

Las ecuaciones de Navier-Stokes

Por: Jorge A. Naranjo M.*

(Para Marina, estas músicas del agua)

PRESENTACION

Las Ecuaciones de NAVIER STOKES son el punto de partida de cualquier trabajo analítico referente al flujo de fluidos viscosos. En lo que sigue hacemos un breve repaso de las condiciones históricas de su formulación, como respuesta a una "crisis" de pensamiento bien expresada por la famosa Paradoja de D' Alembert; y, tras deducirlas, a la manera Stokesiana, repasamos también someramente algunas de las consecuencias inmediatas de las mismas, conocidas desde el siglo pasado; finalmente hacemos una reseña de los principales logros alcanzados por la hidrodinámica del siglo pasado con base en las Ecuaciones referidas, logros que prepararon la emergencia, a comienzos de este siglo, de la teoría de capas límites.

Tal vez el mejor indicio de los límites de las Ecuaciones de Euler para tratar el flujo de fluidos sea el problema conocido clásicamente como "La Paradoja de D' Alembert": un cilindro inmerso en una corriente uniforme de un flujo euleriano, padece un arrastre nulo por parte de la corriente. "No veo, lo admito, cómo pueda explicarse satisfactoriamente, con la teoría, la resistencia de los fluidos. Por el contrario, me parece que la teoría, con todo rigor, da en muchos casos resistencia nula; una singular paradoja, que dejo para su elucidación a los futuros Geómetras", escribía D'Alembert. Por su parte Euler, sensible a esta misma paradoja, y a varias otras desviaciones notables de las predicciones teóricas respecto de las observaciones experimentales, comentaba: "Si no somos capaces de obtener un conocimiento más completo de las leyes de movimiento de los fluidos, no es debido a la mecánica y a la suficiencia de los principios sino sólo porque el análisis nos abandona aquí..."

El siglo XVIII, según expresión de Rouse, fue "el Adviento de la Hidrodinámica". Adviento cargado de promesas, es cierto, pero sólo el Adviento: pues desde sus comienzos los hidrodinámicos supieron ponderar los lí-

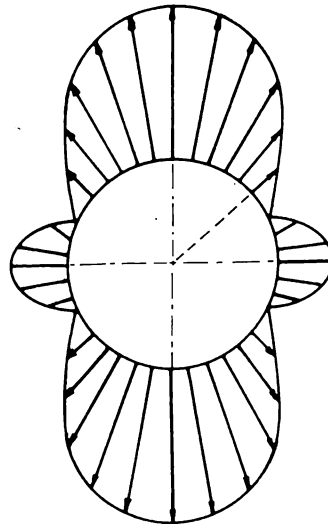


Figura 1

mites de la teoría euleriana. El siglo XVIII deja abierta una grave pregunta: ¿cómo deben modificarse las ecuaciones de movimiento para dar cuenta efectiva de los flujos reales? El siglo XIX respondería a esa pregunta. Era uno de esos problemas insoslayables, y los propios fundadores de la Hidrodinámica lo habían advertido: mientras no pudiera darse explicación teórica a fenómenos tan importantes como la resistencia de los fluidos, la Hidrodinámica y la Hidráulica permanecerían escindidas.

El siglo XIX se inicia con un trabajo memorable. En 1800 Coulomb publicó un estudio titulado: "Experimentos destinados a determinar la cohesión de los fluidos y las leyes de su resistencia en los movimientos muy lentos", donde analizó los resultados de sus experimentos con péndulos de torsión amortiguados en un medio fluido, pudiendo correlacionar las resistencias observadas con la resistencia, ya propuesta en cierto modo por Newton en su estudio sobre los péndulos cicloidales (Principia II, 6), proporcional a las potencias primera y segunda de la velocidad del móvil relativa al medio fluido. "Debería haber —escribió Coulomb— dos clases de resistencia: la una debida a la coherencia de las molécu-

* Experto III, Profesor de Mecánica de Fluidos en la Facultad de Minas.



las y consecuentemente a la velocidad; y la otra debida a la inercia de las moléculas detenidas por las irregularidades contra las cuales chocan, es proporcional a su número y a su velocidad, y consecuentemente al cuadrado de esa velocidad". Y mostró cómo las variaciones en "la viscosidad" del fluido sólo afectaban al primer coeficiente de resistencia, mientras el segundo era fijo para un cuerpo dado.

Los análisis de Coulomb los prosiguieron Girard, Chézy, Du Buat, Meyer Prony, extendiéndolos a flujos en pipetas y canales abiertos, y estableciendo los valores de los coeficientes de resistencia en flujos muy diversos. Estos resultados, obtenidos entre 1800 y 1820 fueron decisivos para el control de las modificaciones teóricas de las ecuaciones eulerianas, las cuales sobrevendrían en las tres décadas siguientes: fueron los fenómenos de referencia para controlar la pertinencia de las ecuaciones modificadas, y, puesto que las mediciones no siempre habían sido afortunadas, dificultaron la toma de confianza de los hidrodinámicos en las ecuaciones modificadas, hoy conocidas como Ecuaciones de Navier-Stokes. Y solamente la discusión de los resultados y la repetición de los experimentos permitieron, finalmente, aceptar la justeza de las modificaciones de las ecuaciones de Euler, muy avanzado ya el siglo XIX.

