

# Significado del factor de longitud eficaz K, en el diseño estructural de marcos planos elásticos

Por el Ingeniero Gabriel García M.\*

## ARTICULO 1

### INTRODUCCION

Dos artículos recientes, uno en el Jnl. del A.C.I. de Julio-Agosto del 86<sup>1</sup>, y el otro en el Jnl. de la Structural División de la A.S.C.E. de Agosto de 1986<sup>2</sup>, traen de nuevo sobre el tapete, el problema del factor de longitud eficaz K que define la carga crítica Pcr de un elemento sometido a flexo-compresión, generalmente aceptada como dada por la expresión:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(K\ell_u)^2} = \frac{P_E}{K^2} \quad (1)$$

donde:

$\ell_u$  = longitud del miembro articulado

$P_E = \frac{\pi^2 EI}{\ell_u^2}$  = carga crítica de Euler

En ambos artículos, y en muchos otros, como por ejemplo los de las referencias (7), (10), (11), se muestra como los valores que generalmente ofrecen los algoritmos suministrados por la técnica ordinaria, para calcular a K, como por ejemplo las fórmulas de Furlong, ábacos de Jackson-Moreland, Cranston, etc. no son satisfactorios en algunos casos, para representar al fenómeno físico propuesto.

Este problema tiene gran importancia pues, algunos códigos, v.g. el A.C.I.<sup>3</sup>, proponen como fórmula para calcular el momento de diseño ( $M_D$ ) de un miembro a flexo compresión, en un marco sometido a cargas laterales, la siguiente:

$$M_D = M_g \delta_b + M_s \delta_s \quad (2)$$

con

$\delta_b$  = factor de amplificación para marco arriostrado.

$\delta_s$  = factor de amplificación para marco no arriostrado.

$M_g$  = momentos de cargas de gravedad de primer orden.

$M_s$  = momentos de cargas laterales de primer orden.

donde:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_u}{\phi \Sigma P_{cr_1}}} > 1, \quad (3)$$

$P_{cr_1}$  = carga crítica en pilares con desplazamiento lateral.

El factor  $\delta_b$  tiene una forma semejante:

$$\delta_b = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{\phi P_{cr_2}}}. \quad (4)$$

$P_{cr_2}$  = carga crítica en pilares arriostrados contra desplazamiento lateral.

En la expresión (3), las sumatorias se extienden a todos los pilares del piso, y en la fórmula (4), que toma en consideración únicamente al miembro que se diseña,  $C_m$ , representa las probabilidades de obtener una o dos curvaturas en el estado elástico.

Algunos otros códigos<sup>4</sup> han propuesto fórmulas sucedáneas para la expresión (3), como por ejemplo:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - Q_u} \quad (5)$$

donde:

$$Q_u = (\Sigma P_u / H_u) (\Delta_u / \ell_u) \quad (6)$$

con:

$$H_u = \sum V_u = esfuerzo cortante acumulado en el piso.$$

\* Profesor Titular, Profesor Emérito, Maestro Universitario de la Facultad de Minas, U. N. de Colombia.

$\Delta_u$  = desplazamiento lateral último del piso.

Obviamente, este procedimiento requiere ser aplicado en forma iterativa, pues  $\Delta_u$  es producido por  $H_u$ . Esto alarga y encarece el proceso de diseño. Pero en el fondo, además, este método se hace inaplicable cuando se quiere llegar a una simple relación de desplazamientos de primero a segundo orden en el rango inelástico<sup>1</sup>.

## **ARTICULO 2**

## DISCUSSION

Realmente, la esencia del factor K de la fórmula (1) es correcta en sí misma, pues la reducción de la longitud del miembro\* es una forma simple y sencilla, de darle variabilidad a la carga crítica para que represente la inestabilidad elástica de un miembro a flexo compresión, con diferentes tipos de restricción en sus extremos.

