Sección de Matemática Pura

ACERCA DE LA GEOMETRIA

Por Mario Zuluaga U.
Profesor del Depto. de Matemáticas y Física

La aparición de las geometrías no Euclideas en el siglo XIX significó quizá uno de los acontecimientos más importantes del pensamiento matemático y de la ciencia en general.

Se emprendieron nuevos métodos de investigación científica, la matemática se convierte en instrumento indispensable para el desarrollo de las ciencias y de por sí la matemática encuentra nuevos criterios de análisis.

No es gratuito que el desarrollo matemático a partir de la segunda mitad del siglo XIX hasta ahora sea muy superior no sólo en volumen de nuevos conocimientos sino en rigor y precisión al resto de los siglos anteriores.

Este desarrollo vertiginoso de la matemática ha estado acompañado del progreso de las otras ciencias donde —y esto es muy importante tenerlo en cuenta— la matemática ha encontrado las fuentes de su desarrollo.

Me propongo en este artículo poner de relieve dos cosas que muestran el por qué de lo antes dicho:

1. Aparición de las geometrías no Euclídeas y la liberación del pensamiento matemático.
2. El significado que trajo para la ciencia esa liberación.

APARICION DE LA GEOMETRIA NO EUCLIDEA

La Geometría como aparece en la obra de Euclides se puede considerar como una rama de la Física, pues era el primer intento sistematizado de explicación del mundo "real".

Bajo este modelo se desarrolló todo el conocimiento desde Euclides; la física de Galileo y de Newton era una física del espacio Euclídeo, y aún la filosofía Kantiana era una filosofía contaminada de esas mismas ideas; Kant sostenía que la geometría Euclidiana "Es inherente a la naturaleza del mundo físico". Euclides construyó su geometría basándose en 5 postulados o axiomas claramente explicitados y otros supuestos tácitamente.

Estos 5 postulados eran:

1. Se puede trazar una línea recta que pase por dos puntos.

2. Se puede prolongar una línea recta indefinidamente a partir de una recta finita.

3. Se puede trazar una circunferencia con centro y radio dados.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Si una línea recta que corta a otras dos rectas forma de un mismo lado con ellas ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, las dos últimas rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que la suma de los ángulos es menor que dos rectos. (ver Fig. 1)

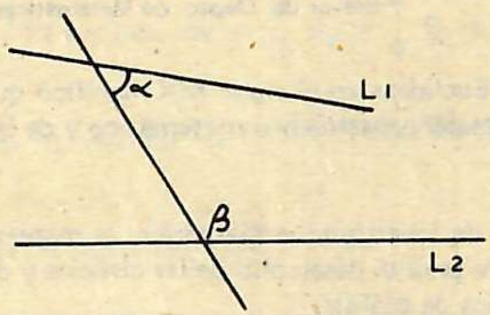

FIGURA 1

$\alpha + \beta < 180^{\circ}$ entonces L_1, L_2 se cortan en un punto del lado de los ángulos α, β.

En esta formulación aparecen términos que no son claramente definidos como: "trazar", "cortar", "prolongar" . . . ; no dice qué es una linea recta y un punto.

En las formulaciones más modernas de los postulados de la Geometría Euclidiana se toman como términos no definidos: punto y recta y los axiomas son 11 divididos en 5 grupos así:

I.	Axiomas de Incidencia	(3)
II.	Axiomas de orden	(3)
III.	Axiomas de movimiento	(3)
IV.	Axiomas de continuidad	(1)
V.	Axiomas de paralelismo	(1) que es el mismo postulado 5. anterior.

Sobre este quinto postulado existen varias versiones todas equivalentes entre sí; quizás las más conocidas por el lector sean estas:

"Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y solo una paralela a dicha recta".

Otra debida a Gauss:

"Si K es un entero cualquiera, existe siempre un triángulo cuya área es mayor que K".

Y esta otra debida a Bolyai:

"Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia".

Sobre ese quinto postulado se concentra la atención de todos los matemáticos durante 2.000 años, lapso en el cual se hacen los intentos más sutiles por demostrar, a partir de los demás postulados, el postulado 5 llamado el postulado de las paralelas; todos los intentos terminaban haciendo uso, en forma disfrazada de lo que justamente se quería probar.

El intento más importante se debió al sacerdote jesuíta Giralamo Saccheri, intento que no llegó a feliz término debido a que Saccheri no comprendió la magnitud del problema que manejaba.