En 1822 Navier presentó en París, ante la Academia de Ciencias, un trabajo titulado "Memoria sobre las leyes de movimiento de los fluidos" donde, siguiendo las líneas analíticas de Euler, pero agregando entre las fuerzas actuantes sobre el volumen de fluido una hipotética fuerza de atracción o repulsión entre las moléculas adyacentes, produjo la primera expresión de las ecuaciones modificadas. Si llamamos F_x a la fuerza impresa en dirección x sobre el elemento fluido; p a la presión media que reina en el elemento; ρ a la densidad del fluido; u, v, w a las velocidades medias del elemento en direcciones x, y, z ; y si identificamos $d/dt, d/dx$, etc. con derivadas parciales relativas a t, x , etc., la expresión obtenida por Navier se escribe, para la dirección x :

$$F_x - \frac{dP}{dx} = \rho \left(\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \right) - E \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right] \quad (1)$$

La hipótesis subyacente, en palabras de Navier, era la siguiente: "Tomamos como principio, en la investigación, que por efecto del movimiento de un fluido las acciones repulsivas de las moléculas aumentan o disminuyen en una cantidad proporcional a la velocidad con la que las moléculas se aproximan o receden mutuamente". Fuera de esta suposición, no muy diferente de la ley de

Newton de la viscosidad, Navier no pudo hacer otra cosa que expresar la magnitud de la fuerza en términos de una función desconocida, E , del espaciamiento molecular. Y no tuvo fortuna en la aplicación de sus leyes al análisis de flujo uniforme en pipetas. Así escribía: "la velocidad media toma el mismo valor en pipetas cuadradas o cilíndricas cuando su tamaño es el mismo y muy pequeño. Estos resultados muestran, además, que el valor de la velocidad es sensiblemente independiente de la acción mutua de las partes fluidas, esto es, de lo que uno llama ordinariamente, la cohesión, o la viscosidad del fluido: ese valor depende casi únicamente de la adherencia que existe entre el fluido y el borde; y es mayor cuanto menor la adherencia. Cuando las pipetas son muy pequeñas la velocidad media crece, con las demás cosas iguales, en proporción con el diámetro; pero tiende a crecer más rápidamente que el propio diámetro, y entonces la influencia de la cohesión del fluido se hace sentir más y más, y termina por determinar, ella sola, la velocidad media del fluido cuando el diámetro se hace muy grande". Estas interpretaciones sólo podían asentarse en el análisis de experimentos incorrectos. Navier dedujo las ecuaciones pero no pudo en cambio mostrar su potencia analítica.

La segunda deducción de las ecuaciones se debe a Poisson; quien adaptó las ecuaciones de equilibrio del sólido elástico al movimiento de fluidos compresibles. En su estudio de 1829, titulado "Memoria sobre las ecuaciones generales del equilibrio y del movimiento de los cuerpos sólidos elásticos y de los fluidos", supuso que la presión en el fluido en movimiento no es isotrópica, y consideró a la viscosidad como la responsable de esta anisotropía de la presión. Sobre este supuesto se basa la deducción. Como puede verse, por incorrecto que sea, su efecto en la teoría es, de nuevo, modificar las fuerzas actuantes sobre el fluido en movimiento; luego se procedía por analogía con la teoría de Elasticidad. Pero Poisson, como Navier, tenían un concepto imperfecto de la resistencia de los fluidos: se confundían viscosidad, cohesión, adherencia. Las deducciones de estos sabios son atomísticas, pero el modelo atomístico, en la década 1820-1830 era aún muy pobre para que las ecuaciones resultantes esgrimieran algún poder predictivo.

En 1843 Saint-Venant produjo la tercera deducción de las ecuaciones, en un trabajo titulado "Adición a la Memoria sobre la dinámica de fluidos". La hipótesis de Saint-Venant evadió las consideraciones sobre la naturaleza atomística de la viscosidad apelando a la teoría de los esfuerzos sobre el elemento de fluido. Saint-Venant escribió: "Supongo que en un fluido en movimiento no hay componente tangencial de presión en las direcciones en que no hay deslizamiento. Esto equivale a admitir que la dirección en la cual la fricción es nula es, en cada plano, aquella en la cual el deslizamiento es cero; o que

la principal componente tangencial tiene la misma dirección que el deslizamiento principal; o, si se quiere, que la fricción producida por el deslizamiento depende de él, pues es una resistencia al deslizamiento ejercida en la verdadera dirección del deslizamiento...". La concepción de Saint-Venant es de movimiento de un elemento material de un medio continuo, y su hipótesis es de carácter molar. Rouse, con mucha razón, resalta lo injusto de olvidar la contribución de Saint-Venant en la construcción de las ecuaciones. Pues no solamente la hipótesis de Saint-Venant es más razonable que las de Navier y Poisson, sino que tiene un punto de partida original. Y no solamente dedujo las ecuaciones de Navier-Poisson, sino que, de camino hacia la deducción, encontró las expresiones para los esfuerzos normales-cizallantes sobre el elemento de fluido:

$$S_{xx} = -p + 2\epsilon \frac{du_x}{dx}, S_{xy} = \epsilon \left(\frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} \right) \quad (2)$$

de manera que si las ecuaciones de movimiento no llevan su nombre, al menos los esfuerzos deberían llamarse "esfuerzos de Saint-Venant". Por lo demás esta deducción es independiente de las condiciones de flujo, y admite la variación del parámetro ϵ de espaciamiento molecular con el espacio, variación ésta que Saint-Venant, correctamente, hizo proporcional a la intensidad local de formación de olas en el campo de flujo. Todo indica que este tratamiento del movimiento de fluidos "a la Saint-Venant" adquiere hoy en día estatuto principal en los trabajos Hidráulicos e Hidrodinámicos.

En 1845, en un trabajo titulado "Acerca de las Teorías de la Fricción Interna de los Fluidos en Movimiento, y del Equilibrio y Movimiento de los Sólidos Elásticos", produjo Stokes la cuarta deducción de las ecuaciones halladas por Navier. Por su elegancia, por su capacidad de dar cuenta de las hipótesis previas, por su afinación de los conceptos físicos involucrados en la formulación, la deducción stokesiana ha sido la preferida de muchos hidrodinámicos, y se convirtió en la forma canónica de construcción de las ecuaciones. Es notorio, incidentalmente, que en esta formulación desaparece el parámetro ϵ de espaciamiento molecular, sustituido por un coeficiente η ; nombrado desde Stokes como la viscosidad dinámica del fluido.

