

EL HAMILTONIANO TAMM-DANKOFF EN EL ESTUDIO DE LOS NUCLEOS ATOMICOS COMPLEJOS

Por Carlos Ignacio Calle Arias, M.S.
Profesor, Departamento de Matemáticas y Física

Nota: Este trabajo constituye una pequeña parte de una investigación teórica mucho más extensa que el autor realizó cuando era un estudiante de posgrado en Física del Profesor M. Soga en Western Michigan University.

1. INTRODUCCION AL NUCLEO

Un átomo está constituido por un pequeño corazón masivo llamado núcleo, rodeado de electrones orbitales. El núcleo está formado por dos tipos de partículas: protones y neutrones, a las que se da el nombre conjunto de **nucleones**. El número de protones en un núcleo es exactamente igual a su número atómico Z , y el número total de nucleones A es el entero más cercano a su masa atómica (en unidades de masa atómica). Entonces, el número de neutrones es $N = A - Z$.

Las energías cinéticas de los nucleones en el núcleo son del orden de los 10 MeV, que son pequeñas comparadas con las energías en reposo de los nucleones, que son del orden de los 1.000 MeV. El núcleo puede entonces considerarse como compuesto de un número definido de nucleones con propiedades similares a las de los nucleones libres.

2. LOS NUCLEONES COMO SISTEMAS DE FERMI

Los nucleones son fermiones y por lo tanto obedecen el principio de exclusión de Pauli, que requiere que la función de onda sea antisimétrica con respecto al intercambio de partículas idénticas. Los estados excitados de un sistema de Fermi poseen una forma relativamente simple aun cuando la interacción sea fuerte, como el caso de los nucleones. Hay excitaciones para una partícula que son análogas a las excitaciones en un gas de Fermi. Estas excitaciones corresponden a la transición de una partícula de un estado energético por debajo de la superficie de Fermi a un estado vacante por encima de la superficie de Fermi. Esto corresponde a la formación de una partícula y un hueco.

La simetría de permutación impuesta por el principio de exclusión de Pauli está relacionada con la simetría isobárica de la estructura nuclear. En todos los procesos en donde aparece un número entero de partículas y huecos, estos se comportan como las excitaciones en un gas de Fermi.

3. LA ESTRUCTURA DE LAS CAPAS NUCLEARES

Un avance crucial en física nuclear acaeció con la aparición del trabajo de Mayer, en donde reunía evidencia experimental que indicaba la existencia de una estructura de capas en el núcleo¹. El trabajo de María Mayer condujo directamente al desarrollo del modelo dinámico con una interacción espín-orbita fuerte de Mayer, Jensen, Haxel, Suess, Feenberg y Nordhim. Este modelo tuvo enorme éxito al correlacionar los espines y las paridades de los estados fundamentales de los núcleos². En la actualidad, la estructura de las capas nucleares es la base sobre la cual se fundamenta la mayor parte de los trabajos teóricos en física nuclear.

El modelo de capas aísla uno o varios nucleones y trata, a través de cálculos más o menos detallados con potenciales específicos y con interacciones residuales, de explicar no solamente las características generales de los núcleos sobre regiones más o menos amplias, sino también de explicar y predecir las propiedades de los núcleos individuales.

4. EL POTENCIAL NUCLEAR

Con el propósito de calcular las propiedades nucleares, es conveniente tratar de representar las interacciones nucleón-nucleón por medio de un potencial, tal como un potencial central

$$V = f(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) (a + b P_1 + c P_\sigma + h P_1 P_\sigma) \quad (1)$$

en donde $f(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ es una función de la separación relativa de los dos nucleones interactuantes, P_1 y P_σ son los operadores de intercambio orbital y de espín y a, b, c, h , son constantes.