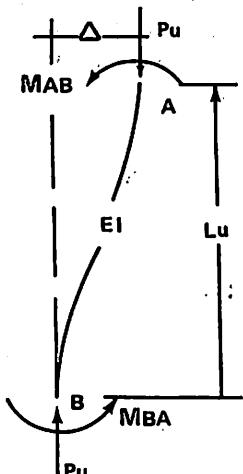
El autor ha mostrado en las referencias (6), (7), (8) un método para representar a la carga crítica de miembros a flexo-compresión con desplazamiento lateral en función de un factor  $\delta$  que es función de los grados de empotramiento de los extremos del miembro:

$$P_{cr_1} = \frac{\pi^2 EI \delta}{\ell_u^2} = P_E \delta \quad (7)$$

**donde**

$$\partial = \frac{1}{K^2} = \frac{f_A^O(2+f_B^O)(4-f_A^O) + f_B^O(2+f_A^O)(4-f_B^O)}{2(4-f_A^O)(4-f_B^O)} \quad (8)$$

y donde  $f_A^o$  y  $f_B^o$  son los grados de empotramiento de los extremos A y B del pilar: Fig. (1).



## **FIGURA 1**

- \* La longitud reducida fue utilizada por Timoshenko en la referencia (5).

Como puede verse en las referencias (6), (7), (8) los grados de empotramiento  $f_A^0, f_B^0$  pueden tomar todos los valores del intervalo.

$$0 \leq f_i^0 \leq 1 \quad i = A, B \quad . \quad (9)$$

Cuando el valor es 0, el extremo tiene una restricción equivalente a una articulación. Cuando es 1, el extremo está empotrado.

De la equivalencia dada por la ec. (8) deducimos:

$$K = \left[ \frac{2(4-f_A^0)(4-f_B^0)}{f_A^0(2+f_B^0)(4-f_A^0) + f_B^0(2+f_A^0)(4-f_B^0)} \right]^{1/2} \quad (10)$$

Así, pues, el (G.D.E.) nos proporciona una forma simple de obtener el valor de K en cualquier situación de restricción, para el caso de estructuras sometidas a desplazamiento lateral o que posean poca restricción lateral, desde que se hayan determinado previamente los grados de empotramiento de los extremos. Más adelante veremos cómo se resuelven las paradojas de Cheong-Siat-Moy<sup>2</sup> y algunos ejemplos típicos de inestabilidad elástica, en una forma simple, rápida y elegante; pero antes, es preciso recordar que en el grado de empotramiento, la expresión (3) se cambia por<sup>6, 7, 8</sup>

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\phi_1 \Sigma P_u}{\phi \Sigma P_{cr_1}}} \quad (11)$$

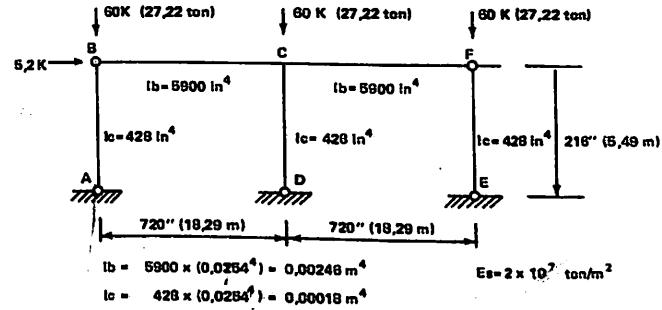
**donde:**

$$\phi_1 = \frac{\pi^2}{12} = 0,82 \quad (12)$$

Los demás términos conservan su significado previo.

### EJEMPLO 1)

1) Vamos a resolver el ejemplo de Cheong-Siat-Moy<sup>2</sup>, representado en la Fig.(2).



## **FIGURA 2**

Las rigideces relativas ( $I/\ell$ ) para los pilares AB, DC y EF serán:

$$k_c/E_s = \frac{0,00018}{5,49} = 0,32 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

y para las vigas:

$$k_b/E_s = \frac{0,00246}{18,29} = 1,34 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Se deducen inmediatamente los G.D.E.  $f_{CF}^0 = f_{CB}^0$  y  $f_{CD}^0$ :

$(f_{AB}^0 = f_{BA}^0 = f_{BC}^0 = f_{DC}^0 = f_{EF}^0 = f_{FE}^0 = f_{FC}^0 = 0)$ , por ser articulaciones.