La deducción de Stokes puede consultarse en el tratado de Lamb. Nosotros, por razones de economía expositiva, usaremos la notación tensorial para la deducción, pero seguiremos de cerca la argumentación canónica de Stokes. Antes de proceder a ello, y para concluir este apartado sobre la Historia de las Ecuaciones de Navier-Stokes relievemos que las ecuaciones no habían producido todavía ningún resultado seguro. Cuatro pensadores

llegaron al mismo resultado desde cuatro hipótesis diversas, y esto era indicio seguro de la pertinencia de las ecuaciones, pero no aparecía aún el ajuste de la teoría con los experimentos. La primera mitad del siglo XIX puede considerarse pues, desde este punto de vista, como el "período de formulación" en la Historia de las ecuaciones. Es el período francés de la Hidrodinámica. Con Stokes, en la segunda mitad del siglo XIX, comienza el que podemos llamar período inglés de la Hidrodinámica, que se extendió hasta 1904. En relación con la Historia de las Ecuaciones, desde Stokes en adelante hablaremos de un "período de elaboración". Antes de examinarlo, deduzcamos sin embargo las ecuaciones.

En lo que sigue nombramos S_{ij} al esfuerzo sobre la cara normal al eje X_i , y actuando en dirección X_j . El conjunto de los esfuerzos, como se sabe por la teoría de elasticidad, conforma un tensor de nueve componentes,

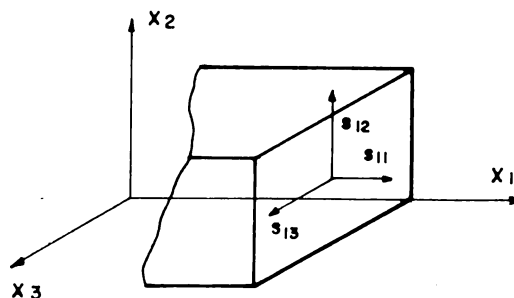


Figura 2

(o de orden dos, con la componente S_{ij} en la fila i , columna j). Este tensor lo simbolizamos $[S_{ij}]$; es un tensor simétrico ($S_{ij} = S_{ji}$), y los tres términos S_{ii} de su diagonal principal suman una cantidad invariable. El tensor de esfuerzos representa todas las fuerzas de superficie que actúan sobre el elemento por acción del medio circundante. Además de estas fuerzas sobre el elemento pueden eventualmente actuar fuerzas de volumen, como el peso, que consideramos posteriormente. Y el estado de esfuerzo en cada punto del medio queda completamente especificado por cualquier conjunto de nueve componentes del tensor. Sus componentes con respecto de otro conjunto de ejes se obtienen mediante la regla de transformación de tensores $S'^{mn} = a_{im} a_{jn} S_{ij}$, con a_{im} el coseno director del ángulo entre X_i y X'_m , y con la convención de suma, que indica una sumatoria sobre las tres componentes para cada índice repetido. Y entre dos puntos vecinos se supone una variación continua del tensor, componente por componente. En la figura se muestra esa variación sobre las caras normales a las direcciones X_1 y X_2 . Los lados AB y AC se consideran perpendiculares entre sí, de longitudes respectivas dX_1 , dX_2 .

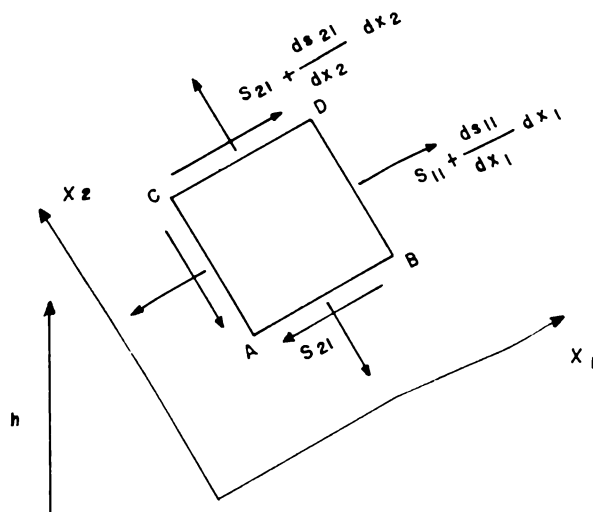


Figura 3

La segunda ley de Newton produce, en la dirección X_1 , la ecuación

$$\rho dX_1 \cdot dX_2 \cdot dX_3 a_1 = \left[\frac{\partial S_{11}}{\partial X_1} dX_1 \cdot dX_2 \cdot dX_3 + \frac{\partial S_{21}}{\partial X_2} dX_2 \cdot dX_1 \cdot dX_3 + \frac{\partial S_{31}}{\partial X_3} dX_3 \cdot dX_1 \cdot dX_2 \right]$$

o bien,

$$a_1 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial S_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial X_2} + \frac{\partial S_{31}}{\partial X_3} \right]. \text{ Esto}$$

se escribe, en general, para la dirección i de movimiento,

$$a_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial S_{ji}}{\partial X_j}$$

Si, además, actúa sobre el elemento una fuerza externa como el peso, entonces, claro, hemos de agregar su componente en dirección X_1 como fuerza impresa. Así, la ecuación de movimiento se escribirá

$$a_i = - \frac{\partial}{\partial X_i} (gh) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial S_{ji}}{\partial X_j} \quad (3)$$

La expresión vale para cualquier material continuo sobre el que la única fuerza externa actuante sea el peso.