El intento de Saccheri fue el siguiente: (ver Fig. 2)

Construye un cuadrilatero (conocido como cuadrilatero de Saccheri) así:

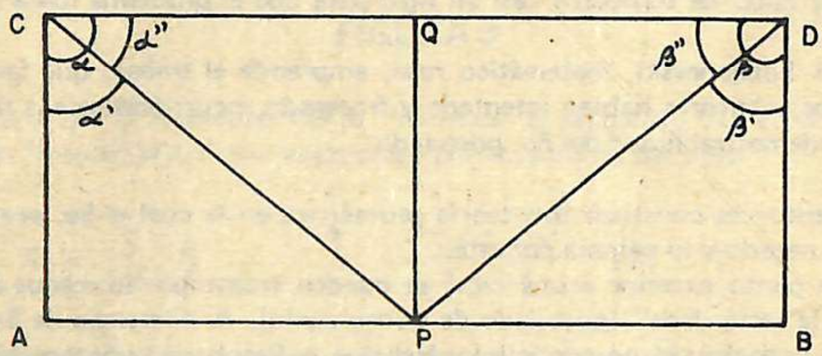

FIGURA 2

En un segmento de recta AB levanta perpendiculares iguales por A y B: AC y BD. Une los puntos C y D por una recta CD y demuestra que los ángulos α y β son iguales así: toma P y Q puntos medios de AB y CD respectivamente, une C con P, P con D y P con Q; entonces: Δ CAP y Δ BDP son congruentes luego $\alpha' = \beta'$ y PC = PD y demuestra sin usar el 5o. postulado que los triángulos Δ PCQ y Δ PQD son congruentes, entonces: $\alpha'' = \beta''$ y concluye:

$\alpha = \alpha' + \alpha'' = \beta' + \beta'' = \beta$ como quería. Ahora Saccheri se plantea 3 cosas (y esto es lo grandioso de su intento):

1. $\alpha = \beta$ son ángulos rectos.
2. $\alpha = \beta$ son ángulos agudos.
3. $\alpha = \beta$ son ángulos obtusos.

Cada posibilidad excluye las otras dos. La primera que la llamó Hipótesis del ángulo recto lo condujo al postulado 5o. de las paralelas; entonces trata de probar el carácter contradictorio de las posibilidades 2 y 3 llamadas Hipótesis del ángulo agudo y obtuso respectivamente.

La hipótesis del ángulo obtuso lo llevó a contradicciones y fue entonces descartada; al intentar lo mismo con la Hipótesis del ángulo agudo no encontró contradicción alguna: encontró una serie de resultados paradójicos que eran coherentes entre sí pero que chocaban con los resultados de la geometría de Euclides; por ejemplo los ángulos internos de un triángulo sumaban menos de 180^{o}.

Estos resultados paradójicos llevaron a Saccheri a "concluir" el carácter contradictorio de la Hipótesis del ángulo agudo porque como él mismo decía : "repugnaba a la naturaleza de la línea recta"..

En realidad Saccheri descubría sin saberlo una nueva geometría.

Este trabajo de Saccheri fue publicado en 1773 en su obra: "Euclides Ab omni naevo vindicatus sieve conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa geometriae principia" y hubo de trancurrir casi un siglo para que el problema fuera retomado.

En 1815 Lobachevski, matemático ruso, emprende el trabajo que tantos otros matemáticos anteriores habían intentado y fracasado, ocurriéndosele la feliz sospecha de la indemostrabilidad del 5o. postulado.

Decide entonces construír una teoría geométrica en la cual el 5o. postulado de Euclides es negado y lo cambia por este:
"Por un punto exterior a una recta se pueden trazar por lo menos dos rectas paralelas a la recta dada" (postulado de Lobachevski). A diferencia de Saccheri (y parece que Lobachevski no conoció los trabajos de Saccheri) Lobachevski era consciente de estar descubriendo un nuevo "mundo" geométrico. Lobachevski desarrolló una geometría en la que se daban proposiciones paradójicas; para ver algunos ejemplos de esta geometría se podría utilizar un modelo que para ello fue propuesto en 1870 por el matemático alemás Felix Klein. Este modelo servía para dar una interpretación real de dicha geometría en el plano.

MODELO DE KLEIN

Se toma en el plano euclideo ordinario un círculo y se considera unicamente el interior. Llamamos "plano" el interior (plano de Lobachevski). Las cuerdas del círculo son llamadas "rectas".