$$f_{CF}^0 = \frac{1}{1 + \frac{\frac{4k_c}{(4-f_{DC}^0)} + \frac{4k_b}{(4-f_{BC}^0)}}{13,4}} =$$

$$\frac{1}{1 + \frac{\frac{4 \times 3,2}{4} + \frac{4 \times 13,4}{4}}{13,4}} = 0,5533$$

$$f_{CD}^0 = \frac{1}{1 + \frac{\frac{4k_b}{(4-f_{BC}^0)} + \frac{4k_b}{(4-f_{FC}^0)}}{3,2}} =$$

$$\frac{1}{1 + \frac{\frac{4 \times 13,4 \times 2}{4}}{3,2}} = 0,8933$$

Para ver la deducción de estas ecuaciones véase las referencias (6), (7). De la ecuación (8) se deduce entonces:  $\partial_{AB} = \partial_{EF} = 0$ , y además:

$$\begin{aligned} \partial_{DC} &= \frac{f_{CD}^0(2 + f_{DC}^0)(4 - f_{CD}^0)}{2(4 - f_{CD}^0)(4 - f_{DC}^0)} \\ &= \frac{0,8933 \times 2 \times (4 - 0,8933)}{2(4 - 0,8933) \times 4} = 0,2233 \end{aligned}$$

$\rightarrow K_{DC} = \frac{1}{\sqrt{\partial_{DC}}} = 2,12$ , es el factor K del pilar DC, por la ecuación (10).

De la ecuación (7):

$$\begin{aligned} P_{cr_1}^{dc} &= \frac{\pi^2 (k_c/E_s) E_s \partial_{DC}}{\ell_{DC}} = \\ &= \frac{\pi^2 \times 0,32 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^7 \times 0,2233}{5,49} = 256,92 \text{ ton,} \\ &\quad (566,40 \text{ Kips}) \end{aligned}$$

y de la ecuación (11):

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\phi_1 \sum P_N}{\sum P_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{0,82 \times 180}{566,40}} = 1,35$$

es el factor de amplificación,  $\delta_s$  del marco, dado por Cheong-Siat-Moy.

#### COMENTARIOS

En este resultado puede verse cómo, aplicando la ecuación (10), los factores K de los pilares AB y EF son:

$$K_{AB} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow P_{cr_1}^{ab} = 0$$

$$K_{EF} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow P_{cr_1}^{ef} = 0$$

ya que sus extremos se encuentran articulados, o sea, desde el punto de vista de la resistencia al desplazamiento lateral, los pilares AB y EF poseen unas  $P_{cr_1}$  nulas y por consiguiente son completamente ineficaces. Esto es lo lógico.

Sin embargo, para el diseño de los pilares AB y EF como si pudieran resistir carga vertical, las columnas deben trabajar articuladas. Evidentemente, los pilares articulados AB, EF, sólo podrían resistir carga axial únicamente en el caso de tener desplazamiento lateral impedido, en cuyo caso, tal como lo veremos más adelante, el  $K = 1$ , o sea:  $P_{cr_2} = P_E$ .

En el caso del desplazamiento lateral impedido no se pueden usar los K dados por la ecuación (10), la cual es válida únicamente para el caso de inestabilidad elástica con desplazamiento lateral, que es el caso de la mayoría de las estructuras con que trata el ingeniero. Para el caso

de los  $P_{cr2}$ , el K debe obtenerse de los ábacos de Jackson-Moreland, o por medio de un método más exacto, como el que veremos en el ARTICULO (3); pero antes veamos otro ejemplo para el caso de inestabilidad elástica con desplazamiento lateral.

### EJEMPLO (2)

Ghali-Neville<sup>9</sup>, traen un ejemplo de inestabilidad elástica de una estructura, la cual resuelven por el método clásico de buscar la condición que anule a la matriz de rigidez de la estructura. Presentamos la estructura en la Fig. (3).