En un fluido, la desviación del estado de esfuerzo, designado por S_{ij} , de un estado de presión uniforme en todas direcciones depende enteramente del movimiento de distorsión en la vecindad del punto central del elemento

de fluido considerado en estado de desviación. Analizamos ahora cómo describir ese estado de distorsión. Para ello, consideremos el movimiento del punto P relativo a

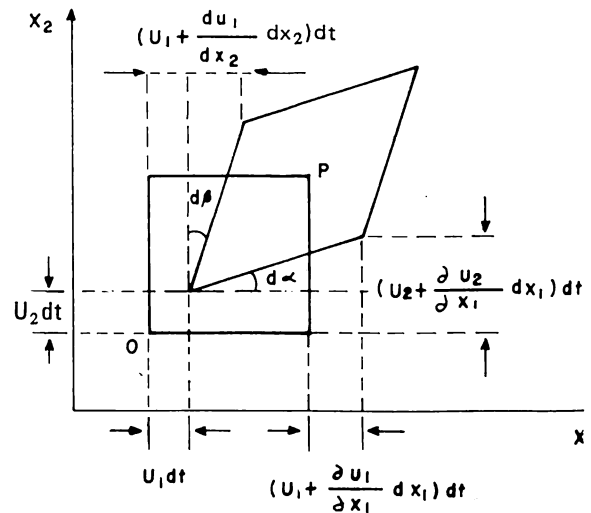


Figura 4

O (cf figura). Designemos u_1, u_2, u_3 a las componentes de la velocidad en O. La diferencia en componente de velocidad según X_1 , entre los dos puntos, es

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} dX_3.$$

Esto se escribe, en jerga tensorial, para la dirección genérica X_i ,

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j$$

El comportamiento del elemento relativo a O depende entonces de las nueve derivadas parciales $\partial u_i / \partial X_j$ en el punto. Estas derivadas de las componentes de un vector forman, como se prueba en análisis tensorial, un tensor, que simbolizamos como

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right]$$

Para examinar el sentido físico de este tensor, lo descomponemos en uno simétrico y uno antisimétrico. Definimos pues los tensores:

$$[l_{ij}] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

$$[R_{ij}] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

Y claramente

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right] = \left[\ell_{ij} \right] + \left[R_{ij} \right] \quad (4)$$

El tensor antisimétrico R_{ij} responde por las rotaciones solidarias del elemento. Sus componentes no diagonales son, precisamente, las velocidades angulares de la rotación. Por ejemplo: si hacemos $u_1 = u$, $X_1 = X$,

$$u_2 = v, X_2 = y, \text{ entonces } R_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -W_z$$

Explícitamente, con sus componentes,

$$\left[R_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & -w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pero, puesto que ésta es una rotación solidaria, el elemento no se deforma por R_{ij} . La distorsión se confina pues a los ℓ_{ij} . Para verlo, consideremos la posición del elemento después de un tiempo dt . Durante este tiempo, el elemento incrementa su longitud, en la dirección X_1 , en la cantidad

$$\left[dX_1 + \left(U_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_1} dX_1 \right) dt - U_1 dt \right] - dX_1 = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} dX_1 dt$$

Por lo tanto la rata de deformación longitudinal en dirección X_1 es $\partial U_1 / \partial X_1 = \ell_{11}$; y lo mismo puede mostrarse para las otras direcciones:

$$\ell_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial X_2} \text{ representa la rata de deforma-}$$

ción longitudinal en dirección X_2 , etc. Estos son los términos en la diagonal principal del tensor ℓ_{ij} . Para examinar los términos laterales en su sentido físico, consideremos los giros angulares $d\alpha$ y $d\beta$ en la figura anterior.

Puesto que $d\alpha \approx d(\tan\alpha)$, podemos ver que

$$d\alpha \approx \frac{(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} dX_1) dt - u_2 dt}{dX_1 + (u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} dX_1) dt - u_1 dt} \approx$$

$$\frac{(\partial u_2 / \partial X_1) dX_1 dt}{dX_1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} dX_1 dt} \approx \frac{(\partial u_2 / \partial X_1) dX_1 dt}{dX_1 (1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} dt)} \therefore d\alpha \approx \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) dt,$$

$$\text{o bien } \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial X_1}; \text{ y de igual modo } \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2}$$

La deformación por cizalla es $d\alpha + d\beta$, y la rata de deformación cizallante es $\frac{d\alpha + d\beta}{dt}$. Esto brinda:

$$\frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} = 2\ell_{12}$$

En general, pues, $2\ell_{ij}$, $i \neq j$, representa una rata de deformación cizallante. El tensor simétrico $[\ell_{ij}]$ se llama, por lo mismo, *tensor de rata de deformación* en el punto 0. {Incidentalmente: si se observa, en la figura anterior, el ángulo rotado por la diagonal OP en torno del eje X_3 normal a la página, se encuentra que este ángulo es $\frac{d\alpha - d\beta}{2}$, por lo tanto la velocidad angular w_3 del elemento es $w_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)$, mostrando el sentido físico antes enunciado del tensor $[R_{ij}]$. Y puesto que ℓ_{ij} es un tensor simétrico, la suma de los términos de la diagonal principal es un invariante bajo transformación de los ejes; puede mostrarse que representa la rata temporal de incremento fraccional de volumen en el elemento. Y por su forma se obtiene inmediatamente:

$$\ell_{11} + \ell_{22} + \ell_{33} = \ell_{ii} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = \nabla \cdot \vec{V}.$$

En un fluido incompresible, el volumen es constante, por lo que la divergencia de la velocidad debe ser nula: esta es la ecuación de continuidad para un fluido incompresible.

El tensor de esfuerzos, como el tensor de rata de deformaciones, por ser simétricos se dejan diagonalizar.

Ahora bien, una hipótesis principal de la Elasticidad es la igualdad de los ejes principales de los tensores de esfuerzos y deformaciones de los materiales isotrópicos. La hipótesis hidrodinámica es muy semejante (y podría llamarse hipótesis de Poisson-Saint Venant): para un fluido newtoniano, se postula la linealidad de la relación entre los esfuerzos según los ejes principales y las tasas de deformación según esos ejes principales. Esta hipótesis de linealidad puede escribirse:

$$\begin{aligned} S_{11} &= -p + c\ell_{11} + \lambda(\ell_{22} + \ell_{33}) \\ S_{22} &= -p + \lambda\ell_{11} + c\ell_{22} + \lambda\ell_{33} \\ S_{33} &= -p + \lambda\ell_{11} + \lambda\ell_{22} + c\ell_{33} \end{aligned} \quad (5)$$

