Series Temporales Autorregresivas de Orden Tres

Por: Gabriel Poveda Ramos.*

0. Los pocos libros conocidos en nuestro medio sobre Series Temporales (ver bibliografía, al final) estudian el proceso temporal autorregresivo de orden uno -llamado Proceso Temporal de Markov- y el proceso de orden dos -llamado Proceso Temporal de Yule-, pero no van más allá. En este artículo estudiamos el proceso (o serie) temporal, discreto, de orden tres, tanto para llenar ese vacío de la literatura usual entre nosotros, como también para llamar la atención sobre el gran interés que presenta el estudio teórico de las Series de Tiempo, que no es muy familiar a nuestros estadísticos profesionales.

1. Llamamos Proceso Temporal Autorregresivo, de orden tres a aquel cuyos valores sucesivos, ordenados en el tiempo pueden describirse por una ley de recurrencia de la forma

$$x_t = -a_1x_{t-1} - a_2x_{t-2} - a_3x_{t-3} + e_t \qquad (01)$$

en donde $x_1, x_2, x_3, ..., x_t, ...$ son los términos sucesivos que forman la serie, y donde los coeficientes a_1, a_2, a_3 son números reales constantes. En cuanto a e_t es una variable aleatoria que tiene una distribución estadística conocida con media nula $M(e_t) = 0$ y varianza constante $V(e_t) = \sigma^2$. Dicha distribución puede ser normal, o rectangular, o de Laplace, o cualquiera otra. Admitimos siempre que la distribución, cualquiera que ella sea, es la misma, con los mismos parámetros, para cualquiera de los valores que tome t a lo largo de la serie.

En el lenguaje más moderno podríamos decir que (01) es una ecuación en diferencias finitas, ordinaria, lineal, con coeficientes constantes, no homogénea y estocástica, de tercer orden. Desde el punto de vista estadístico esa ecuación expresa que cada término de la serie presenta una regresión lineal, múltiple, con los tres términos que le anteceden, salvo los términos primero y segundo, evidentemente.

La forma general y explícita de cada término de la serie x_t, dependiente de la variable discreta t, se obtiene resolviendo la ecuación (01). A partir de esa solución se puede simular toda la serie, así como extrapolarla para hacer pronósticos, y se puede también deducir otros elementos asociados a la serie temporal, lo mismo que muchas propiedades cualitativas de la misma.

2. La ecuación (01) puede también escribirse en la forma

$$x_t + a_1x_{t-1} + a_2x_{t-2} + a_3x_{t-3} = e_t \qquad (01A)$$

que es a veces más usada.

Siendo una ecuación no-homogénea, su solución general está formada por dos partes:

a) La parte complementaria, que es solución general de la ecuación homogénea asociada

$$x_t + a_1x_{t-1} + a_2x_{t-2} + a_3x_{t-3} = 0 \qquad (02)$$

Esa parte complementaria contendrá tres constantes arbitrarias.

b) Una solución particular que dependerá de los valores que tomen e_1, e_2, ...

La teoría de las ecuaciones en diferencias finitas, lineales, homogéneas, con coeficientes constantes, como lo es la ecuación (02) señala varios puntos esenciales para resolverla. Dichos puntos son los siguientes:

i. La ecuación (02) tiene soluciones de la forma m^t.

ii. Los valores m son las raíces de la ecuación

$$m^3 + a_1m^2 + a_2m + a_3 = 0 \qquad (03)$$

que se llama ecuación auxiliar o característica

* Ingeniero Químico y Electricista- Profesor Universitario Director del Centro de Investigaciones U. de M.

iii. Toda combinación lineal de soluciones de la ecuación (02) también la satisface a ella misma.

iv. La solución general de la ecuación (02) debe contener tres constantes arbitrarias.

3. Formamos pues la ecuación auxiliar (03) que tiene tres raíces. Dichas raíces se pueden calcular, rigurosamente, por el método de Tartaglia y Cardano. Como se recordará, el método parte de construir los números H y G que en este caso valen

$$H = (3a_2 - a_1^2)/9$$

$$G = (2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3)/27$$

Luego se calculan el número

$$u = \sqrt[3]{-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}} \, / \, \sqrt[3]{2}$$

y el número

$$v = -H/u$$

Entonces las tres raíces de la ecuación algebraica (03) son

$$m_1 = u + v - a_1/3 \qquad (04\text{-}1)$$

$$m_2 = \frac{-(u+v) + (u-v)\sqrt{3}\, i}{2} - \frac{a_1}{3} \qquad (04\text{-}2)$$

$$m_3 = \frac{-(u+v) - (u-v)\sqrt{3}\, i}{2} - \frac{a_1}{3} \qquad (04\text{-}3)$$

Si las tres raíces son distintas, la solución general de la ecuación (02) es

$$A_1m_1^t + A_2m_2^t + A_3m_3^t \qquad (05)$$

Si hay una de las raíces que sea doble (por ejemplo, m_2), la solución será

$$A_1m_1^t + m_2^t(A_2 + A_3t)$$

Y si m_1 es raíz triple, la solución será

$$m_1^t(A_1 + A_2t + A_3t^2)$$

Supondremos, en lo que sigue, que las tres raíces características, m_1, m_2, m_3 son distintas y que, por lo tanto, la solución complementaria de la ecuación (01A) es la expresión (05).