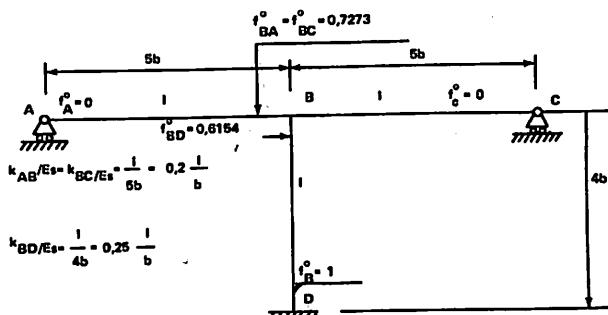


FIGURA 3

Esta estructura se puede deformar lateralmente y por consiguiente su inestabilidad elástica se obtiene por medio de las fórmulas (7), y (8).

Los G.D.E. se deducen como en el problema anterior:

$$f_{BD}^0 = \frac{1}{1 + \frac{k_{BD}}{2x4k_{AB}}} = \frac{1}{1 + \frac{0,25}{2 \times 0,20}} = \frac{1}{4 - f_A^0}$$

$$\frac{0,4}{0,65} = 0,6154$$

$$f_{BA}^0 = f_{BC}^0 = \frac{1}{1 + \frac{k_{BA}}{\frac{4k_{BC}}{4-0} + \frac{4k_{BD}}{4-1}}} = \frac{1}{1 + \frac{0,2}{\frac{4 \times 0,2}{4} + \frac{4 \times 0,25}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{0,6}{1,6}} = \frac{1}{2,2} = 0,7273$$

De la ecuación (8) obtenemos:

$$\delta = \frac{f_D^0 (2 + f_{BD}^0) (4 - f_D^0) + f_{BD}^0 (2 + f_D^0) (4 - f_{BD}^0)}{2 (4 - f_D^0) (4 - f_{BD}^0)}$$

$$\delta = \frac{2,6154 \times 3 + 0,6154 \times 3 \times 3,3846}{2 \times 3 \times 3,3846} = 0,6941$$

de acuerdo con la ecuación (7)

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI \delta}{16b^2} = 0,4281 \frac{EI}{b^2}$$

El valor proporcionado por Ghali-Neville es:

$$P_{cr1} = 0,436 \frac{EI}{b^2}$$

Nuestro valor difiere en 1,81% de este valor.

Este ejemplo corrobora lo que habíamos dicho antes: El G.D.E. permite deducir en una forma rápida y elegante la  $P_{cr1}$  de las estructuras con desplazamiento lateral.

### ARTICULO 3

#### CASO DEL DESPLAZAMIENTO LATERAL IMPEDIDO

Vamos a estudiar a continuación el caso de piezas prismáticas de sección constante, con desplazamiento lateral impedido, siguiendo los pasos de Timoshenko<sup>5</sup>.

Este autor estableció que para estos miembros, con extremos elásticamente restringidos, la condición crítica está dada por:

$$\left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{\Psi(u)}{3k} \right] \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{\Psi(u)}{3k} \right] - \left[ \frac{\phi(u)}{6k} \right]^2 = 0 \quad (13)$$

donde:

$$\Psi(u) = \frac{3}{2u} \left( \frac{1}{2u} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2u} \right)$$

Funciones de Berry\* (14)

\* Tabuladas en "Theory of Elastic Stability". Timoshenko<sup>5</sup>

$$\phi(u) = \frac{3}{u} \left( \frac{1}{\sin 2u} - \frac{1}{2u} \right)$$

$$u = \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{P/EI}{}} \quad$$

$$k = \frac{EI}{\ell}$$

$\alpha$  y  $\beta$  son factores que dependen del G.D.E. (Grado de Empotramiento) de los extremos del miembro; el G.D.E. está dado, realmente, por las rigideces de los miembros que enlazan con los extremos de aquél; así por ejemplo: Figura (4).

