UNA FORMULA DE CUBICACION SOBRE EL PLANO

Por: Gabriel Poveda Ramos
Profesor del Depto. de Matemáticas y Física

1. En cálculo elemental es muy conocida la fórmula de la cuadratura de Simpson que se usa para computar aproximadamente al área de figuras planas y para computar aproximadamente una integral definida en el caso de una función descrita por sus valores en puntos equidistantes. La fórmula, como se recuerda es

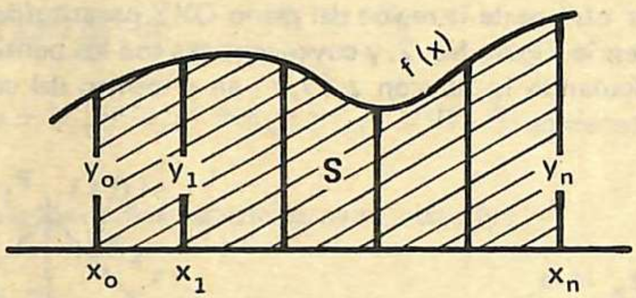

FIGURA 1

$$S = \int_{x_o}^{x} f(x)\,dx$$

$$= (y_o + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 4y_{n-1} + y_n)\ \frac{x_n - x_o}{3n}$$

en donde los símbolos tienen el significado que se aprecia en el dibujo anexo.

2. Es curioso que en la literatura didáctica matemática poco se menciona el hecho obvio de que así como se deduce la fórmula de cuadratura de Simpson, puede deducirse una fórmula de cubicación para calcular integrales dobles definidas sobre una región R del plano, en dos variables, es decir integrales de la forma

$$\int_R\int f(x,y)\,dx\,.\,dy$$

Una integral de estas expresa el volumen contenido entre la superficie $z = f(x,y)$ y el plano determinado por los ejes cartesianos OX, OY, perpendiculares entre sí y perpendiculares a OZ. Por esta razón, tal fórmula tiene amplias aplicaciones posibles.

Cabe anotar que los textos de matemática, en general, poco se ocupan del tema de las fórmulas aproximadas de cubicación (o cubatura), aún en los buenos textos de Análisis Numérico. El propósito de esta nota es deducir la fórmula de cubicación "a la manera de Simpson" y mostrar cómo podría aplicarse.

3. En primer lugar consideremos el problema de calcular el volumen comprendido entre una superficie cuádrica en dos variables y el plano de los dos ejes.

Sea la superficie cuádrica

$$z(x,y) = a + b_1 x + b_2 x^2 + c_1 y + c_2 y^2 + dxy \tag{3.1}$$

con a, b_1, b_2, c_1, c_2, d constantes reales tales que los coeficientes de los términos de segundo grado no son todos nulos, es decir, tales que

$$b_2^2 + c_2^2 + d^2 > 0 \tag{3.2}$$

Considérese, por otra parte la región del plano OXY constituída por el cuadrado R que se muestra en la Figura No. 2, y cuyos vértices son los puntos (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1). Calculando la función z (x,y) en el centro del cuadrado y en los cuatro vértices, obtenemos

$$\begin{aligned}
z(0,0) &= z_o = a \\
z(1,0) &= z_1 = a + b_1 + b_2 \\
z(0,1) &= z_2 = a + c_1 + c_2 \\
z(-1,0) &= z_3 = a - b_1 + b_2 \\
z(0,-1) &= z_4 = a - c_1 + c_2
\end{aligned}$$