4. Para obtener la solución particular de la ecuación (01A) usamos el operador de desplazamiento E, definido como

$$Ex_t = x_{t+1},\ E^2x_t = x_{t+2},\ \text{etc.}$$

$$E^{-1}x_t = x_{t-1},\ E^{-2}x_t = x_{t-2},\ \text{etc.}$$

Con este operador la ecuación (01A) puede escribirse

$$\left[1 + a_1E^{-1} + a_2E^{-2} + a_3E^{-3}\right] \cdot x_t = e_t$$

o bien

$$E^{-3}\left[E^3 + a_1E^2 + a_2E + a_3\right] x_t = e_t$$

o bien, factorizando el polinomio de tercer grado en E:

$$E^{-3}\left[E - m_1\right]\left[E - m_2\right]\left[E - m_3\right] x_t = e_t$$

es decir

$$\left[1 - m_1E^{-1}\right]\left[1 - m_2E^{-1}\right]\left[1 - m_3E^{-1}\right] x_t = e_t$$

De aquí se deduce, usando las reglas operatoriales que

$$x_t = \frac{1}{\left[1 - m_1E^{-1}\right]\left[1 - m_2E^{-1}\right]\left[1 - m_3E^{-1}\right]}\, e_t \qquad (06)$$

El operador - fracción del lado derecho se puede descomponer en tres sumandos:

$$\frac{1}{\left[1 - m_1E^{-1}\right]\left[1 - m_2E^{-1}\right]\left[1 - m_3E^{-1}\right]} =$$

$$= \frac{C_1}{1 - m_1E^{-1}} + \frac{C_2}{1 - m_2E^{-1}} + \frac{C_3}{1 - m_3E^{-1}} \qquad (07)$$

En donde los numeradores C_1, C_2, C_3 cumplen la condición

$$C_1(1-m_2E^{-1})(1-m_3E^{-1}) + C_2(1-m_1E^{-1})(1-m_3E^{-1}) + C_3(1-m_1E^{-1})(1-m_2E^{-1}) = 1$$

Haciendo las operaciones indicadas y reorganizando los términos se tiene

$$(C_1m_2m_3 + C_2m_3m_1 + C_3m_1m_2)\, E^{-2} +$$

$$+ \left[C_1\ (m_2+m_3) + C_2\ (m_3+m_1) + C_3\ (m_1+m_2)\right] E^{-1}$$

$$+ (C_1 + C_2 + C_3) = 1$$

Por lo tanto, se debe tener

$$C_1 (m_2+m_3) + C_2 (m_3+m_1) + C_3 (m_1+m_2) = 0$$

$$C_1 m_2 m_3 + C_2 m_3 m_1 + C_3 m_1 m_2 = 0$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

Al resolver este sistema, por ejemplo por la regla de Crámer, se obtiene

$$C_1 = m_1^2 (m_2-m_3)/D$$

$$C_2 = m_2^2 (m_3-m_1)/D \tag{08}$$

$$C_3 = m_3^2 (m_1-m_2)/D$$

en donde el denominador D vale

$$D = m_1 m_2 (m_1-m_2)+m_2 m_3 (m_2-m_3)+m_3 m_1 (m_3-m_1)$$

Por otra parte, como se sabe bien

$$\frac{1}{1 - m_1 E^{-1}} = 1 + m_1 E^{-1} + m_1^2 E^{-2} + m_1^3 E^{-3} + \ldots \tag{09}$$

Combinando las expresiones (06), (07) y (09) se obtiene la solución particular buscada:

$$\begin{aligned} X_t = {} & C_1 (1+m_1 E^{-1} + m_2 E^{-2} + \ldots) e_t + \\ & + C_2 (1+m_2 E^{-1} + m_2^2 E^{-2} + \ldots) e_t + \\ & + C_3 (1+m_3 E^{-1} + m_3^2 E^{-2} + \ldots) e_t \\ = {} & (C_1+C_2+C_3) e_t + (m_1 C_1+m_2 C_2+m_3 C_3) e_{t-1} + \\ & + (m_1^2 C_1 + m_2^2 C_2 + m_3^2 C_3) e_{t-2} + \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

En resumen la solución general buscada es

$$x_t = A_1 m_1^t + A_2 m_2^t + A_3 m_3^t + X_t \tag{11}$$

en donde

$$X_t = \sum_{k=1}^{k=t} (m_1^k C_1 + m_2^k C_2 + m_3^k C_3) e_{t-k} \tag{12}$$

Estas ecuaciones (11), (12) y (08) dan la ley de formación de la serie temporal propuesta en la expresión (01), cuyas raíces características son m_1, m_2, m_3.