La analogía con las leyes de la Elasticidad es muy grande. En el caso del sólido isótropo los esfuerzos y las deformaciones se ligan por relaciones como las llamadas "fórmulas de Lamé":

$$S_{11} = \frac{\mu E (\ell_{11} + \ell_{22} + \ell_{33})}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} + \frac{E \ell_{11}}{1 + \mu},$$

etc., en donde se expresa de manera muy semejante la hipótesis de linealidad, privilegiando la contribución de la deformación principal paralela al eje principal, y simetrizando la contribución de las deformaciones normales al eje principal donde se desarrolla el esfuerzo. En el caso del fluido isótropo, una componente del tensor de esfuerzo con respecto de los ejes principales se relaciona con la componente de la tasa de deformación en la misma dirección por un coeficiente, y con las componentes de la tasa de deformación en las otras dos direcciones por otro coeficiente. Como los módulos de Young y de Poisson de los sólidos, en los fluidos estos dos coeficientes se suponen propiedades de los materiales; y, en el fluido, independientes de la distribución de velocidad de flujo —por lo menos mientras no sean comparables las velocidades con la de la luz...

Hagamos ahora $C = 2\eta + \lambda$. La relación (5) entre esfuerzos y tasa de deformaciones se puede escribir

$$S_{11} = -p + \lambda(\ell_{11} + \ell_{22} + \ell_{33}) + 2\eta\ell_{11},$$

etc. Y si recordamos que ℓ_{ij} representa una tasa de deformación cizallante para $i \neq j$; y que debe, según la ley de Newton, ser proporcional al esfuerzo cizallante S_{ij} , siendo $[\delta_{ij}]$ el tensor de Kronecker, con elementos $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, podemos en general escribir para el esfuerzo S_{mn} , la relación

$$S_{mn} = -p\delta_{mn} + \lambda(\ell_{11} + \ell_{22} + \ell_{33})\delta_{mn} + 2\eta\ell_{mn}.$$

Si queremos encontrar el esfuerzo S'_{ij} según otros ejes diferentes a los X_m, X_n , la transformación $S'_{ij} = a_{mi}a_{nj}S_{mn}$ produce una expresión formalmente idéntica. Esto nos asegura que las expresiones valen en cualquier conjunto de ejes. Así podemos escribir la ley general de esfuerzo-tasa de deformaciones para un fluido newtoniano:

$$S_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} + 2\eta\ell_{ij} \quad (6)$$

Si, ahora, hacemos $\eta' = \lambda + \frac{2}{3}\eta$, entonces podemos sustituir λ en la relación, y escribirla en la forma

$$S_{ij} = -p\delta_{ij} + \left(\eta' - \frac{2}{3}\eta\right) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} + 2\eta\ell_{ij} \quad (7)$$

η, η' , se conocen como viscosidad dinámica y segundo coeficiente de viscosidad, respectivamente. Un resultado inmediato es que si el fluido es incompresible ($\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$) el movimiento del fluido queda determinado por la viscosidad dinámica del material. Estas dos viscosidades parecen así caracterizar, entre los fluidos, a los líquidos y a los gases. Esencialmente corresponden a dos mecanismos diferentes de ejercerse la resistencia del fluido a la distorsión, cohesión y difusión molecular de nomentum.

Para volver a la ecuación de movimiento necesitamos calcular la derivada parcial del esfuerzo S_{ij} relativa a X_j , esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\eta' - \frac{2}{3}\eta\right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} + \\ &\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Y por otra parte la aceleración del elemento en la dirección x_i se escribe:

$$a_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (9)$$

con el primer término de la expresión final representando la variación temporal de la velocidad y el segundo las convecciones. Así, finalmente, la ecuación de movimiento, fórmula (3), se escribe, con ayuda de (8) y (9) como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho g h) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} +$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\eta' - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\} + \frac{\partial}{\rho \partial x_j} \left\{ \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (10)$$

Esta es la ecuación de Navier-Stokes para fluidos newtonianos compresibles e incompresibles. Si el fluido es incompresible, la densidad es constante y $\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ es nula. Entonces (10) se vuelve

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{p}{\rho} + g h \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (11)$$

El coeficiente η/ρ fue nombrado viscosidad cinemática por Maxwell; se simboliza ν . Si, finalmente, suponemos ν constante, puesto que $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$, y el fluido es incompresible, este término se anula, y las ecuaciones toman su forma familiar:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{p}{\rho} + g h \right\} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (12)$$

El término final es ν veces el laplaciano de la velocidad en la dirección u_i . Si hacemos $\nu = 0$ se recuperan las Ecuaciones de Euler.

El análisis realizado nos permite, por otra parte, reconsiderar el significado de la presión en un fluido. Si sumamos los términos en (5), y recordamos las definiciones de λ y η' , tendremos:

$$S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = -3p + (3\lambda + 2\eta) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = -3p + 3\eta' \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

Si el fluido es incompresible, resulta pues

$$-p = \frac{S_{11} + S_{22} + S_{33}}{3} = \frac{S_{ii}}{3}$$

como es bien conocido; si es compresible, sin embargo,

$$-p = \frac{S_{11} + S_{22} + S_{33}}{3} - \eta' \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{S_{ii}}{3} - \eta' \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

Stokes, y siguiéndole, Lamb, supusieron $\eta' = 0$, con lo que la ecuación (10) se modifica un poco, y en todos los fluidos la presión resulta ser $-p = \frac{S_{ii}}{3}$. Pierre Duhem mostró, sin embargo la necesidad de considerar $\eta' = \frac{3\lambda + 2\eta}{3} \geq 0$; para que la función de disipación no tomase valores negativos. De todas maneras la relación stokesiana, $3\lambda + 2\eta = 0$, sigue teniendo la ventaja, como señala Bateman, de presentar como nulo el trabajo de las fuerzas viscosas cuando el fluido se dilata permaneciendo semejante a sí mismo.