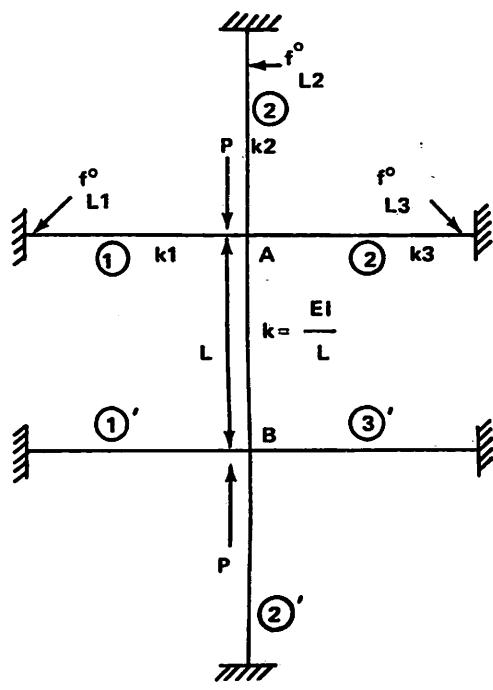


FIGURA 4

$$f_A^0 = \frac{1}{1 + \frac{k}{k}} \quad ** \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{4k_i}{4-f_k^0}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{4k_i}{4-f_k^0} = \frac{k f_A^0}{1 - f_A^0} \quad (16)$$

\*\* Para una deducción de esta expresión, véanse las referencias (6), (7), (8).

Ahora bien,  $\alpha$  y  $\beta$  son los denominados "factores de rigidez" y equivalen a los momentos necesarios para que un miembro prismático de rigidez  $k$ , rote un ángulo unitario. En la referencia (6), hemos demostrado que este factor tiene la forma para el miembro  $i$  que llega al extremo A:

$$\alpha_i = \frac{12k_i}{4-f_k^0}$$

$$i = 1, 2, 3$$

siendo  $f_k^0$ , el G.D.E. del extremo opuesto al extremo A del miembro  $i$ , de rigidez  $k_i$ : Fig. (4).

El ángulo que gira el extremo A será:

$$\theta_A = \frac{M_1}{\alpha_1} = \frac{M_2}{\alpha_2} = \frac{M_3}{\alpha_3}$$

$$M_A = M_1 + M_2 + M_3 = \theta_A (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \theta_A \sum_{i=1}^3 \alpha_i$$

$$\therefore M_A = 3\theta_A \sum_{i=1}^3 \frac{4k_i}{4-f_k^0} = \theta_A \frac{3kf_A^0}{1-f_A^0}, \text{ por la (16).} \quad (17)$$

$$\therefore \theta_A = \frac{M_A (1-f_A^0)}{3k f_A^0} \quad (18)$$

$$\therefore \alpha = \frac{3k f_A^0}{1-f_A^0}$$

$$\therefore \beta = \frac{3k f_B^0}{1-f_B^0} \quad (19)$$

La ecuación de estabilidad crítica (13) se puede escribir, entonces:

$$\left[ \frac{2(1-f_A^0)}{f_A^0} + 2\Psi(u) \right] \left[ \frac{2(1-f_B^0)}{f_B^0} + 2\Psi(u) \right] - \phi^2(u) = 0 \quad (20)$$

Comprobemos que esta ecuación satisface algunos casos límites:

1o.) Pieza restringida simétricamente:

$$f_A^0 = f_B^0 = f^0 :$$

$$\left[ \frac{2(1-f^0)}{f^0} + 2\Psi(u) \right]^2 - \phi^2(u) = 0$$

$$\rightarrow 2\Psi(u) + \phi(u) = - \frac{2(1-f^0)}{f^0}$$

$$\rightarrow \frac{\operatorname{tg} u}{u} = - \frac{2(1-f^0)}{3f^0} \quad (21)$$

1-a) Extremos articulados:

$$f_A^0 = 0$$

$$\frac{\operatorname{tg} u}{u} = -\infty \rightarrow u = \frac{\pi}{2} = \frac{\ell}{2} \sqrt{Pcr_2/EI}$$

$$\rightarrow Pcr_2 = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = PE \rightarrow K = 1 \quad (22)$$

1-b) Extremos empotrados:

$$f_A^0 = 1$$

$$\frac{\operatorname{tg} u}{u} = 0 \rightarrow u = \pi = \frac{\ell}{2} \sqrt{Pcr_2/EI}$$

$$\rightarrow Pcr_2 = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{PE}{(\frac{1}{2})^2} \rightarrow K = \frac{1}{2} \quad (23)$$