5. Es necesario ahora considerar el aspecto de la condición estacionaria que se le pueda exigir a la serie. Esta condición significa, como se sabe, que considerando las variables aleatorias x_0, x_1, ..., es necesario que las esperanzas probabilísticas (o medias) sean todas iguales. Es decir:

$$M(x_0) = M(x_1) = M(x_2) = \ldots \tag{13}$$

También es necesario que sus varianzas $V(x_t)$ sean iguales:

$$V(x_0) = V(X_1) = V(X_2) = \ldots \tag{14}$$

Si tomamos valores medios a ambos lados de la ecuación (01A) tendremos

$$M(x_t) + a_1 M(x_{t-1}) + a_2 M(x_{t-2}) + a_3 M(x_{t-3}) = 0 \tag{15}$$

Las condiciones (13) y (15) exigen que

$$M(x_0) = 0 = M(x_1) = M(x_t) \text{ para todo t,} \tag{16}$$

como condición necesaria para que la serie $\{x_t\}$ sea estacionaria. Si alguna de las raíces características m_1, m_2, m_3 es, en valor absoluto, mayor que uno ($|m_i|>1$), la ecuación (11) muestra que el proceso no puede cumplir la condición (11) y, por lo tanto, ese proceso no puede ser estacionario (salvo que hagamos nulas las constantes arbitrarias A_1, A_2, A_3). Cuando dos de las raíces características son complejas (y mutuamente conjugadas), por ejemplo m_2, m_3, entonces la expresión

$$A_2 m_2^t + A_3 m_3^t$$

es igual a la expresión

$$XR^t . \cos (\varnothing t - \varepsilon)$$

donde

$$R = |m_2| = |m_3|, \; K = \sqrt{(A_2+A_3)^2 - (A_2-A_3)^2},$$

$$\varepsilon = \tan^{-1} \left[i(A_2-A_3)/(A_2+A_3) \right]$$

En este caso, la serie (11) describe un proceso de la forma

$$A_1 m_1^t + Ka^t . \cos (\varnothing t - \varepsilon) + X \tag{17}$$

donde las constantes arbitrarias son A_1, K, ε . A este se le llama un proceso con periodicidades ocultas, y desde el punto de vista gráfico se caracteriza porque presenta ciclos estadísticos, de longitud de onda igual a $2\pi/\varnothing$, con amplitudes crecientes (si $a > 1$) o amplitudes decrecientes (cuando $a < 1$). Pero este proceso, obviamente, no es estacionario porque su media variaría con el tiempo según la ley

$$M(x_t) = A_1 m_1^t + Ka^t . \cos(\emptyset t - \varepsilon)$$

Para que el proceso sea estacionario se requiere, pues:

a) o bien que hagamos $A_1 = 0 = A_2 = 0 = A_3$

b) o bien que $|m_1| < 1$, y $|m_2| < 1$, y $|m_3| < 1$, y que además, t sea grande en valor (más rigurosamente, cuando t tiende al límite $t \to +\infty$) para que la parte complementaria

$$A_1 m_1^t + A_2 m_2^t + A_3 m_3^t$$

pueda considerarse despreciable. Así pues, bien sea en la condición (a) o en la condición (b), la serie queda descrita por

$$x_t = X_t$$

es decir, por la solución particular (12) (18)

6. La condición de que los módulos $|m_1|$, $|m_2|$, $|m_3|$ sean menores que la unidad (sean complejas o reales las raíces características) se suele llamar condición de estabilidad del proceso (01). Un teorema derivado de la condición de estabilidad de Routh-Hurwitz señala como condición necesaria y suficiente para que las tres raíces de la ecuación (02) caigan en el interior del círculo unidad del plano complejo, que los tres determinantes siguientes sean estrictamente positivos:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_3 \\ a_3 & 1 \end{vmatrix} > 0 \qquad (19\text{-}1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_1 & 1 & 0 & a_3 \\ a_3 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \qquad (19\text{-}2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & a_3 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \qquad (19\text{-}3)$$

Por esta razón, cuando se investiga un proceso autorregresivo de tercer orden, que deba ser estacionario, antes de buscar las raíces características, es necesario buscar los coeficientes a_1, a_2, a_3 y verificar si cumplen o no las desigualdades (18) escritas con determinantes. Si alguno de los determinantes resultare ser nulo o negativo, el proceso no puede ser estacionario salvo que anulemos A_1, A_2, A_3.

7. Consideremos pues que estamos en las condiciones en que el proceso autorregresivo es del tercer orden y es estacionario. Podemos así escribir

$$x_t = X_t = \sum_{k=1}^{t} (m_1^k C_1 + m_2^k C_2 + m_3^k C_3) e_{t-k} \qquad (20)$$

Tomando valores medios a lado y lado, y recordando que $M(e_t) = 0$ para todo t, tenemos que

$$M(x_t) = 0$$

como lo exige la condición estacionaria. Recordando cómo se forma la varianza de una combinación lineal de variables aleatorias, tenemos

$$V(X_t) = \sum_{k=1}^{t} (m_1^k C_1 + m_2^k C_2 + m_3^k C_3)^2 \, V(e_{t-k}) \qquad (21)$$

en donde $V(e_{t-k}) = \sigma^2$. Si formamos el cuadrado del trinomio de la derecha resultan seis términos. Tres son como $C_1^2 m_1^{2k}$; y tres son como $C_1 C_2 m_1^k m_2^k$. Al aplicar la sumatoria resultan seis series geométricas que se suman usando la fórmula muy conocida para este caso. Así se tiene

$$V(x_t) = \sigma^2 \left[C_1^2 \frac{1-m_1^{2t}}{1-m_1^2} + C_2 \frac{1-m_2^{2t}}{1-m_2^2} + C_3 \frac{1-m_3^{2t}}{1-m_3^2} + 2C_1C_2 \frac{1-(m_1m_2)^{2t}}{1-m_1m_2} + 2C_2C_3 \frac{1-(m_2m_3)^{2t}}{1-m_2m_3} + 2C_3C_1 \frac{1-(m_3m_1)^{2t}}{1-m_3m_1} \right] \qquad (22)$$