Las expresiones cartesianas de las ecuaciones de Navier-Stokes de un fluido incompresible son las siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + g h \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} + g h \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right).$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + g h \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

La deducción stokesiana estuvo acompañada por el mayor esfuerzo posible para encontrarles aplicaciones. Los logros de Stokes en primer término, y de los grandes Hidrodinámicos de la segunda mitad del siglo XIX fueron muy notables. Uno de los problemas era, sin duda, dar cuenta de las observaciones hechas por Chézy, Du Buat, etc. Y en esto la fortuna fue relativa, excepción hecha de haberse logrado concatenar muy bien lo observado por Hagen y Poiseuille en flujos en pipetas con las estimaciones brindadas por las ecuaciones. Pero el otro problema era ampliar el universo hidrodinámico, tratar problemas teóricamente insolubles con la teoría euleriana. Stokes trató concienzudamente los dos tipos de problemas. Tras sus huellas, Kelvin Rayleigh, Reynolds, Maxwell, Lamb, terminaron por encontrar pruebas suficientes de la pertinencia de las ecuaciones.

En el Cuadro No. 1 se presentan algunos de los problemas más importantes que fueron tratados por estos Hidrodinámicos durante este período 1845 - 1904 que llamamos "inglés". El tema central de este período es el examen de las ecuaciones de Navier-Stokes, según lo que llamaré "sesgos" de las mismas. De hecho, las ecuaciones son tan complicadas que apenas se han encontrado unas pocas soluciones correspondiendo a fenómenos hidrodinámicos complejos. ¡Y ninguna de estas soluciones se encontró en el siglo XIX! Durante el período de elaboración se encontraron soluciones exactas para casos simples, o soluciones aproximadas. Por una u otra razón, se eliminaban la mayoría de los términos; así rumiaban los hidrodinámicos los sesgos de las ecuaciones, y las dominaban a trozos. El siguiente problema, que llamaremos de la placa oscilante, y que fue resuelto por Stokes en 1850 ilustra bien este modo de proceder.

El Problema de la Placa Oscilante. La superficie plana infinita que se muestra en la figura de la página siguiente oscila en su propio plano con velocidad $u_0 = U \cos(\frac{2\pi t}{T})$, en donde U es la amplitud de su velocidad y T es el período, o duración de cada ciclo en las oscilaciones. Se pide hallar la distribución de velocidades en el fluido newtoniano en oscilaciones estacionarias.

Asumimos movimiento laminar, con una u , p/ρ , gh funciones de la altura " y " sobre la placa, y del tiempo " t ". Las demás velocidades se suponen nulas. Entonces las ecuaciones de Navier-Stokes para el problema se presentan bajo este sesgo (cf ecuaciones (13):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad 0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} + gh \right) \quad (14)$$

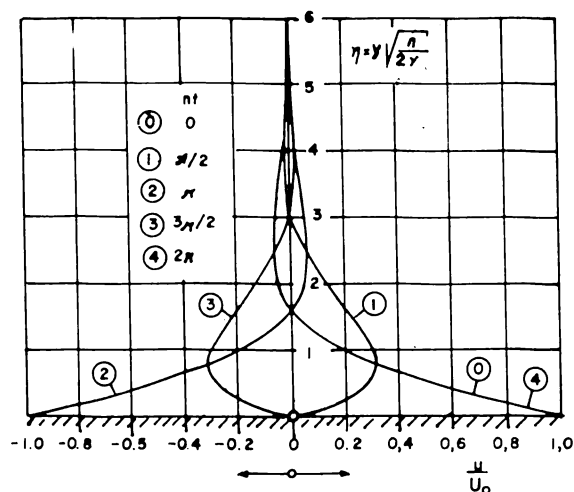


Figura 5

La ecuación es, formalmente, como la ecuación del calor, y los métodos de solución análogos. En el tratado de Lamb podrá verse cuánto aprovecharon los hidrodinámicos estas analogías, y la exposición detallada de los métodos de solución de (14). Para abreviar, escogemos sin embargo otra vía, muy directamente física: es razonable suponer, en un vaivén estacionario una oscilación de las sucesivas láminas de fluido a una misma frecuencia, con amplitud decreciente con la distancia a la placa, y con un desfase de oscilación de la lámina debido al retardo temporal de recepción del efecto de oscilación de la placa. Por tanto trataremos la solución

$$u(y, t) = U e^{-ky} \cos \left(\frac{2\pi(t - \Upsilon)}{T} \right),$$

con k , una constante por ser determinada; $\Upsilon(y)$, el retraso temporal, con $\Upsilon = 0$ en $y = 0$; con $u(0, t) = u_0$. Y cuando este valor tentativo de $u(y, t)$ se lleva a (14), se obtiene, tras de un álgebra que no realizaremos aquí,

$$\Upsilon = \frac{kT}{2\pi} y; \quad k = \sqrt{\frac{\pi}{\nu T}};$$

$$u = U e^{-\sqrt{\frac{\pi}{\nu T}} y} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{2\sqrt{\pi \nu T}} \right)$$

Los perfiles de velocidad, en diferentes tiempos, se muestran en la figura anterior. Un hecho notable, que no pasó inadvertido a Stokes y Lamb, es el confinamiento de los efectos de la viscosidad en una delgada capa de fluido encima de la placa oscilante. El espesor de esta capa es del orden de $\sqrt{\nu T}$. Si las oscilaciones son rápidas la capa se adelgaza. La amplitud de la velocidad en la oscilación de la lámina fluida a altura $y = \sqrt{\nu T}$ es menos del 20% de la amplitud de la velocidad de la placa.

Puede mostrarse que, si llamamos $L = \frac{UT}{2\pi}$ a la Amplitud de desplazamiento de la placa, el espesor $\delta = \sqrt{\nu T}$ es tal que

$$\frac{\delta}{L} = \sqrt{\frac{2\pi}{UL/\nu}},$$

es decir, es inverso con el número de Reynolds UL/ν de este flujo. Esta es una de las señas más notorias de un efecto de capa límite como los que cincuenta años más tarde, describiría Prandtl. En rigor, todos los problemas reseñados en el Cuadro No. 1 mostraron señales de estos confinamientos de los efectos viscosos en delgadas capas límites. El período de elaboración de las ecuaciones de Navier-Stokes fue también, simultáneamente, un "tempo de acumulación" de indicios de la formación de capas límites, una preparación conceptual para formular explícitamente una teoría de capas límites.