2o) Pieza con un extremo libre y el otro empotrado:

$$f_A^0 = 1, f_B^0 = 0.$$

La ecuación (20), arroja entonces el siguiente resultado:

$$\Psi(u) \left[ \infty + \Psi(u) \right] = \frac{1}{4} \phi^2(u)$$

Esta ecuación se satisface con la siguiente solución:

$$\Psi(u) = 0 \rightarrow 2u = 4,49 \rightarrow u = 2,245$$

$$\rightarrow Pcr_2 = \frac{20,16 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7\ell)^2}$$

$$\rightarrow K = 0,7 \quad (24)$$

Veamos enseguida algunos casos particulares:

1o) Buscar la  $Pcr_2$  del pilar AB de las estructuras (a) y (b) de la Figura (5).

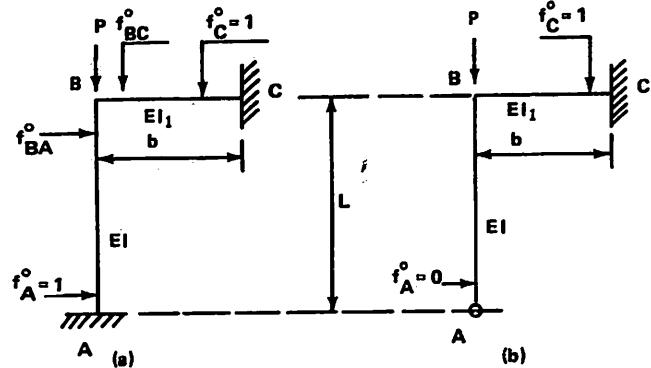


FIGURA 5

Para el caso (a):

$$f_{BA}^0 = \frac{1}{1 + \frac{Ib}{I_1 \ell} (1-0,25)} = \frac{1}{1 + \frac{3lb}{4I_1 \ell}} = \frac{4I_1 \ell}{4I_1 \ell + 3lb}$$

$$\therefore \frac{1-f_B^0}{f_B^0} = \frac{3}{4} \frac{lb}{I_1 \ell}$$

La ecuación (20) da para este caso, con  $f_A^0 = 1$

$$\Psi(u) \left[ \frac{3}{4} \frac{lb}{I_1 \ell} + \Psi(u) \right] = \frac{1}{4} \phi^2(u) \quad (25)$$

La solución de esta ecuación se obtiene de las tablas de Berry, por ensayo y error.

Para el caso (b):

Con  $f_A^0 = 0$ , y  $f_{BA}^0$  es idéntico al caso anterior. La ecuación (20) queda entonces:

$$\left[ \Psi(u) + \infty \right] \left[ \frac{3}{4} \frac{lb}{I_1 \ell} + \Psi(u) \right] = \frac{1}{4} \phi^2(u) \quad (26)$$

cuya solución es:

$$\Psi(u) = - \frac{3}{4} \frac{lb}{I_1 \ell} = \frac{3}{2u} \left( \frac{1}{2u} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2u} \right) \quad (27)$$

Resolviendo esta ecuación para  $u$  se obtiene la  $P_{cr_2}$ .

Cuando  $\frac{EI_1}{b} = \infty$  se obtiene la solución dada por la (24), para un extremo libre y el otro empotrado.

Hagamos  $I_b = I_1 \ell$  y busquemos la solución para  $u$ :

$$2u = 3,83 \rightarrow u = 1,915 \rightarrow P_{cr_2} = \frac{14,67EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,82\ell)^2}$$

$$\rightarrow K = 0,82$$

Deduzcamos el mismo valor por medio de los ábacos de Jackson-Moreland:

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_A = \infty \\ \Psi_B = 1 \end{array} \right\} \rightarrow K = 0,87$$

o sea un 6% de error en  $K$ , lo cual implica un error de 11% en la  $P_{cr_2}$  del lado antieconómico, pues hace aparecer a la  $P_{cr_2}$  más baja de lo que en realidad es, aunque el error es del lado de la seguridad.

