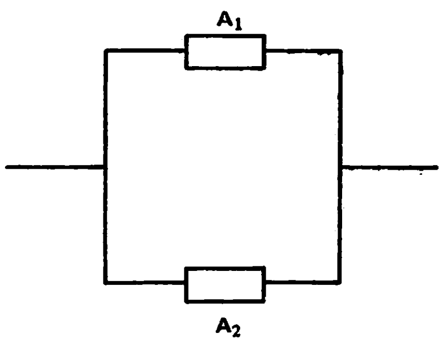
Un ejemplo interesante de espacio vectorial

Por: *I.Q., I.E. Gabriel Poveda R.*

1. Consideremos un sistema constituido por dos "aparatos" A_1, A_2 como los que aparecen esquematizados en la figura anexa, conectados o articulados en paralelo y que pueden funcionar independientemente el uno del otro. Supongamos que el sistema cumple sus funciones si uno siquiera de los aparatos o unidades A_1, A_2 está en funcionamiento o en condiciones de funcionar. Un ejemplo familiar de esta configuración o sistema es el caso de un aparato, o pieza, o equipo para el cual se tiene una unidad que puede reemplazarlo en caso de que falle. Otro ejemplo muy conocido es el de que A_1, A_2 sean dos aparatos eléctricos conectados en paralelo.



La configuración que describimos es una de las más elementales (si no es la más elemental) que se estudian dentro de la disciplina técnico-científica que hoy se denomina Teoría de Fiabilidad (en inglés, "Reliability Theory"; en francés "Theorie de Fiabilité").

2. Si uno y otro de los dos aparatos A_1, A_2 están expuestos a riesgos de fallas o daños o parálisis que impidan su funcionamiento, entonces el sistema como conjunto también corre el riesgo de fallar en su operación o funcionamiento, lo cual ocurrirá cuando (y sólo cuando) ambas unidades constituyentes fallen simultáneamente.

Si p_1 es la probabilidad de contar con A_1 en estado de funcionamiento, y p_2 es la probabilidad correspondiente para A_2, es fácil deducir la probabilidad de que el sistema esté en estado de funcionamiento, usando reglas elementales de la teoría de probabilidad. En efecto:

2.1 La probabilidad de que A_1 no esté en operación es $1-p_1$.

2.2 La probabilidad de que A_2 no esté en operación es $1-p_2$.

2.3 La probabilidad de que ni A_1 ni A_2 estén en operación, o sea de que el sistema en conjunto no esté en operación es $(1-p_1)(1-p_2)$.

2.4 La probabilidad de que el sistema esté en condición de operación es, entonces:

$$p = 1 - (1-p_1)(1-p_2) = p_1 + p_2 - p_1 \, p_2$$

En esta nota queremos llamar la atención hacia el hecho de que la operación entre p_1 y p_2 que aparece en la anterior expresión, convenientemente aplicada, permite construir una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo (o campo) $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

3. Consideremos el conjunto $\mathbb{C}_*$ de los números complejos, a excepción del número $z = 1$, o sea, en la nomenclatura muy conocida, el conjunto

$$\mathbb{C}_* = \mathbb{C} - \{1 + i0\}$$

Definimos en $\mathbb{C}_*$ una operación binaria (de composición interna) mediante la fórmula

$$\text{(O1)} \quad x_1 \circ x_2 = x_1 + x_2 - x_1 \, x_2$$

en donde las operaciones de suma $(x_1 + x_2)$ y producto $(x_1 \, x_2)$ tienen el significado usual entre números complejos. El símbolo "o" entre x_1 y x_2 nos sirve para indicar la operación que estamos definiendo, operación que bien podría denominarse "conexión paralela de x_1 con x_2".

Mostraremos ahora que $(\mathbb{C}_*, o)$ forma un grupo conmutativo.

4. Propiedad clausurativa-unívoca. Esta propiedad se sigue, sin más, de la definición por la fórmula (01), y de las correspondientes propiedades, muy bien conocidas, de la suma y el producto en $\mathbb{C}$. Además $x_1 \text{ o } x_2 \neq 1 \in \mathbb{C}$, porque de lo contrario se tendría necesariamente $x_1 = 1 \notin \mathbb{C}_*$ y $x_2 = 1 \notin \mathbb{C}_*$. Luego $x_1 \text{ o } x_2 \in \mathbb{C}_*$.

5. Asociatividad. Dados los números x_1, x_2, x_3 pertenecientes a $\mathbb{C}_*$, tenemos:

5.1 $(x_1 \text{ o } x_2) \text{ o } x_3 = (x_1 \text{ o } x_2) + x_3 - (x_1 \text{ o } x_2)\, x_3$

$$= (x_1 + x_2 - x_1 x_2) + x_3 - (x_1 + x_2 - x_1 x_2)\, x_3$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 + x_1 x_2 x_3 \qquad (02)$$

5.2 $x_1 \text{ o } (x_2 \text{ o } x_3) = x_1 + (x_2 \text{ o } x_3) - x_1 (x_2 \text{ o } x_3)$

$$= x_1 + (x_2 + x_3 - x_2 x_3) - x_1 (x_2 + x_3 - x_2 x_3)$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 + x_1 x_2 x_3 \qquad (03)$$

5.3 Comparando (02) y (03), resulta

$$(x_1 \text{ o } x_2) \text{ o } x_3 = x_1 \text{ o } (x_2 \text{ o } x_3)$$

6. Modulativa. El número complejo $o + i.\, o = \mathbb{O} \in \mathbb{C}_*$ es elemento neutro o módulo de la operación:

$$\forall x \in \mathbb{C}_*,\ x \text{ o} \mathbb{O} = x + \mathbb{O} - x\mathbb{O} = x$$