Introduciendo un operador de intercambio de isoespín P_t y utilizando el principio generalizado de Pauli

$$P_1 P_\sigma P_t = -1 \quad (2)$$

y las relaciones

$$P_1^2 = P_\sigma^2 = P_t^2 = 1$$

es posible escribir la interacción (1) como

$$V = f(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) (a + c P_\sigma - h P_t - b P_\sigma P_t) \quad (3)$$

con las relaciones

$$P_\sigma = \frac{1}{2} (1 + \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2), \quad P_t = \frac{1}{2} (1 + \bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2) \quad (4)$$

el potencial (1) puede escribirse como

$$V = (\bar{\sigma}_1 \bar{r}_1 \bar{t}_1, \bar{\sigma}_2 \bar{r}_2 \bar{t}_2) = f(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) \\ \times [C_0 + C_1 (\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2) + C_2 (\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2) + C_3 (\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2) (\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2)] \quad (5)$$

en donde $C_0 = a + \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} h - \frac{1}{4} l$ etc. Las tres interacciones (1), (3) y (5) son idénticas. En la forma (1) V depende de las coordenadas espaciales y de espín solamente. Las formas (3) y (5) muestran explícita dependencia de isoespín.

5. EL HAMILTONIANO NUCLEAR

En una primera y válida aproximación para el cálculo de la excitación a partir del estado fundamental, solamente el segundo término de (5) será considerado. Es decir,

$$V(\bar{r}_1 \bar{\sigma}_1 \bar{t}_1, \bar{r}_2 \bar{\sigma}_2 \bar{t}_2) \approx f(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) \bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2 \quad (6)$$

en donde $f(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ es un potencial separable. Esto permite la utilización de la interacción de rango largo para el cálculo de las energías de los estados excitados. El Hamiltoniano de la interacción separable de rango largo es, entonces,

$$\mathcal{H}_L = \sum_J G_J \sum_M (-)^M \sum_I r_I^J Y_{JM}(\Omega_I) \bar{t}_I \sum_J r_J^J Y_{J-M}(\Omega_I) \bar{t}_J \quad (7)$$

en donde G_J denota un parámetro de interacción. La segunda cuantización da para (7)

$$\mathcal{H}_L = \sum_J G_J \sum_M (-)^M \sum_{j_1 m_1} \sum_{j_1' m_1'} \langle j_1' m_1' | r^J Y_{JM} | j_1 m_1 \rangle \\ \times \sum_{j_2 m_2} \sum_{j_2' m_2'} \langle j_2' m_2' | r^J Y_{J-M} | j_2 m_2 \rangle \\ \times \frac{1}{4} [2b_{j_1' m_1'}^+ a_{j_1 m_1} a_{j_2' m_2'}^+ b_{j_2 m_2} \\ + 2a_{j_1' m_1'}^+ b_{j_1 m_1} b_{j_2' m_2'}^+ a_{j_2 m_2} \\ + (b_{j_1' m_1'}^+ b_{j_1 m_1} - a_{j_1' m_1'}^+ a_{j_1 m_1}) \\ \times (b_{j_2' m_2'}^+ b_{j_2 m_2} - a_{j_2' m_2'}^+ a_{j_2 m_2})] \quad (8)$$

Aquí a^+ y b^+ son los operadores de creación para protones y neutrones respecti-

vamente, mientras que a y b son los operadores de aniquilación para esas dos partículas.

El Hamiltoniano nuclear aproximado, que describe la energía para una partícula y la interacción para dos partículas, consiste de el Hamiltoniano separable de rango largo (8), el Hamiltoniano de una partícula

$$\mathcal{H}_{SP} = \sum_{jm} (\epsilon_j a_{jm}^+ a_{jm} + \epsilon_j b_{jm}^+ b_{jm}) \quad (9)$$

y el Hamiltoniano de interacción por pares

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_P = & \sum_{jm} \sum_{j'm'} G_{jj'} (-)^{j-m} (-)^{j'-m'} \\ & \times (a_{jm}^+ a_{j-m}^+ a_{j'-m'} a_{j'm'} + a_{jm}^+ b_{j-m}^+ b_{j'm'} a_{j'm'} \\ & + b_{jm}^+ a_{j-m}^+ a_{j'-m'} b_{j'm'} + b_{jm}^+ b_{j-m}^+ b_{j'-m'} b_{j'm'}) \quad (10) \end{aligned}$$