2o) Resolvamos el caso de la Figura (6)

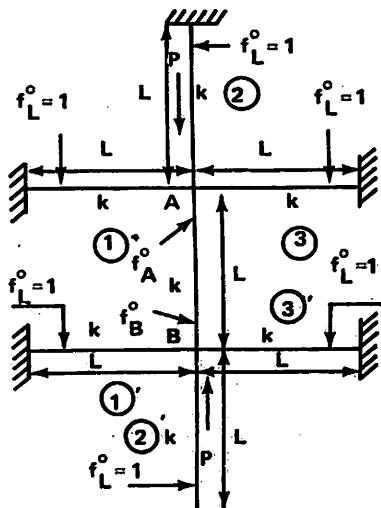


FIGURA 6

Caso de simetría:

$$f_A^0 = f_B^0 = \frac{1}{1 + \frac{k}{4k_i}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{4k_i}{4 - f_L^0 i}$$

$$\rightarrow \frac{1 - f^0}{f^0} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25$$

Utilizando la ecuación (21)

$$\frac{tg u}{u} = - \frac{2 \times 1}{3 \times 4} = - \frac{1}{6} = - 0,1667 = z$$

$u = 3,00$	$z = - 0,0475$
$u = 2,85$	$z = - 0,1053$
$u = 2,50$	$z = - 0,2988$
$u = 2,70$	$z = - 0,1751$
$u = 2,75$	$z = - 0,1502$
$u = 2,72$	$z = - 0,1649$
$u = 2,71$	$z = - 0,1699$
$u = 2,715$	$z = - 0,1676$
$u = 2,716$	$z = - 0,1669$
$u = 2,7165$	$z = - 0,1666$

$$P_{cr_2} = \frac{29,5175EI}{\ell^2} = \frac{2,9907\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,5782\ell)^2}$$

$$\rightarrow K = 0,5782 \quad (29)$$

2-a) Supongamos los extremos de los miembros (1), (2), (3), (1'), (2'), (3') articulados en lugar de empotrados:

$$f_{L_i}^0 = 0 \quad i = 1, 2, 3, 1', 2', 3'$$

Se tendrá:

$$f_A^0 = f_B^0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\rightarrow \frac{1 - f^0}{f^0} = \frac{0,25}{0,75} = \frac{1}{3} = 0,3333 \quad u = 2,60 \quad z = - 0,2014$$

$$\quad \quad \quad u = 2,65 \quad z = - 0,2021$$

$$\rightarrow \frac{tgu}{u} = - \frac{2}{9} = - 0,2222 = z \quad u = 2,62 \quad z = - 0,2193$$

$$\quad \quad \quad u = 2,61 \quad z = - 0,2253$$

$$\quad \quad \quad u = 2,605 \quad z = - 0,2283$$

$$\quad \quad \quad u = 2,615 \quad z = - 0,2223$$

$$P_{cr_2} = \frac{27,3529 EI}{\ell^2} = \frac{2,77\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,60\ell)^2}$$

$$K = 0,60 \quad (30)$$

2-b) Resolvamos el problema por medio de los ábacos de Jackson-Moreland:

$$\Psi_A = \Psi_B = \frac{\sum k \text{ columnas}}{\sum k \text{ vigas}} = 1$$

$$\rightarrow K = 0,75 \quad (31)$$

Pero si se supusiese que los miembros (1), (2), (3), (1)', (2)', (3)' trabajan a flexión, se tendría:

$$\Psi_A = \Psi_B = \frac{1}{3} = 0,33 \rightarrow K = 0,64 \quad (32)$$

el cual es un resultado más conforme con los valores dados por las ecuaciones (29), (30).

La suposición se justifica por el hecho de que la falla por inestabilidad elástica de la pieza no puede alcanzarse sin giro de los extremos A o B, giro que somete a los miembros (1), (2), (3), (1)', (2)', (3)' a flexión.

En esta forma se advierte la importancia relativa que tienen las restricciones de los extremos de los miembros (1), (2), (3), (1)', (2)', (3)' en el comportamiento del factor K para el caso de desplazamiento lateral impedido.