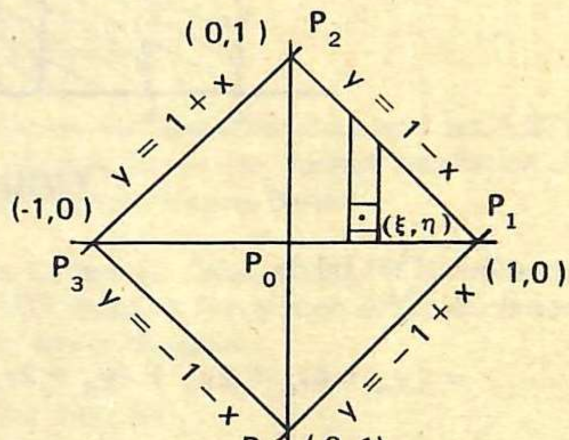

FIGURA 2

Invirtiendo este sistema se pueden despejar los cinco coeficientes a, b_1, b_2, c_1, c_2, en términos de las cotas z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 de la superficie z (x,y) sobre el plano OXY:

$$\begin{aligned}
a &= z_o \\
b_1 &= (1/2)(z_1 - z_3) \\
b_2 &= (1/2)(z_1 + z_3) - z_o \\
c_1 &= (1/2)(z_2 - z_4) \\
c_2 &= (1/2)(z_2 + z_4) - z_o
\end{aligned}$$

Así los cinco coeficientes quedan determinados por los valores de z (x,y) en los cinco puntos indicados del cuadro R. De hecho, se aprecia fácilmente que la ecuación de la superficie (3.1) puede escribirse en forma de determinante, así:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & y & y^2 & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_o \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & z_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & z_2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & z_3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

4. El volumen que cubre z (x,y) sobre la región R es el integral

$$V = \int_R\int z(\xi,\eta)\, d\xi \,.\, d\eta \tag{4.1}$$

$$= \int_R\int (a + b_1\xi + b_2\xi^2 + c_1\eta + c_2\eta^2)\, d\xi \,.\, d\eta$$

Para calcular su valor podemos hacerlo término a término:

$$\int_R\int d\xi\, d\eta = 2$$

$$\int_R\int \xi\, d\xi . d\eta = \int_{-1}^{0}\int_{\eta=-(1+\xi)}^{\eta=1+\xi} \xi . d\xi . d\eta + \int_{0}^{1}\int_{\eta=-(1-\xi)}^{\eta=1-\xi} \xi . d\xi . d\eta$$

$$= 2\int_{-1}^{0} \xi(1+\xi)\, d\xi + 2\int_0^1 \xi(1-\xi)\, d\xi = 0$$

$$\int_R\int \xi^2 . d\xi . d\eta = 1/3$$

$$\int_R\int \eta . d\xi . d\eta = 0$$

$$\int_R\int \eta^2 . d\xi . d\eta = 1/3$$

En consecuencia obtenemos

$$V = 2a + b_2/3 + c_2/3 \tag{4.2}$$

y sustituyendo los valores de los coeficientes se tiene

$$V = (4/3)\, z_o + (1/6)(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \tag{4.3}$$

en donde z_i es el valor de $z(x,y)$ en cada uno de los puntos P_i correspondientes.

Esta fórmula expresa el volumen buscado como una combinación lineal de las cinco cotas $z_0, \ldots, z_4$. Cabe notar además, que la suma de los coeficientes de esa combinación lineal es igual a 2, como se comprueba al examinar la fórmula (4.3)

5. Supongamos que se tiene un rectángulo formado por dos cuadrados unidos por uno de sus lados, como en la figura anexa, y sobre el plano OXY de la figura para una cuádrica dada por la ecuación

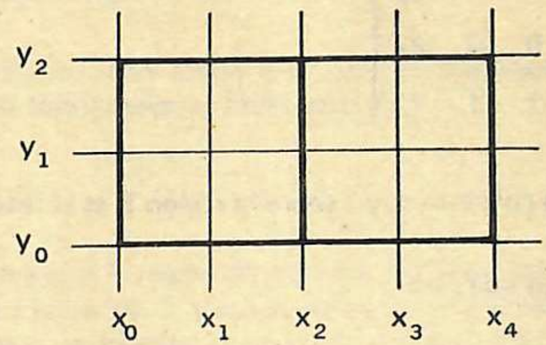

FIGURA 3

$z(x,y) = a + b_1x + b_2x^2 + c_1y + c_2y^2 + dxy$ acompañada de la condición (3.2)