Así como en la geometría euclidiana las traslaciones o movimientos, por ejemplo de un segmento de recta en otro segmento, se hacen utilizando un sistema de coordenadas para el plano y transformando el plano en sí mismo por ecuaciones del tipo: (ver Fig. 3)

$$X' = a_1 X + b_1 Y + c_1$$

$$Y' = a_2 X + b_2 Y + c_2$$

con $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ apropiados

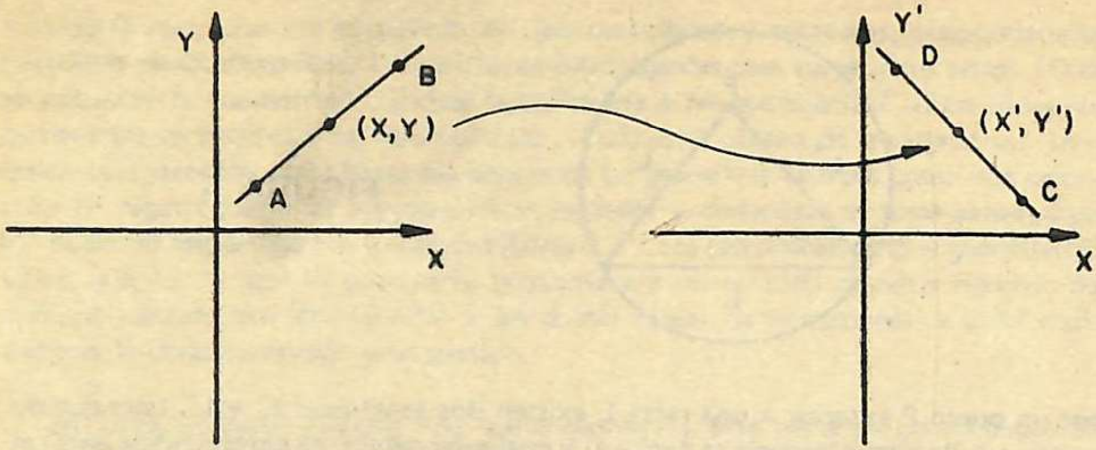

FIGURA 3

Y decimos que el segmento AB lo "llevamos" al segmento CD, en el modelo de Klein estos "movimientos" son expresados por ecuaciones del tipo:

$$1. \quad X' = \frac{X + a}{1 + aX} \qquad Y' = \frac{Y\sqrt{1 - a^2}}{1 + aX} \qquad |a| < 1$$

Con estas ecuaciones el círculo del modelo de Klein se transforma en sí mismo y las "rectas" (cuerdas) en rectas.

Nota: En las ecuaciones (1) estamos tomando el círculo de radio 1.

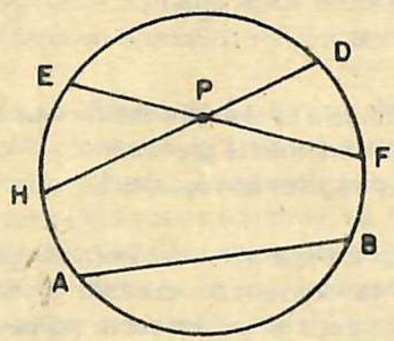

FIGURA 4

Entonces en este modelo se cumple que: (ver Fig. 4), por un punto P exterior a una recta AB se pueden trazar al menos dos rectas paralelas EF y HD a AB. (paralelas o que no la cortan). (Postulado de Lobachevski).

Con este modelo se puede probar que los axiomas I, II, III, IV, se cumplen y el V es cambiado por el de Lobachevski. La geometría desarrollada con esta nueva formulación axiomática coincide con la euclidiana en aquellas proposiciones demostradas sin la utilización del V postulado. Esta parte de geometría (obviamente incompleta) es llamada geometría absoluta. Un primer teorema dice: (ver Fig. 5)

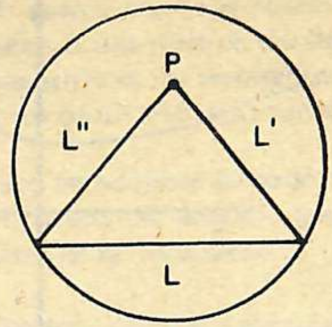

FIGURA 5

por un punto P exterior a una recta L existen dos semilineas L' y L'' tales que no cortan a L (la circunferencia se excluye) y cualquier semilínea comprendida entre el ángulo de ellas dos corta a L.

Otro resultado: (ver Fig. 6) AB // EF, CD // EF pero AB y CD no son paralelas, o sea: dos rectas paralelas a una tercera no son paralelas entre sí, caso que sí se cumple en geometría Euclídea.