En el problema de la placa oscilante, como se ve, las condiciones permiten anular fácilmente 25 de los 27 términos de las ecuaciones: nada de convecciones, equilibrio hidrostático de las presiones, verificación trivial de la continuidad, laplaciano reducido a la mínima expresión. La ecuación paradigma del problema de la placa oscilante,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

la designamos pues de "sesgo difusivo". En el libro de Lamb se pueden estudiar varios problemas con este sesgo característico.

Otro sesgo de las ecuaciones lo brinda este problema, también clásico. Un fluido líquido viscoso fluye laminarmente por un largo plano inclinado una pendiente S . Se pide encontrar la distribución de velocidad. Para ello,

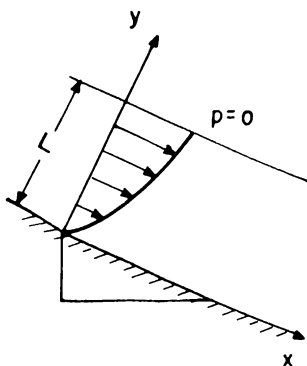


Figura 6

como antes, hemos de usar las ecuaciones de movimiento $v = w = 0$, con u función de y . Esto anula todas las convecciones, y el carácter permanente del flujo anula el restante factor de aceleración, $\frac{\partial u}{\partial t}$. Los laplacianos se simplifican como antes, y resulta la terna de ecuaciones

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + gh \right) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} + gh \right) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + gh \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Esta vez la difusión se balancea con los cambios en la presión hidrostática. Este sesgo lo designamos "forzoso-difusivo". La difusión de la velocidad en el medio fluido cambia la cabeza de presión hidrostática a lo largo del plano de flujo. Entonces podemos resolver el problema suponiendo $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dx}$. Así,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gh \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2},$$

y como en la superficie del flujo reina una presión constante, hacemos el análisis en esa superficie:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gh \right) = g \frac{dh}{dx} = -gS = \nu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

con S la pendiente del plano. (Note que la dirección h apunta en el segundo cuadrante, donde dx es negativo). Integrando, con la condición de cizalla, $S_{xy} = \nu \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ en la superficie libre, a altura $y = L$, se obtiene una expresión para $\frac{du}{dy}$ como $g \frac{S(L-y)}{\nu}$, la cual, vuelta a integrar, con $u = 0$ en $y = 0$ (por la hipótesis de adherencia), produce, finalmente:

$$u = \frac{gS}{\nu} y \left(L - \frac{y}{2} \right) \quad (17)$$

una velocidad inversamente proporcional a la viscosidad, y directamente proporcional a la pendiente: la viscosidad frena el flujo, a partir del lecho, mientras la componente gS del peso lo acelera. La velocidad u muestra así un carácter de velocidad límite de un flujo en equilibrio hidrodinámico. Si el análisis se hubiera hecho considerando

una línea de corriente no superficial, la solución procedería de manera muy semejante. De este mismo tipo de sesgo son, por otra parte, los flujos de Couette planos, y el flujo en el aparato de Hele-Shaw. Pero las ecuaciones son más complicadas por la puesta en juego de más dimensiones de movimiento. Y las soluciones, por lo mismo, más hermosas.

Lamentablemente no podemos detenernos ahora en el examen de otros sesgos de las ecuaciones de Navier-Stokes examinados y comprendidos profundamente por los Hidrodinámicos del siglo pasado. Creo que los dos

ejemplos presentados —sin duda alguna entre los más sencillos que haya— pueden servir de modelos para una clasificación sistemática de esos rasgos. El Cuadro No. 1 es una primera clasificación, y no pretende ser exhaustivo: el acento se puso prioritariamente en las contribuciones inglesas. A partir de 1904, como se ve en el apartado C del cuadro, las contribuciones germánicas son las más frecuentes. Todos los problemas fuertes se resolvieron en este siglo, y en un sentido, a destiempo, pues la teoría de Capas-Límites abrió una vía alternativa para tratar los flujos hidráulicos que, por sus resultados eficientes, desvió la atención de los hidrodinámicos de su preocupación principal por las Ecuaciones de Navier-Stokes.

CUADRO No. 1				
Las Soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes				
A: Soluciones exactas en casos simples; principales artífices.				
FLUJO HAGEN-POISEUILLE	1840 - 1860	Hagen, Poiseuille, Stokes, Duhem, Lamb.		
LA PLACA OSCILANTE	1850	Stokes, Rayleigh, Kelvin (Encke?)		
FLUJO TURBULENTO EN PIPETAS	1855	Darcy, Kelvin, Rankine		
LA CUERDA TORBELLINOSA	1880	Rayleigh, Carslaw		
ESTABLECIMIENTO DE REGIMEN	1880	Stokes, Greenhill		
AMORTIGUACION DE OLAS	1880	Lamb, Basset, Rayleigh		
FLUJO DE COUETTE LINEAL	1890	Couette, Reynolds		
FLUJO DE COUETTE CIRCULAR	1890	Couette, Mallock, Reynolds		
FLUJO DE HELE SHAW	1898	Shaw, Stokes		
CAPAS LIMITES DE ECKMAN	1905	Eckman		
B: Soluciones aproximadas en casos complicados; artífices; sesgos.				
LEY DEL FILTRO, de Darcy	1846	$u_i = -k \frac{\partial p}{\partial x_i}$, k constante	}	Anulan convecciones Lineales
LEY DE CAIDA DE ESFERAS, de Stokes	1851	$\nabla^2 p^* = 0 \quad \nabla^2 (\Delta x \vec{v}) = 0$		
LEY DE CAIDA DE CILINDRO, de Lamb	1911	$\nabla^2 p^* = 0 \quad (\nabla^2 \vec{v} = 0)$		
ESTABILIDAD DE CHORROS, de Rayleigh	1890	$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	}	No anula convecciones, No lineal
C: Soluciones Exactas de las Ecuaciones en casos complicados				
LA PLACA PLANA;	1908	Blasius		
FLUJO HACIA UN PUNTO DE ESTANCAMIENTO	1911	Hiemenz, Howarth		
FLUJO ENTRE PLACAS NO PARALELAS	1917	Hamel		
FLUJO CELULAR ENTRE CILINDROS COAXIALES	1920 - 1930	Taylor		
FLUJO CENTRIFUGO INDUCIDO POR UN DISCO ROTATORIO	1934	Karman - Cochran		
CHORRO CONTRA UNA PLACA	1957	Squire, Yatsyev		