Para miembros externos empotados se obtiene K = 0,58 y si éstos están articulados, 0,60, o sea un 3% de diferencia, aproximadamente.

En cambio la diferencia con los ábacos de Jackson Moreland puede llegar a valer el 25%, del lado de la seguridad, pero del lado antieconómico.

## CONCLUSIONES

- 1o.) El factor de longitud eficaz, K, es una forma expedita y simple de determinar la carga crítica  $P_{cr_1}$ ,  $P_{cr_2}$ , para miembros con desplazamiento lateral probable y para miembros con desplazamiento lateral impedido respectivamente. Su utilización en la técnica del diseño estructural, ha sido amplia, pero ha dado lugar a algunos resultados inconsistentes o paradójicos, que se pueden imputar a un cálculo erróneo del factor.
- 2o.) Los miembros sometidos a flexocompresión, pertenecientes a estructuras con desplazamiento lateral, tienen una  $P_{cr_1}$ , que puede ser calculada por medio del G.D.E., ecuación (7), con un factor K, calculado con la fórmula (10), con buena exactitud, en una forma expedita, rápida y elegante, sin dar lugar a ambigüedades o a resultados paradójicos<sup>7</sup>.

3o.) Los miembros sometidos a flexocompresión con desplazamiento lateral impedido, pueden ser calculados con las  $P_{cr_2}$  obtenidas a partir de la ecuación (20), o en su defecto a partir de los ábacos de Jackson-Moreland, con resultados por encima de la seguridad, pero antieconómicos.

4o.) Los resultados de los ábacos de Jackson-Moreland pueden mejorarse para miembros con desplazamiento lateral impedido si se permite incluir a todos los miembros confluentes a los apoyos del pilar en estudio como miembros de flexión, salvo naturalmente el propio pilar.

## REFERENCIAS

1. H. Scholz. "A NOVEL P-DELTA METHOD FOR REINFORCED CONCRETE FRAMES DESIGNED BY LARFD APPROACHES". A.C.I. Jnl. July-August 1986. No. 4, Vol. 83.
- 2) F. Cheong-Slat-Moy. "K-FACTOR PARADOX" Jnl. of Structural Engineering. A.S.C.E. Structural Division, Vol. 112, No. 8, Aug. 1986.
- 3) A.C.I. "BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR REINFORCED CONCRETE". Detroit Mich., Sept. 1984.
- 4) Decreto 1400 de 1984. "CÓDIGO COLOMBIANO DE CONSTRUCCIONES SISMO-RESISTENTES". Diario Oficial No. 36.704 Bogotá 1984.
- 5) S. Timoshenko. "THEORY OF ELASTIC STABILITY". McGraw-Hill Co., Inc. 1961.
- 6) Gabriel García-Moreno. "LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS POR EL MÉTODO DEL GRADO DE EMPOTRAMIENTO". Gabriel García, Medellín, 1980 (In Spanish) Calle 35A No. 65D-22 Medellín, Colombia.
- 7) Gabriel García Moreno. "ELASTIC LATERAL INSTABILITY OF COLUMNS STUDIED BY THE DEGREE OF FIXITY METHOD. (P-Δ EFFECT)". A.C.I. Jnl., Sept-Oct. 1981. No. 5, Vol. 78.
- 8) Gabriel García-Moreno "RAPID EVALUATION FOR BENDING MOMENTS IN A RETICULATED PLANE FRAME". A.C.I. Jnl., Jan-Feb. 1983 No. 1, Vol. 80.
- 9) Ghali, Neville "STRUCTURAL ANALYSIS. (A unified classical and matrix approach)". London, Chapman and Hall. Halsted Press 1978.
- 10) Mac Gregor J.G., Hage Sven E. "STABILITY ANALYSIS AND DESIGN OF CONCRETE FRAMES" Proceedings, ASCE, V 103, ST10, Oct. 1977, pp 411-427.
- 11) F. Cheong-Slat-Moy. "RESULTS OF RECENT FRAME STABILITY STUDIES WITH REFERENCE TO AS 1250 CODE PROVISIONS" 2nd Conference on Steel Development. Australian Inst. of Steel Construction, Melbourne, May 1977.