El volumen que cubre la cuádrica por encima del rectángulo se obtiene aplicando la fórmula (4.3) a los dos cuadrados y sumando. Así se obtiene

$$V = (4/3)(z_{11} + z_{31}) + (1/6)(z_{00} + z_{02} + z_{40} + z_{42}) + (1/3)(z_{20} + z_{22}) \qquad (5.1)$$

siendo $z_{hk} = z(x_h, y_k)$, la cota de la cuádrica en el punto de coordenadas x_h, y_k.

6. Yuxtaponiendo un cuadrado a otro, unidos por uno de sus lados cada par de ellos, puede formarse una figura como la esquematizada en la Figura No. 4.

El perímetro de esa figura es una poligonal $P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n$, cuyos puntos son equidistantes sucesivamente. Hay algunos de estos puntos en donde los dos segmentos adyacentes al punto son colineales. Tal es el caso de P_2, P_4, P_6, P_8, P_9, etc. A estos puntos los llamaremos nodos llanos.

En algunos otros puntos los dos segmentos adyacentes forman un ángulo de 90^o respecto al interior del polígono, como ocurre en P_1, P_3, P_7, P_{11}, P_{14}, etc. A estos puntos los llamaremos nodos convexos. Y a puntos co mo P_0, P_5, P_{13}, donde se forma un ángulo de 270^o respecto al interior de la poligonal, los llamaremos nodos cóncavos.

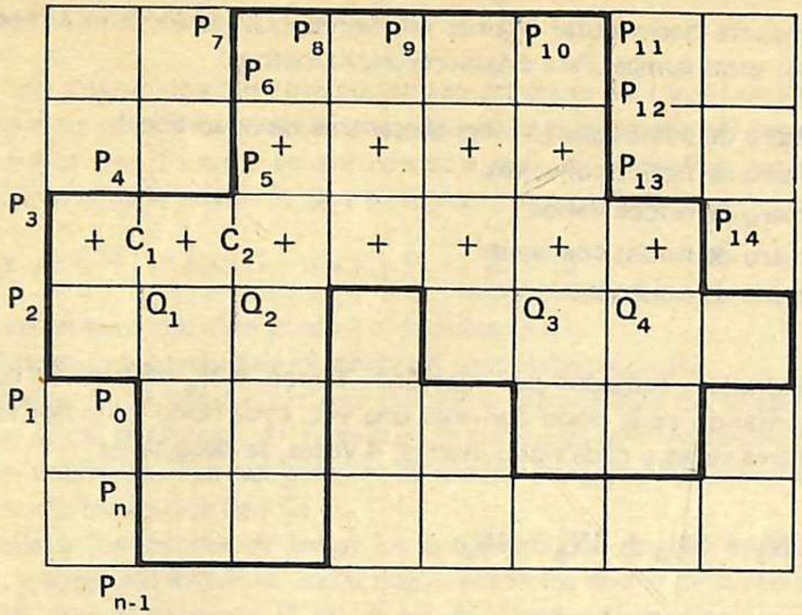

FIGURA 4

Sea p el número de nodos cóncavas. Fácilmente se demuestra que el número de nodos convexas será p + 4.

Cada punto llano pertenece a 2 cuadrados; cada esquina convexa pertenece a un cuadrado, y cada esquina cóncava pertenece a 3 cuadrados. A puntos como Q_1, Q_2, etc. que pertenecen a 4 cuadrados los llamamos nodos interiores. Y los centros de los cuadrados son c_1, c_2 . . . , etc.

7. El volumen que una superficie cuádrica

$$z\,(x,y) = a_0 + b_1 x + b_2 x^2 + c_1 y + c_2 y^2$$

cubre encima del área poligonal sombreada, puede calcularse aplicando la fórmula (4.3) a cada uno de los cuadrados que forman la figura poligonal y sumando sobre todos ellos.