7. Inversión. Todo número x de $\mathbb{C}_*$ tiene un "inverso", que es el número $-x/(1-x)$, en donde el signo menos y el cuociente indicados tienen el sentido habitual entre números complejos. En efecto, $-x/(1-x) \in \mathbb{C}_*$, y además

$$\forall x \in \mathbb{C}_*,\ x \text{ o } (-x/(1-x)) =$$

$$= x + [-x/(1-x)] - x[-x/(1-x)]$$

$$= \frac{x(1-x) - x + x^2}{(1-x)} = 0$$

Tenemos pues que $\mathbb{C}_*$ se estructura como grupo aditivo con la "suma" o.

8. Conmutatividad. Es evidente que

$$x_1 \text{ o } x_2 = x_1 + x_2 - x_1 x_2 = x_1 + x_1 - x_2 x_1 = x_2 \text{ o } x_1$$

9. Definamos ahora una operación de composición externa entre los números racionales $(\mathbb{Q})$ y los números complejos de $\mathbb{C}_*$, es decir una aplicación.

$$(\mathbb{Q} \times \mathbb{C}_*) \to \mathbb{C}_*$$

siendo $\mathbb{Q} \times \mathbb{C}_*$ el producto cartesiano de estos dos conjuntos. Para cada $n \in \mathbb{Q}$ y para cada $x \in \mathbb{C}_*$ definimos esta operación por la expresión

$$n \Delta x = 1 - (1-x)^n \qquad (04)$$

y usamos el signo "Δ" para indicarla.

Obsérvese que, puesto que $x \in \mathbb{C}_*$, es decir $x \neq 1$, se tiene $1 - x \neq o$ y $1 - (1-x)^n \neq 1$, o sea que $n \Delta x \in \mathbb{C}_*$ efectivamente.

Esta operación pudiera llamarse "multiplicación de x en paralelo de orden n", evocando el modelo de los elementos eléctricos en paralelo de que ya se habló más arriba. Corresponde a lo que en espacios vectoriales más conocidos se denomina "producto escalar" por n (en el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales).

En la fórmula (04) se tomará para el número complejo $(1-x)^n$ su valor principal, es decir, $\arg (1-x)^n = n.\arg (1-x)$; siendo $o \leqslant \arg (1-x) < 2\pi$.

10. Aditividad de la multiplicación en paralelo respecto al orden (en los racionales). Fácilmente se calcula:

10.1 $(n_1 + n_2)\, \Delta x = 1 - (1-x)^{n_1 + n_2}$

$$= 1 - (1-x)^{n_1} (1-x)^{n_2}$$

10.2 $(n_1 \Delta x) \text{ o } (n_2 \Delta x) = [1 - (1-x)^{n_1}]$

$$+ [1 - (1-x)^{n_2}] - [1 - (1-x)^{n_1}]\,[1 - (1-x)^{n_2}]$$

$$= 1 - (1-x)^{n_1} + 1 - (1-x)^{n_2} - 1 +$$

$$+ (1-x)^{n_1} + (1-x)^{n_2} - (1-x)^{n_1}(1-x)^{n_2}$$

$$= 1 - (1-x)^{n_1}(1-x)^{n_2}$$

10.3 Por lo tanto: para toda pareja n_1, n_2 de números racionales y para cada $x \in \mathbb{C}_*$:

$$(n_1 + n_2) \triangle x = (n_1 \triangle x) \circ (n_2 \triangle x).$$

11. "Aditividad" para "los vectores" de $\mathbb{C}_*$. Calculemos

11.1 $n \triangle (x_1 \circ x_2) = n \triangle (x_1 + x_2 - x_1 x_2)$

$$= 1 - (1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2)^n$$

11.2 $(n \triangle x_1) \circ (n \triangle x_2) = [1-(1-x_1)^n] +$

$$[1-(1-x_2)^n] -$$

$$[1-(1-x_1)^n][1-(1-x_2)^n]$$

$$= 1 - (1-x_1)^n (1-x_2)^n$$

$$= 1 - (1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2)^n$$

11.3 Por lo tanto: para cada racional n y para cada pareja de complejos x_1, x_2 en $\mathbb{C}_*$, se tiene

$$n \triangle (x_1 \circ x_2) = (n \triangle x_1) \circ (n^{\triangle} x_2)$$

12. Asociatividad respecto al orden (en los racionales). Para toda pareja (a, b) de números racionales, y cualquiera que sea $x \in \mathbb{C}_*$, se calcula fácilmente

$$a \triangle (b \triangle x) = 1 - (1 - b \triangle x)^a$$

$$= 1-[1-(1-(1-x)^b)]^a = 1 - (1-x)^{ba} = (ab) \triangle x$$

13. Invariancia de los vectores respecto al elemento unidad de los racionales. Evidentemente se tiene:

$$1 \triangle x = 1 - (1-x)^1 = x$$

14. Las propiedades descritas en los numerales anteriores, desde el numeral 4 hasta el numeral 13 caracterizan a ($\mathbb{C}_*$, o, $\triangle$, $\mathbb{Q}$) como un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, que se ha querido presentar en esta nota no sólo por su posible interés técnico para ingenieros, sino por su interés pedagógico en la enseñanza del concepto de espacio vectorial.

una imagen vale más que mil palabras.