigma,\ \gamma \text{ y } \xi$$

Para determinar las 6 relaciones faltantes:

$$\lambda,\ x,\ \delta,\ \alpha,\ \beta,\ \mu$$

Se hace uso de las ecuaciones (11) del cuadro II, del cual se deduce:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \gamma\,\eta^{-1}\,\theta\,\phi^{2/3}\,\psi^{-2/3}\\
x &= \psi^{2/3}\,\phi^{-2/3}\\
\alpha &= \xi^{-2}\,\varsigma^{-6}\\
\beta &= \xi\,\psi^{2/3}\,\phi^{-2/3}\,\gamma^{-2/3}\\
\mu &= \phi\,\gamma\,\eta^{-1}\,\theta\\
\delta &= \psi^{2/3}\,\phi^{-2/3}\,\varsigma^{6}\,\xi^{3}
\end{aligned}$$

La siguiente magnitud fácilmente controlable (ϵ) puede calcularse a partir de la ecuación 1 del cuadro II; se encuentra:

$$\epsilon = \psi^{1/3}\,\phi^{-1/3}$$

De estas 7 relaciones, solo (x) y (ϵ) son independientes de (ξ) o de (γ) y tienen como valores:

$$x = 100$$

$$\epsilon = 10$$

Como aún se desconoce a qué parte de la naturaleza podría corresponder el modelo, las 5 relaciones restantes deberán ser calculadas en función de (ξ) y de (γ). En los gráficos 2 a 7 de la figura 6 han sido representadas en función de ξ) estas 7 magnitudes calculadas a partir de los valores dados para θ, δ, ψ, η, ς y de la relación dada entre (ξ) y (γ) [gráfico 1].

Estas magnitudes han sido indicadas como que deben ser calculadas.

La relación de los valores medidos directamente en el modelo (profundidad, velocidad media, longitud de bancos aluvionarios, grosor de los granos de material sólido) y los correspondientes valores dados por la naturaleza, los cuales, excepción hecha de la longitud de bancos de materiales sólidos, dependen así mismo de la pendiente en la naturaleza, dan los valores de (χ), (ϵ), (λ) y (δ) indicados en los gráficos 2 a 5 como si hubieran sido calculados.

FIGURA 6———Gráficos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7

Resalta en los gráficos que estos 4 valores medidos concuerdan con los valores calculados para un valor de (   ) de 0.6 a 0.65. Dado que la pendiente medida en el modelo es de i = 1.46%(m/km.) se deduce que el modelo corresponde a la parte del recorrido en la naturaleza que tiene por pendiente:

$$J = \xi \times i = 0.88 \quad a \quad 0.95\%$$

Luego, aproximadamente, al recorrido "intermedio" en el estado actual y que se une directamente al corte de DIEPOLSAUER. A partir de los gráficos 6 y 7 se puede determinar ahora los valores de (α) y (β) que corresponden al valor de (ξ) de 0.6 a 0.65, se encuentra:

$$\alpha = 10 \quad a \quad 8.5$$

$$y \; \beta = 1.8 \quad a \quad 1.5$$

Con las constantes dadas para las condiciones en la naturaleza A = 17 y B = 0.545 se puede calcular las constantes (   ) y (   ) que existen en el modelo y se obtiene:

$$a = \frac{A}{\alpha} = 1.7 \quad a \quad 2.0$$

$$y \quad b = \frac{B}{\beta} = 0.3 \quad a \quad 0.36.$$

Pero, precisamente, éstos son los valores que se encuentran mediante ensayos sistemáticos con polvo de carbón. Así, por medio del cálculo se encuentra, a partir de la ecuación general, que para polvo de carbón, con $\gamma_s'' = 0.25$:

$$\gamma_s'' = 0.25$$

$$a = 9.57 \times \overline{0.25}^{\,10/9} = 2.05$$

$$b = 0.462 \times \overline{0.25}^{\,1/3} = 0.29$$

Se aprecia así que todos los factores de transposición concuerdan de manera satisfactoria para $\varsigma = 0.6$ a 0.65, con los valores de las "relaciones medidas" en la naturaleza y en el modelo.

Los ensayos del río Rín de aquella época que tenían por objeto el estudio del corte de DIEPOLSAUER no representaron exactamente, desde el punto de vista cuantitativo, las condiciones en dicho recorrido parcial, sino en el recorrido intermedio situado en promedio unos 6 km. aguas arriba. Sin embargo, como ensayos cualitativos (comparación de efectos de las diferentes transformaciones) son perfectamente válidos.

Sin embargo, mientras que por aquel entonces habrían sido necesarios en la naturaleza numerosos ensayos previos durante meses, es posible ahora obtener en tiempos sensiblemente más cortos, resultados que son por lo demás mejores desde el punto de vista cuantitativo. En un posterior artículo se probará lo anterior en base a los últimos ensayos del laboratorio de Hidráulica de Zurich.

CONCLUSIONES FINALES

1. Se ha procurado justificar la similitud en los ensayos sobre modelos fluviales, no solamente mediante consideraciones generales de dimensiones o de fuerzas sino también a partir de leyes experimentales, manteniendo sin embargo el dominio de validez de la similitud dentro de los límites establecidos por las leyes experimentales auxiliares.

2. Con la ayuda de este método se llega a un sistema de ecuaciones para los ensayos sobre modelos fluviales con materiales de arrastre de peso específico menor en el modelo, el cual sistema, en el caso general de un modelo distorsionado y basculado sólo permite tres grados de libertad. Se puede deducir que sin una cierta distorsión tal tipo de ensayos en modelo, no son admisibles

3. La utilización del carbón como material sólido aluvial en el modelo, y así lo muestran los ejemplos, sólo exige una débil distorsión geométrica, pero en cambio presenta una fuerte distorsión de tiempos, lo que justamente debe ser considerado como deseable si se tiene en cuenta el tiempo necesario para la ejecución de los ensayos.

4. Se demuestra mediante un ejemplo que en un modelo para el cual se ha logrado mediante largos ensayos previos, la mejor concordancia posible con los fenómenos de la naturaleza, también son satisfactoriamente cumplidas las ecuaciones establecidas, hecho que confirma la similitud aún desde el punto de vista matemático.