El resultado puede escribirse

$$V = (4/3)\,S_0 + (1/6)\,S_1 + (1/3)\,S_2 + (1/2)\,S_3 + (2/3)\,S_4 \qquad (7.1)$$

en donde,

S_0 = Suma de las cotas z (x,y) en los centros de los cuadrados.

S_1 = Suma de las cotas z (x,y) en los nodos convexos.

S_2 = Suma de las cotas z (x,y) en los nodos llanos.

S_3 = Suma de las cotas z (x,y) en los nodos cóncavos.

S_4 = Suma de las cotas z (x,y) en los nodos interiores.

8. Es interesante hacer notar algunas relaciones que deben cumplir los números de sumandos de estas sumas. Para establecerlas, llamemos:

N_0 = Número de cuadrados (o bien, de centros de cuadrados)
N_1 = Número de nodos convexos.
N_2 = Número de nodos llanos.
N_3 = Número de nodos cóncavos.
N_4 = Número de nodos interiores.

Los N_0 cuadrados, tomados por separado, tienen 4 N_0 vértices (o nodos). De manera que contando cada nodo convexo una vez, cada nodo llano dos veces, cada nodo cóncavo tres veces y cada nodo interior 4 veces, se debe tener

$$4N_0 = N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 \qquad (8.1)$$

Y puesto que ya mostramos que

$$N_1 = N_3 + 4, \qquad (8.2)$$

se obtiene que

$$2(N_0 - N_4 - N_3 - 1) = N_2$$

lo que indica que el número de nodos llanos debe ser par, y que

$$N_0 = N_4 + N_3 + N_2/2 + 1 \qquad (8.3)$$

Además, ya vimos que al sumar los coeficientes de las cotas de cada cuadrado (Fórmula 4.3) se obtiene 2. Al sumar sobre los N_0 cuadrados debe tenerse $2N_0$. Por otra parte, la suma de coeficientes en la fórmula 7.1 será

$$(4/3)\,N_0 + (1/6)\,N_1 + (1/3)\,N_2 + (1/2)\,N_3 + (2/3)\,N_4 = 2\,N_0$$

de donde

$$(2/3)\,N_0 = (1/6)(N_3 + 4) + (1/3)\,N_2 + (1/2)\,N_3 + (2/3)\,N_4$$

$$2N_0 = 2N_3 + 2 + N_2 + 2N_4$$

Dividiendo por 2 esta identidad vuelve a conducir a la ecuación (8.3)

9. Con estos antecedentes podemos ya escribir una fórmula aproximada para calcular un integral de la forma

$$\int_R\int f(x,y)\,dx\,dy$$

siendo R una región simplemente conectada del plano y $f(x,y)$ una función continua sumable en R. —El procedimiento para estimar este integral sería el siguiente:

a. Admitir que $f(x,y)$ es aproximable por una superficie cuádrica $z(x,y)$ como (3.1), en toda la región R, por ejemplo en el sentido de que

$$\forall (x,y) \in R,\ |f(x,y) - z(x,y)| < \varepsilon > 0$$

siendo ε un número positivo prescrito de antemano.

b. Dibujar una cuadrícula de calibre K, que cubra toda R.

c. Escoger en la cuadrícula una poligonal cerrada que no se aparte a distancia mayor que K del contorno de R, el cual es una curva rectificable simple cerrada de Jordan de longitud L. Esa poligonal se denomina poligonal aproximante, y la región que delimita la indicamos con Q.

d. Señalar los centros de todos los cuadrados que quedan encerrados por esta poligonal, y todas sus esquinas. Estas esquinas son los nodos de la red poligonal.

e. Clasificar el conjunto M de nodos de la red poligonal en los cuatro subconjuntos

M_1 : Subconjunto de nodos convexos

M_2 : Subconjunto de nodos planos.