En esta expresión se observa que al transcurrir el tiempo (aumentando t), la varianza va disminuyendo, porque m_1, m_2, m_3 son todas menores que 1 en módulo. Pasando al límite, cuando t aumenta a infinito, obtenemos como varianza de la serie.

$$\tau^2 = \sigma^2 \left[\frac{C_1}{1-m_1^2} + \frac{C_2}{1-m_2^2} + \frac{C_3}{1-m_3^2} + \frac{2C_1C_2}{1-m_1m_2} + \frac{2C_2C_3}{1-m_2m_3} + \frac{2C_3C_1}{1-m_3m_1} \right] \quad (23)$$

Como la serie llega a adquirir un régimen estacionario sólo a largo plazo, la varianza (constante) de sus términos es la que da la expresión anterior (23) y que vale τ^2.

8. Partamos nuevamente de la ecuación original (01-A):

$$x_t + a_1x_{t-1} + a_2x_{t-2} + a_3x_{t-3} = e_t \quad (01\text{-}A)$$

Construimos las tres ecuaciones de Yule-Walker multiplicándola, respectivamente por x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}; tomando luego el valor esperado o media probabilística; recordando que $M(x_{t-k}\, e_t) = 0$, y dividiendo por $V(x_t)\, V(x_{t-1}) = \tau^2$. Obtenemos así

$$p_1 + a_1 + a_2p_1 + a_3p_2 = 0$$

$$p_2 + a_1p_1 + a_2 + a_3p_1 = 0 \quad (24)$$

$$p_3 + a_1p_2 + a_2p_1 + a_3 = 0$$

en donde $p_k = M(x_tx_{t-k}) / \tau^2 = M(x_{t+k}x_t) / \tau^2$ es el coeficiente de autocorrelación de orden k para la serie ya en régimen estacionario.

De las tres ecuaciones (24) pueden obtenerse los tres primeros coeficientes de autocorrelación p_1, p_2, p_3, aparte de p_0, del cual se sabe que siempre es igual a uno.

Resolviendo el sistema anterior se encuentra:

$$p_1 = (a_2a_3 - a_1) \div B$$

$$p_2 = a_1(a_1+a_3) - a_2(1+a_2) \div B$$

$$p_3 = (1+a_2)\,(a_1a_2-a_3)-(a_1+a_3)\,(a_1^2-a_3^2)$$
$$+a_2(a_1-a_2a_3) \div B \quad (25)$$

en donde

$$B = 1 + a_2 - a_3\,(a_1 + a_3)$$

y así quedan dados p_0 (=1), p_1, p_2 y p_3, los primeros términos del correlograma de la serie.

9. Los términos siguientes del correlograma pueden calcularse como sigue. Partamos nuevamente de

$$x_t + a_1x_{t-1} + a_2x_{t-2} + a_3x_{t-3} = e_t \quad (01\text{-}A)$$

tomemos un sub-índice h distinto a t; multipliquemos toda la ecuación por x_h; tomemos valores medios; y tenemos así

$$M(x_hx_t + a_1x_hx_{t-1} + a_2x_hx_{t-2} + a_3x_hx_{t-3})$$
$$= M(x_h\, e_t) \quad (26)$$

Recordemos que $M(x_hx_{t-k}) = M(x_{h-j}x_{t-k-j})$ para cualquier entero j.

Pongamos t - h - 3 = i y así en la ecuación (26) anterior puede escribirse

$$M(x_hx_t) = M(x_hx_{h+i+3}) = p_{i+3}\, \tau^2$$

$$M(x_hx_{t-1}) = p_{i+2}\, \tau^2$$

y así sucesivamente. Dividiendo por τ^2 se obtiene

$$p_{i+3} + a_1p_{i+2} + a_2p_{i+1} + a_3p_i = 0 \quad (27)$$

Esta es una ecuación en diferencias finitas, lineal, homogénea, de la misma forma, con los mismos coeficientes, de la ecuación (02). Por lo tanto, su solución es de la forma de la ecuación (05), es decir:

$$p_j = K_1m_1^j + K_2m_2^j + K_3m_3^j \quad (28)$$

donde m_1, m_2, m_3 son las raíces de la ecuación característica (03).

Puesto que ya conocemos a p_0 (=1), p_1, p_2 (por las ecuaciones (25) de arriba), las constantes k_1, k_2, k_3 deben satisfacer las condiciones iniciales:

$$1 = K_1 + K_2 + K_3$$

$$p_1 = K_1m_1 + K_2m_2 + K_3m_3 \quad (29)$$

$$p_2 = K_1m_1^2 + K_2m_2^2 + K_3m_3^2$$

Resolviendo estas ecuaciones se encuentra

$$K_1 = \left[m_2m_3(m_3-m_2) - (p_1m_3^2-p_2m_3) + \right.$$
$$\left. + p_1m_2^2 - p_2m_2 \right] \div F$$

$$K_2 = \left[p_1m_3^2-p_2m_3-m_1m_3^2+m_1^2m_3 \right.$$
$$\left. +m_1p_2-m_1^2p \right] \div F \quad (30)$$

$$K_3 = \left[m_2p_2-m_2^2p_1-m_1p_2+m_1^2p_1+m_1m_2(m_2-m_1) \right] \div F$$

(Continúa en página siguiente)

en donde

$$F = m_1m_2(m_2-m_1) + m_2m_3(m_3-m_2) + m_3m_1(m_1-m_3)$$

En esta forma la solución (28) queda determinada numéricamente, en forma explícita y completa. Podemos así calcular todos los términos del correlograma de Wold para la serie.