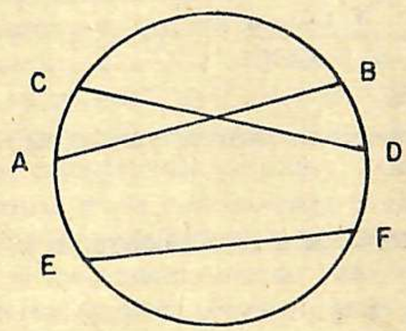

FIGURA 6

Otros resultados:

1. La suma de los ángulos de un triángulo es siempre menor que dos rectos.
2. No existen triángulos de área arbitrariamente grande.
3. ¡ Dos triángulos son iguales si sus ángulos son iguales !

En 1832 Johann Bolyai publica en un apéndice del libro de geometría escrito por su padre las consecuencias que se derivan de cambiar el 5o. postulado de Euclides por el de que "por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela".

Parece que Gauss había llegado ya a esos resultados con mucha anterioridad a Bolyai, como se lo manifestó al padre de éste.

Con estos nuevos descubrimientos dados a la luz pública en un lapso de 6 años se produjo la crisis más importante de la matemática; se rompía con 2.000 años de tradición y a la matemática se le planteaban infinidad de interrogantes cuya contestación ha traído este desarrollo vertiginoso actual. Romper con 2.000 años de tradición no era algo sencillo; parece que Gauss ocultó casi por treinta años estos resultados para no despertar una ola de críticas. Además no era fácil desarrollar una geometría que, aunque coherente en sus postulados y teoremas, proporcionaba paradojas desconcertantes. Los primeros interrogantes que surgen son estos: ¿Qué es entonces la geometría? ¿Existe la geometría o las geometrías? ¿Son todas las geometrías verdaderas y en qué sentido? ¿Cuál es el objeto de la geometría? Una única cosa quedaba clara hasta ese entonces: La geometría aparece como una colección de argumentaciones lógicamente conectadas y deducidas de unos axiomas de los cuales lo importane era su compatibilidad. ¿Y era eso únicamente la geometría? Claro que no; lo que la geometría proponía era un método nuevo y riguroso de análisis; método que se extendió a las demás ramas de la matemática y del cual, además, la física ha sacado gran partido.

En 1854 Riemann expone una nueva geometría; este parte de un concepto de espacio nuevo y de ahí la fecundidad de la geometría de Riemann.

> "Toda colección continua de fenómenos homogéneos puede considerarse como un espacio".

Este nuevo concepto de espacio ha servido para que en física sea utilizado el método geométrico en el estudio de algunos fenómenos. Así por ejemplo: Se habla del espacio de los colores y se le hace una geometría, análogamente los espacios fásico en Química y dentro de la matemática misma se consideran muchos espacios de funciones, espacios de esferas, espacios de rectas, etc. Riemann expresó su nueva geometría en 1854 en una conferencia pronunciada en la Universidad de Gotinga titulada "Sobre las hipótesis en que se basa la geometría"; posteriormente la presentó con una aplicación a la conducción del calor.

La geometría de Riemann es una generalización de las geometrías euclidiana y de Lobachevski; considera como dije anteriormente un espacio como una colección continua de fenómenos homogéneos e introduce en él una métrica que coincide con la métrica euclidiana en dominios suficientemente pequeños.

La geometría de Riemann ha tenido desde entonces un poderoso desarrollo, encontrando aplicaciones en la física; Einstein la utilizó en su teoría general de la relatividad. Posteriormente a la aparición de las geometrías no euclideas la geometría en general tuvo desarrollos notables; en 1847 KC Von Staudt publica su famosa obra "Geometría der Lage" considerada como una obra maestra de la matemática del siglo XIX; aparte de demostrar la independencia entre la geometría proyectiva y la geometría métrica, es notable por el rigor en la formulación de sus axiomas y sus relaciones, haciendo énfasis en éstas más que en el carácter particular de los entes considerados. Posteriormente en 1872 Felix Klein, en una conferencia pronunciada en la Universidad de Erlangen, en la cual resume sus estudios sobre geometría proyectiva y geometría afín, propone un novedoso método de investigación geométrica; se trata de considerar grupos de transformaciones biyectivas del espacio en sí, mismo e investigar las propiedades geométricas de las figuras que permanecen invariantes por dichas transformaciones.