M_3 : Subconjunto de nodos cóncavos.

M_4 : Subconjunto de nodos interiores.

Se tiene así la partición

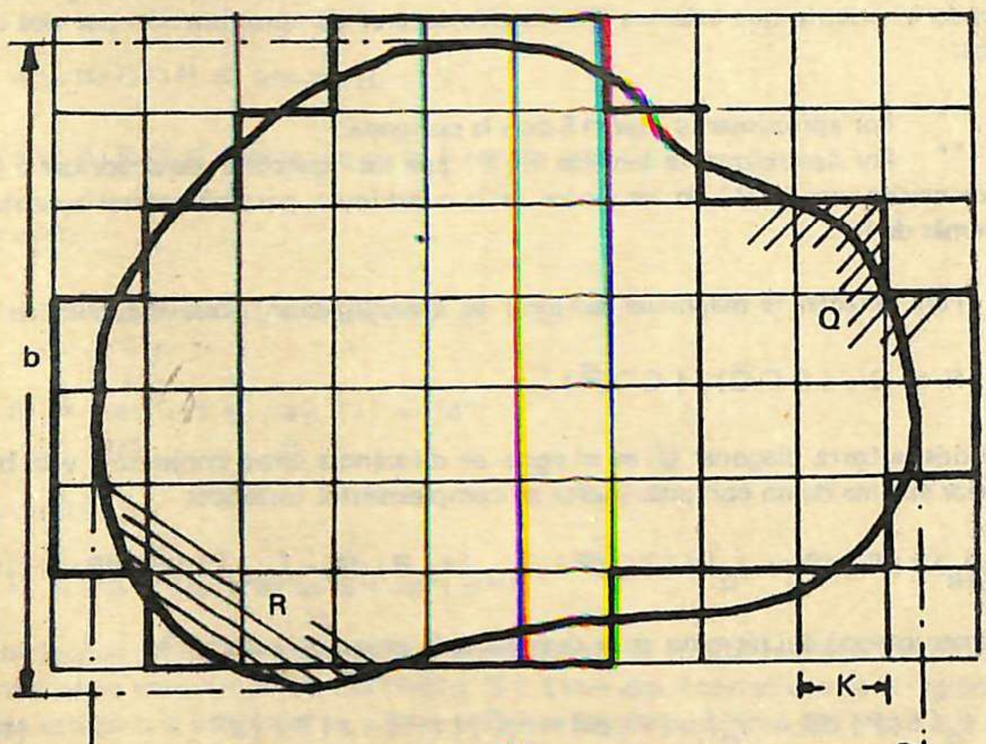

FIGURA 5

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \text{ , con } M_i \cap M_j = \phi \quad \text{para } i \neq j$$

f. Calcular f (x,y) en cada uno de los nodos del conjunto M, cuyo número es $N_1 + N_2 + N_3 + N_4$.

Alternativamente f (x,y) puede estar dada en una tabla o dibujada como familia de curvas de nivel en el plano OXY.

g. Calcular (o leer u obervar gráficamente) el valor de f (x,y) en cada uno de los centros de los N_0 cuadrados encerrrados por la poligonal aproximante. Estos centros forman el conjunto M_0.

h. Formar cada una de las cinco sumaciones

$$S_n = \sum_{P_i \in M_n} f(P_i) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, 4 ;$$

y calcularlas numéricamente.

i. Calcular la expresión (7.1)

$$V = 4S_o/3 + S_1/6 + S_2/3 + S_3/2 + 2S_4/3$$

Esta daría el volumen cubierto por una superficie continua que en cada cuadrado de la cuadrícula coincida con una cuádrica, por encima del área abrazada por la poligonal. Es posible tomar este valor como estimativo del integral, pero teniendo en cuenta que estamos admitiendo errores de aproximación por dos conceptos:

* Por aproximar la región R con la poligonal.

** Por aproximar la función F (P) por los "parches" de cuádricas z (·P) que coinciden con f (P) en los nodos de la cuadrícula, pero nó necesariamente en los demás de R.