10. La función de densidad espectral de la serie estacionaria ($x_t = X_t$) se define como

$$W(\alpha) = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} P_j e^{ij\alpha} = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} P_j \cdot \cos(\alpha j)$$

En esta expresión "e" es la base de los logaritmos neperianos.

O bien, si ponemos $e^{i\alpha} = z$, también es

$$G(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j z^j$$

Escribamos la ecuación (01) en la forma

$$e_t = x_t + a_1x_{t-1} + a_2x_{t-2} + a_3x_{t-3}$$

El profesor Maurice Kendall ha demostrado que para series como ésta $\{ e_t \}$, (Ver, por ejemplo, su libro Time Series), la varianza es

$$V(e_t) = (1 + a_1z + a_2z + a_3z)(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3})$$

$$x\, V(x_t) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} p_j z^j$$

de donde

$$G(z) = \frac{V(e_t)}{V(x_t)}$$

$$x \frac{1}{1+a_1^2+a_2^2+a_3^2 + (a_1+a_2+a_2a_3)(z+z^{-1}) + A}$$

$$A = (a_2+a_1a_3)(z^2+z^{-2}) + a_3(z^3+z^{-3})$$

Recordando que $V(e_t) = \sigma^2$, $V(x_t) = \tau^2$, $z+z^{-1} = 2\cos\alpha$, se tiene para la función de densidad espectral de nuestra serie estacionaria, autorregresiva, de tercer orden, la función

$$W(\alpha) = \frac{\sigma^2}{\tau^2} \cdot \frac{1}{1+a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2B + 2C + 2D}$$

$$B = (a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3) \cos \alpha$$
$$C = (a_2 + a_1 a_3) \cos 2\alpha$$
$$D = a_3 \cos 3\alpha$$

Dado que $\cos(180° + \alpha) = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, la función de densidad espectral $w(\alpha)$ tiene una gráfica que es simétrica respecto a la recta de abscisa $\alpha = 180°$, en ese gráfico. El coeficiente σ^2/τ^2 se calcula con la fórmula (23).

11. Como ejemplo de lo expuesto, consideremos una serie de tiempo, estacionaria, que acepte la representación autorregresiva, de tercer orden, dada por la ecuación.

$$x_t = 0.6x_{t-1} + 0.4x_{t-2} - 0.192x_{t-3} + e_t$$

para $t = 4, 5, 6, \ldots$, y que, por lo tanto tiene los valores

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

mientras la variable aleatoria e_t toma los valores e_1, e_2, e_3, ...

Su ecuación característica (o auxiliar) es la de tercer grado

$$m^3 - 0.6m^2 - 0.4m + 0.192 = 0$$

que tiene los coeficientes $a_1 = -0.6$, $a_2 = -0.4$, $a_3 = 0.192$.

En este caso tenemos:

$$H = (3a_2-a_1^2) \div 9 = -0.173333333\ldots$$

$$G = (2a_1^3 - 9a_1a_2+27a_3) \div 27 = 0.096$$

$$\sqrt{G^2 + 4H^3} = 0.1077720447\, i, \text{ con } i = \sqrt{-1}$$

$$2u^3 = -0.096 + 0.1077720447i =$$

$$= 0.1443288385e^{i\times 131.6936602°}$$

$$u = 0.416333195e^{43.89788673° i}$$

$$v = -H/u = 0.416333195e^{-43.89788673° i}$$

$$u + v = 0.60$$

$$u - v = 0.577350266\, i = i/\sqrt{3}$$

de manera que las tres raíces son todas en módulo menor que 1, porque:

$$m_1 = u + v - a_{1/3} = 0.8$$

$$m_2 = \frac{-(u+v) + (u-v)\sqrt{3}\,i}{2} - \frac{a_1}{3} =$$

$$= \frac{-0.6 - 1}{2} + \frac{0.6}{3} = -0.6$$

$$m_3 = \frac{-(u+v) - (u-v)\sqrt{3}\,i}{2} - \frac{a_1}{3} =$$

$$= \frac{-0.6 + 1}{2} + \frac{0.6}{3} = 0.4$$

Usando las fórmulas (25) calculamos p_1, p_2, p_3:

$$p_1 = 0.5232 \div 0.678336 = 0.7712991792$$

$$p_2 = 0.4848 \div 0.678336 = 0.7146900651$$

$$p_3 = 0.369919488 \div 0.678336 = 0.5453337107$$

Usando el operador E, nuestra ecuación serial tiene la solución particular (según las ecuaciones (06) y (07)):

$$x_t = X_t = \left[\frac{C_1}{1-m_1E^{-1}} + \frac{C_2}{1-m_2E^{-1}} + \frac{C_3}{1-m_3E^{-1}} \right] e_t$$