Desde este punto de vista me parece que se justifica perfectamente considerar las ecuaciones de Navier-Stokes como un tema de un cierto período de la Historia de la Hidrodinámica, la segunda mitad del siglo XIX. Se examinaron por sesgos, y las hipótesis subyacentes, especialmente la condición de adherencia, se mostraron, en general, pertinentes. Pero estos exámenes no fueron exhaustivos, y se encontraron varios tipos de flujos que no verificaban la condición de adherencia. El propio Stokes osciló entre asumir o rechazar esta hipótesis durante veinte años. Sin duda las ecuaciones generales habían rendido ya sus frutos —el cuadro anterior es una muestra de ello— pero en la conciencia de los hidrodinámicos seguían existiendo dudas serias sobre su validez general, y un cierto desencanto: pues el fenómeno hidrodinámico completo parecía rehusarse a un tratamiento teórico riguroso. El siglo XIX, el siglo de Stokes, concluye de manera semejante a como, en palabras de Euler, concluía el siglo de Adviento: con la sensación, sin duda melancólica, de que el análisis los abandonaba en sus especulaciones. Las hermosas ecuaciones seguían guardando sus sesgos más penetrantes. La Hidrodinámica y la Hidráulica seguían escindidas. El siglo XX, el siglo de Prandtl, encontró vías propias para romper la escisión, para leer el fenómeno hidrodinámico con marcos de interpretación nuevos. Esto dicho con el debido respeto a los Hidrodinámicos del siglo XIX.

Las ecuaciones, por su parte, habrían de complicarse más, y llegaron enriquecidas al final del siglo con los términos debidos a la presencia de turbulencias en el medio fluido. En 1894, como una corona para este período inglés, el gran físico Osborne Reynolds estableció un modelo estadístico para tratar los movimientos turbulentos, según el cual podía tratarse un conjunto muy amplio de movimientos no laminares como la superposición de un flujo medio estacionario o casi-estacionario, y un flujo con las fluctuaciones o pulsaciones de las velocidades como variables características. El efecto estadístico de la superposición se resume en las ecuaciones

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{p} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{S}_{ij} + T_{ij} \right] \quad (18)$$

con $T_{ij} = - \overline{\rho u'_i u'_j}$, la componente ij del "Tensor de Esfuerzos Turbulentos". Estas se conocen como las Ecuaciones de Navier-Stokes-Reynolds-Orr. Enriquecen las anteriores (cf fórmula (3)), pero las complican al exigir la medida de las pulsaciones medias de velocidad. Hoy por hoy son ecuaciones centrales de la Hidrodinámica,

punto de partida de innumerables aproximaciones teóricas a los flujos reales, tan raramente laminares. Y al parecer, también nuestro siglo concluirá, por una especie de recuperación tardía del sentimiento inglés de fines del siglo XIX, instalado en la meditación principal sobre las Ecuaciones del Movimiento de Navier-Stokes. Lo vemos en Astrofísicos, Mecano-Cuánticos, Hidrodinámicos.

Quisiera, para concluir, plantear dos problemas teóricos de la mayor importancia, referentes a las ecuaciones que hemos tratado:

- 1: son invariantes lorentzianas bajo su forma de expresión en coordenadas cartesianas, pero no se ha probado que en su forma de expresión más general, en coordenadas curvilíneas ortogonales, exista una invarianza. El estudio de estas cuestiones pertenece a la Magneto-Hidrodinámica, pero un criterio definitivo acerca de la invarianza lorentziana sería una contribución teórica de la mayor importancia para muchas otras ciencias.
- 2: al parecer, si se quiere deducir las ecuaciones por métodos variacionales, a partir del Principio de Hamilton, y se asume la Lagrangiana del sistema función exclusiva de u, v, w, p y las primeras derivadas de las velocidades, es imposible hacerlo a menos que se agregue una hipótesis ad-hoc sobre la estructura del fluido. Este problema, planteado por Millikan, es merecedor de una investigación más profunda.

BIBLIOGRAFIA

- Rouse, Ince: History of Hydraulics, Chapter 10, 12; edición del Instituto de Investigación Hidráulica de Iowa, Univ. de Iowa, 1957.
- Rouse, Colab: Advanced Mechanics of Fluids, Chapter V, VII; edición de Wiley and Sons, Nueva York, 1959.
- Li, Lam: Principles of Fluid Mechanics, Chapter 11, 12; edición Addison-Wesley, Reding Massachusetts, 1964.
- Bateman Colab: Hydrodynamics, Part II; edición Dover, Nueva York, 1956.
- Lamb: Hydrodynamics, Chapter XI; edición Dover, Nueva York, 1932.
- Prandtl: Guide a través la Mecanique des Fluides, chap 111; edición Dunod, París, 1952.
- Batchelor: An Introduction to Fluid Dynamics, Chapter 1, 3; edición de Cambridge Univ. Press, 1980.
- Laurentiev-Chabat: Effets hidrodynamiques et modeles mathematiques, chap 1; edición MIR, Moscú, 1980.
- Milne-Thompson: Tratado de Hidrodinámica Teórica. Trad. Lago, Capítulo 19. Ed. Aguilar, Madrid, 1951.