10. Para apreciar la magnitud del error de aproximación, obsérvese primero que

$$R = Q \cup (R \cap \bar{Q}) / (Q \cap \bar{R})$$

en donde la barra diagonal (/) es el signo de diferencia entre conjuntos, y la barra superior encima de un conjunto indica su complemento. Entonces

$$\int_R \int f(P)\, dP = \int_Q \int f(P)\, dP + \int_{R/Q} \int f(P)\, dP - \int_{Q/R} \int f(P)\, dP \qquad (10.1)$$

El primer integral del término de la derecha de la ecuación anterior es

$$\int_Q \int f(P)\, dP = \int_Q \int z(P)\, dP + \int_Q \int [\, f(P) - z(P)\,]\, dP \qquad (10.2)$$

$$= V + \int_Q \int (f - z)\, dP$$

El tercer término del lado derecho de la ecuación (10.1), o sea

$$\int_{Q/R}\int f \, . \, dP$$

no está definido o es nulo, puesto que el dominio de f, donde buscamos el volumen es R.

Sustituyendo la (10.2) en (10.1) se tiene entonces

$$\int_R \int f \, . \, dP - V = \int_{Q \cap R} \int (f - z) \, dP + \int_{R/Q} \int f (P) \, dP$$

De aquí obtenemos :

$$\mathcal{E} = | \int_R \int f \, . \, dP - V | \leqslant | \int_{Q \cap R} \int (f - z) \, dP + \int_{R/Q} \int f \, . \, dP |$$

$$\leqslant \int_{Q \cap R} \int | f - z | \, dP + \int_{R/Q} \int | f | \, dP$$

$$\leqslant \max_{Q \cap R} | f - z | \, . \text{ área de } Q \cap R$$

$$+ \max_{Q \cap R} | f | \times \text{ área de } R/Q$$

Pero:

área de $Q \cap R \leqslant$ área de $R = S$;

área de $R/Q \leqslant$ perímetro de la frontera de $R \times K = L \times K$

y llamando

$$m = \max_{Q \cap R} | f - z | \leqslant \max_{R} | f - z | = m^*$$

$$M = \max_{R/Q} | f | \leqslant \max_{R} | f | = M^*$$

se encuentra

$$\mathcal{E} \leqslant mS + MLK \leqslant m^*S + M^*LK \tag{10.3}$$

Esta acotación permite estimar númericamente un límite máximo del módulo del error de la aproximación. En efecto: S y L son datos conocidos de la región R: K se ha escogido a voluntad; m y M se obtienen por inspección o por algún método conocido de extremalizar funciones.

11. Sería deseable ahora poder demostrar que el error es infinitesimal con K. En

las desigualdad (10.3) los términos MLK y $M^{\bullet}$ son evidentemente infinitesimales con K. Por eso sería necesario y suficiente demostrar que m (o bién m^*) tiende a cero si $k \to 0$. Lamentablemente no existe aún una teoría de la aproximación polinómica en dos o más variables que haya dado solución a la cuestión del error. Este punto queda abierto al estudio y a la investigación del lector ($M^{\bullet} = M^*LK$)

12. En resumen, podemos enunciar la siguiente fórmula de integración númerica aproximada, en dos variables, y refiriéndonos a la Figura No. 5:

$$\int_R\int f(x,y)\,dx.dy = \frac{4}{3}S_0 + \frac{1}{6}S_1 + \frac{1}{3}S_2 + \frac{1}{2}S_3 + \frac{2}{3}S_4 + \mathcal{E} \qquad (12.1)$$

donde S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 tienen el significado explicado en el numeral 7 (fórmula 7.1), y

$$|\mathcal{E}| \leqslant mS + MLK$$

cuyos símbolos definimos en el numeral anterior.

La fórmula (12.1) bien podría llamarse "fórmula de Simpson en el plano".