y los coeficientes C_1, C_2, C_3 están dados por las ecuaciones (08). Sustituyendo allí los valores numéricos de m_1, m_2, m_3, se encuentra

$$C_1 = -0.64/-0.56 = 1.142857143$$

$$C_2 = 0.144/-0.56 = 0.257142857$$

$$C_3 = -0.224/-0.56 = 0.40000000$$

Con esto podemos calcular la expresión

$$\frac{C_1}{1-m_1^2} + \frac{C_2}{1-m_2^2} + \frac{C_3}{1-m_3} +$$

$$+ \frac{2C_1C_2}{1-m_1m_2} + \frac{2C_2C_3}{1-m_2m_3} + \frac{2C_3C_1}{1-m_3m_1} =$$

$$= 3.628117914 + 0.103316325 + 0.19047619 + 0.397131825 - 0.205714285 - 0.914285714 = 3.199042254$$

y por lo tanto, según la ecuación (23)

$$\tau^2 = 3.199042254\,\sigma^2$$

Para calcular la ecuación (28) de los coeficientes de autocorrelación aplicamos las fórmulas (29) y obtenemos:

$$K_1 = 1.123124823$$

$$K_2 = 0.077950749$$

$$K_3 = 0.201075573$$

y por lo tanto

$$P_j = 1.123124823 \times 0.8^j + 0.077950749 \times (-0.6)^j + -0.201075573 \times 0.4^j$$

Podemos pues formar así la tabla para hacer el correlograma:

j	p_j
0	1.0000000000
1	0.7712991792
2	0.7146900651
3	0.5453337107
4	0.4649868099
5	0.3599050779
6	0.2972336982
7	0.2330247826
8	0.1896065739
9	0.1499049895
10	0.121044861
12	0.07734685847
14	0.04945609775
16	0.03163505774
18	0.02024032099
20	0.0129515954
22	0.008288224116
24	0.005304176324
26	0.00339456945
28	0.002172487223
30	0.00139037842
40	0.00014928899

Para construir la función w (α) de densidad espectral, calculamos:

$$1+a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 1+0.6^2+0.4^2+0.192^2 = 1.556864$$

$$2(a_1 + a_1a_2 + a_2a_3) = -0.8736$$

$$2(a_2 + a_1a_3) = -1.0304$$

$$2a_3 = 0.384$$

y recordando que

$$\sigma^2 / \tau^2 = 0.312593557$$

se puede escribir la densidad espectral:

$$w(\alpha) = \frac{0.312593557}{1.556864 - 0.8736 \cos \alpha - 1.0304 \cos 2\alpha + 0.384 \cos 3\alpha}$$

cuyos valores tabulados se dan enseguida hasta 190°:

α	w (α)
0°	8.47964293
10°	5.138769853
20°	2.255099034
30°	1.096418604
40°	0.6049567643
50°	0.3713844282
60°	0.2498222254
70°	0.1822858519
80°	0.1432979211
90°	0.1208201239
100°	0.1089623273
110°	0.1049838755
120°	0.1080567759
130°	0.1188621042
140°	0.1396034613
150°	0.173834624
160°	0.2238491647
170°	0.2800066562
180°	0.3076514442
190°	0.2800066562

En el dibujo anexo se muestra la gráfica de esta función en dos escalas de las ordenadas para facilitar su lectura.

Por otra parte en otro diagrama de computador se muestra una realización de la serie de este ejemplo, con doscientos términos

$$x_t = 0.6x_{t-1} + 0.4x_{t-2} - 0.192x_{t-3} + e_t$$

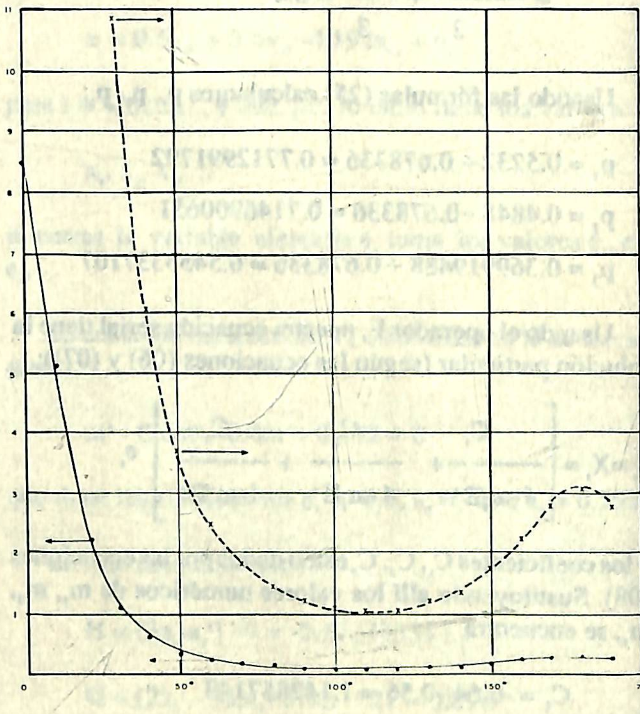
en donde los tres valores iniciales de la serie son $x_0 = 10$, $x_1 = 10$ y $x_2 = 10$; y en donde todas las variables e_t tienen una distribución rectangular o uniforme, con recorrido desde -3 hasta +3, con media igual a cero y con desviación típica igual a $\sqrt{3}$.