Pongamos un ejemplo que clarifique:

Consideramos un espacio de 2 dimensiones, el plano cartesiano por ejemplo, dotado de una estructura de espacio vectorial. Consideramos el siguiente conjunto de tranformaciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\llbracket H^S_{T_k} : H^S_{T_k}(X) = S(X) + K \rrbracket$ S es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y K representa una traslación así:

$$T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$X \to X + K \quad K \in \mathbb{R}^2$$

Entonces $H^S_{T_k}$ sería una transformación lineal compuesta con una traslación. Es fácil ver que este conjunto constituye un grupo bajo la composición de funciones con la condición de que la transformación lineal sea biyectiva. A este grupo se le conoce como grupo afín; se puede demostrar entonces que, por ejemplo, líneas rectas se transforman en líneas rectas por el grupo afín, puntos medios de segmentos de rectas, se transforman en puntos medios de segmentos de rectas, rectas paralelas se transforman en rectas paralelas; estos son ejemplos de invariantes afines.

Si al grupo anterior le hacemos la restricción de que la transformación lineal sea ortogonal, es decir, que conserve las distancias $(|X - Y| = |S(X) - S(Y)|)$ obtenemos un subgrupo del grupo afín llamado grupo Euclideo que constituye la base de la geometría Euclidea. Es de notar que las únicas transformaciones lineales ortogonales del plano tienen las siguientes representaciones matriciales:

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}\,\theta & \text{Sen}\,\theta \\ -\text{Sen}\,\theta & \text{Cos}\,\theta \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \text{Cos}\,\theta & \text{Sen}\,\theta \\ \text{Sen}\,\theta & -\text{Cos}\,\theta \end{pmatrix}$$

que son una rotación o una rotación seguida de una reflexión.

Hasta aquí he tratado de bosquejar los resultados más directos nacidos de esa nueva tendencia rectora de la investigación matemática y que se conoce actualmente con el nombre de convencionalismo. Se puede afirmar que el convencionalismo aparece con las geometrías no euclídianas y se extiende a las demás ramas de la matemática. Los problemas clásicos del análisis y del álgebra, investigados desde el punto de vista de la evidencia, eran reformulados y planteados dentro de teorías escrupulosamente fundamentadas en axiomatizaciones convencionales, que garantizaban precisión al discurso matemático; por ejemplo, fue necesaria la aparición de la teoría de grupos para que problemas clásicos del álgebra del siglo XVIII, como la resolución de ecuaciones de quinto grado, fueran aclarados.

El convencionalismo ha traído además la conexión entre distintas ramas de la matemática que se creían separadas; de ahí que se hable de la matemática y no de las matemáticas.

Uno de los interrogantes que aparecía como consecuencia del nacimiento de la geometría no euclidea era acerca de la "verdad" en geometría. A la luz del convencionalismo la pregunta parece aclararse; ya no es la evidencia inmediata el criterio de verdad como era considerado en siglos anteriores al siglo XIX; la validez de una teoría está representada en su coherencia interna. Es por esto que todas las geometrías son verdaderas; pero si este es el caso, entonces qué objeto tienen las geometrías? ¿Qué realidad se puede aprehender con instrumentos tan disímiles? Es la ciencia en general, con la experimentación, la encargada de crear los modelos geométricos que expliquen los fenómenos que dichas ciencias observan.

No tardó mucho en extenderse el convencionalismo de la matemática a las demás ciencias, en particular a la física: las leyes de la mecánica originaron la sospecha de que fueran también de carácter convencional; las leyes de los fenómenos electromágneticos fueron formuladas en ecuaciones matemáticas, claramente dentro de un aparataje también convencional, y en esa forma Maxwell dedujo con formulaciones puramente matemáticas, que las ondas electromagnéticas debían propagarse a la velocidad de la luz.

La teoría de funciones de variable y valor complejo que nació de consideraciones heurísticas ha tenido grandes aplicaciones tecnológicas como por ejemplo en la aerodinámica.

Cabe citar aquí lo que L. Geymonat dice acerca de los métodos convencionalistas utilizados en la Matemática y la Ciencia, en su obra "Filosofía y Filosofía de las ciencias": "El uso ponderado y controlado de estos métodos ha abierto a la matemática tales posibilidades y perspectivas, que ha acabado por tomar un aspecto totalmente nuevo si se le compara con lo que era en un pasado reciente. Quien pretenda reconducir la matemática a la fase intuitiva de hace un siglo y medio ejecutaría una labor anticientífica, condenada, por lo demás, al fracaso".