La tabla final presenta los doscientos valores $x_0, x_1, ..., x_{200}$ y los doscientos valores $e_1, e_2, ..., e_{200}$ tomados al azar de la distribución rectangular.

Reconocimiento. El autor agradece al Ingeniero David Poveda su ayuda con el trabajo de computador.

FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL DEL PROCESO

$$X_t = 0.6\ X_{t-1} + 0.4\ X_{t-2} - 0.192$$



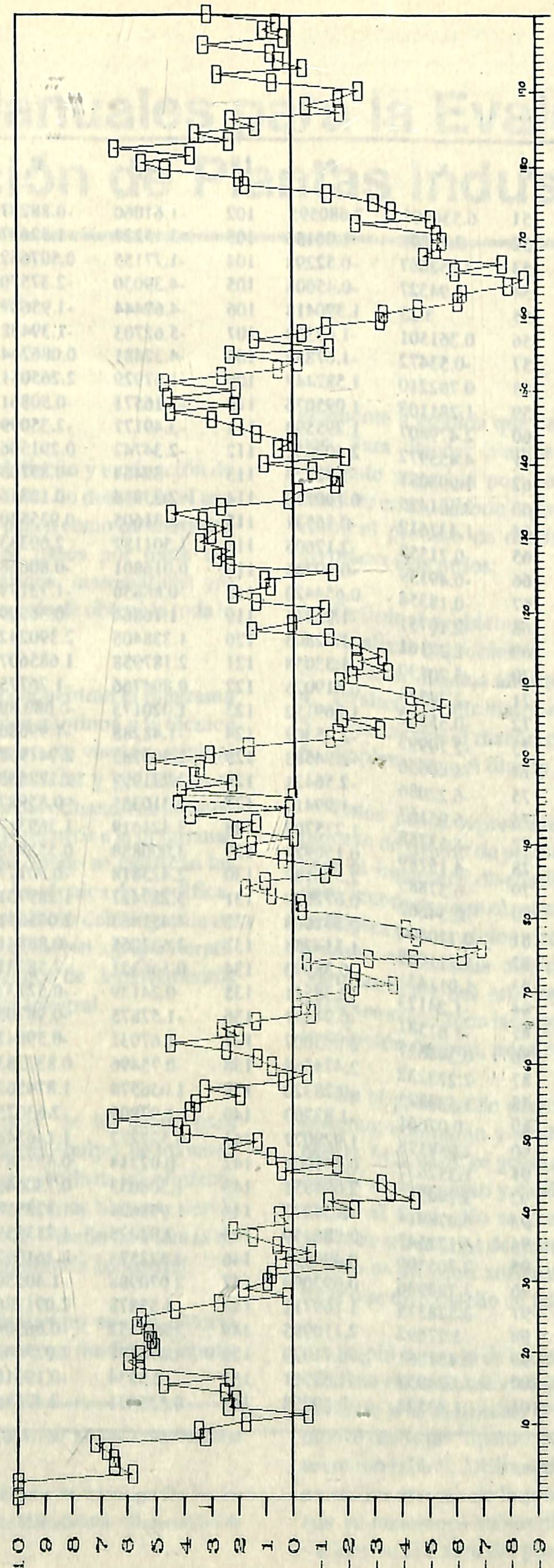
BIBLIOGRAFIA

BOX, George E. P. and Gwilym Jenkins. Time Series Analysis Forecasting and Control. Oakland. Holden Day. Inc. 1976. 575 p.

KENDALL, Sir Maurice. Time Series. London. Charles Griffin and Company Ltd. 1973. 197 p.

Mac FARLANE, A. G. J. Engineering Systems Analysis. London. Addison Wesley Publishing Co. 1964. 272 p.

$$X(t) = 0.6X(t-1) + 0.4X(t-2) - 0.192X(t-3) + e$$



t	x_t	e_t	t	x_t	e_t	t	x_t	e_t	t	x_t	e_t
0	10	0	51	6.530001	2.680595	102	-1.61060	-0.88237	153	-0.22852	-0.67310
1	10	0	52	3.78878	-1.06154	103	-3.15227	-1.32637	154	2.266192	2.679466
2	10	0	53	3.552667	-0.52298	104	-1.77155	0.507682	155	-1.37028	-2.53582
3	5.808101	-2.27189	54	1.94327	-0.45008	105	-4.39030	-2.37570	156	1.336011	1.207828
4	6.476026	0.911165	55	3.25	1.390418	106	-4.69444	-1.95687	157	-0.37308	-0.19146
5	6.502023	2.213167	56	0.361501	-1.68369	107	-5.62703	-1.39438	158	-1.28992	-1.86357
6	6.755045	1.378575	57	-0.53472	-1.67852	108	-4.32481	0.086244	159	-3.29197	-2.11227
7	7.203558	1.793118	58	0.782210	1.582447	109	-1.67929	2.265081	160	-3.36565	-0.94613
8	3.217953	-2.55781	59	1.281103	1.095076	110	-2.16571	-0.50861	161	-4.66820	-1.57968
9	3.457103	-0.05812	60	2.479807	1.295593	111	-3.49177	-2.35099	162	-6.16375	-2.64862
10	1.705474	-0.27288	61	4.453972	2.603831	112	-2.34742	0.291506	163	-6.32732	-1.40799
11	-0.56822	-2.35650	62	1.993081	-1.42525	113	-32464	-0.85705	164	-7.97192	-2.60632
12	2.380553	2.703062	63	2.601425	0.100110	114	-2.33954	-0.12316	165	-8.58766	-2.45701
13	2.096813	1.223222	64	1.337612	-0.16531	115	-1.31605	0.935530	166	-6.06942	1.057099
14	2.510593	0.191184	65	-0.71558	-2.17605	116	1.501187	2.60333	167	-7.79246	-2.24636
15	4.714984	2.826969	66	-0.49159	-0.09781	117	0.016801	-0.80668	168	-4.88207	0.572342
16	2.356237	-1.07440	67	-0.18358	0.654423	118	-0.86856	-1.73179	169	-5.36464	-0.48374
17	5.554469	2.736767	68	-2.10751	-1.93811	119	-1.16864	-0.36599	170	-5.56603	-1.89056
18	5.97699	2.607091	69	-2.27161	-1.02805	120	1.338406	2.390242	171	-5.36798	-0.81987
19	5.565205	0.209620	70	-3.70130	-1.53058	121	2.187958	1.685607	172	-2.37481	2.042383
20	5.049989	0.386528	71	-2.30575	0.419025	122	0.804766	-1.26775	173	-5.14580	-2.64239
21	5.135807	1.027313	72	-0.55867	1.869152	123	1.020173	-0.080.89	174	-3.67574	-0.66898
22	5.248394	1.215434	73	-2.79993	-2.25307	124	-1.48288	-1.99680	175	-3.02922	0.778579
23	5.678413	1.444651	74	-4.40656	-2.94583	125	2.305783	2.941958	176	-1.34235	0.957484
24	5.521591	1.001261	75	-6.22086	-2.56421	126	2.771997	2.177553	177	1.669593	2.98095
25	4.300273	-0.27635	76	-6.95167	-1.99412	127	2.310355	-0.55987	178	1.901438	0.855012
26	2.703405	-0.99514	77	-4.53758	1.275704	128	3.421619	1.369317	179	4.590884	2.524452
27	0.223125	-2.05888	78	-4.15789	0.150924	129	3.000888	0.555998	180	5.460799	2.266256
28	1.807206	1.417621	79	-0.37885	2.596187	130	2.423818	-0.30177	181	3.663234	-1.08452
29	0.911797	0.257277	80	-0.34662	0.672629	131	3.287427	1.289731	182	6.469719	2.968909
30	0.782935	-0.44418	81	0.770404	0.331608	132	4.451463	2.085651	183	2.228971	-2.06968
31	-2.17981	-2.66731	82	1.711088	1.314755	133	2.632065	-0.88841	184	3.527904	0.305975
32	0.439828	1.609609	83	1.011431	-0.38993	134	0.146321	-2.58231	185	1.29049	-0.47565
33	-0.67713	0.081217	84	-1.24173	-2.38511	135	-0.24139	-0.52733	186	2.215718	0.458225
34	0.572462	0.384287	85	-1.61581	-0.94681	136	-1.57875	-0.98708	187	-1.81711	-2.98538
35	1.434566	1.446389	86	0.344627	2.005007	137	-1.67032	-0.59842	188	-0.55540	-0.10365
36	2.190879	0.971144	87	2.273232	2.474368	138	-0.75496	0.832383	189	-1.76206	-0.27655
37	0.167141	-1.6113	88	1.528825	-0.28320	139	1.056574	1.874562	190	-2.48023	-1.54971
38	0.486768	-0.21443	89	-0.07661	-1.83703	140	-1.97809	-2.63075	191	0.684054	2.770383
39	-2.29037	-2.22864	90	2.058178	1.929077	141	0.527272	1.146546	192	2.6899	2.933244
40	-1.30178	-0.09017	91	1.352632	0.441904	142	-0.02214	0.655585	193	-0.43607	-2.79984
41	-4.45873	-2.66805	92	3.744511	2.094951	143	1.308053	0.730640	194	0.440915	-0.24205
42	-3.57821	-0.82200	93	0.078814	-2.31377	144	1.998694	1.323958	195	0.707680	1.134023
43	-3.25289	0.427581	94	4.171547	2.886159	145	2.94025	1.213559	196	3.167164	2.482463
44	0.413706	2.940652	95	2.305599	0.490091	146	4.473573	2.161092	197	0.230804	-1.86791
45	-1.625	-1.25908	96	3.728936	0.692090	147	2.070988	-1.40550	198	0.992843	-0.27663
46	0.761727	0.946688	97	3.528375	1.169711	148	4.55878	2.091286	199	0.533977	0.454044
47	2.362279	2.634674	98	5.27692	2.110995	149	2.039652	-0.66508	200	3.04668	2.37347
48	1.313885	-0.72017	99	3.151251	-0.71029	150	4.676677	2.027003			
49	3.92904	2.342049	100	1.694957	-1.62911	151	2.5534	-0.19318			
50	4.21676	1.787339	101	-1.33528	-2.59958	152	0.535231	-2.47586			