6. CALCULO DEL HAMILTONIANO TAMM-DANKOFF

La aproximación de Tamm-Dankoff³ se utiliza en el cálculo del Hamiltoniano de interacción para poder determinar las energías de los estados excitados para una partícula a partir del Hamiltoniano separable de rango largo. Este Hamiltoniano de interacción \mathcal{H}_{TD} , contiene \mathcal{H}_0 , ec. (9), y los términos de interacción de una partícula de \mathcal{H}_L , ec. (10). Por lo tanto,

$$\mathcal{H}_{TD} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_L' \quad (11)$$

en donde

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{j_a m_a} E_{j_a} \alpha_{j_a m_a}^+ \alpha_{j_a m_a} + \sum_{j_b m_b} E_{j_b} \beta_{j_b m_b}^+ \beta_{j_b m_b} \quad (12)$$

Para el cálculo de \mathcal{H}_L' , se utilizan los términos de interacción para una partícula del Hamiltoniano separable de rango largo junto con la transformación de Vallatin-Bogoliubov y el teorema de Wigner-Eckhart, sobre (10).

Al discutir la estructura de los estados excitados es conveniente a menudo el considerar el cambio en los números de ocupación para un estado excitado dado, comparado con el estado fundamental. Se puede, entonces, caracterizar un estado en términos de los números cuánticos de las órbitas ocupadas o partículas y de las órbitas desocupadas o Huecos. Huecos y partículas se agrupan colectivamente bajo el término **cuasipartículas**.

Si ν_j^2 es la probabilidad de que exista un estado ocupado, y u_j^2 es la probabilidad de no-ocupación, puede introducirse la siguiente transformación, denominada transformación de Vallatin-Bogoliubov⁴,

$$a_{jm}^+ = u_j(P) \alpha_{jm}^+ + \nu_j(P) (-)^{j-m} \alpha_{j-m}$$

$$a_{jm} = u_j(P) \alpha_{jm} + \nu_j(P) (-)^{j-m} \alpha_{j-m}^+$$

$$b_{jm}^+ = u_j(N) \beta_{jm}^+ + \nu_j(N) (-)^{j-m} \beta_{j-m}$$

$$b_{jm} = u_j(N) \beta_{jm} + \nu_j(N) (-)^{j-m} \beta_{j-m}^+$$

El resultado para el término \mathcal{H}_L del Hamiltoniano de Tamm-Dankoff es :

$$\mathcal{H}_L = \sum_J G_J \sum_M (-)^M \sum_{j_1 m_1} \sum_{j_1' m_1'} \sqrt{\frac{2j_1' + 1}{2J + 1}} (-)^{j_1 - m_1}$$

$$\times (j_1' m_1' j_1 - m_1 | JM) \langle j_1' || r^J Y_J || j_1 \rangle$$

$$\times \sum_{j_2 m_2} \sum_{j_2' m_2'} \sqrt{\frac{2j_2' + 1}{2J + 1}} (-)^{j_2 - m_2}$$

$$\times (j_2' m_2' j_2 - m_2 | JM) \langle j_2' || r^J Y_J || j_2 \rangle$$

$$\times \frac{1}{4} \parallel 2 (u_{j_1'}(N) \beta_{j_1' m_1'}^+ + \nu_{j_1'}(N) (-)^{j_1' - m_1'} \beta_{j_1' - m_1'})$$

$$\times (u_{j_1}(P) \alpha_{j_1 m_1} + \nu_{j_1}(P) (-)^{j_1 - m_1} \alpha_{j_1 - m_1}^+)$$

$$\times (u_{j_2'}(P) \alpha_{j_2' m_2'}^+ + \nu_{j_2'}(P) (-)^{j_2' - m_2'} \alpha_{j_2' - m_2'})$$

$$\times (u_{j_2}(N) \beta_{j_2 m_2} + \nu_{j_2}(N) (-)^{j_2 - m_2} \beta_{j_2 - m_2}^+)$$

$$+ 2 (u_{j_1'}(P) \alpha_{j_1' m_1'}^+ + \nu_{j_1'}(P) (-)^{j_1' - m_1'} \alpha_{j_1' - m_1'})$$

$$\times (u_{j_1}(N) \beta_{j_1 m_1} + \nu_{j_1}(N) (-)^{j_1 - m_1} \beta_{j_1 - m_1}^+)$$

$$\times (u_{j_2'}(N) \beta_{j_2' m_2'}^+ + \nu_{j_2'}(N) (-)^{j_2' - m_2'} \beta_{j_2' - m_2'})$$



$$\begin{aligned}
& \times (u_{j_2}(P) \alpha_{j_2 m_2} + v_{j_2}(P) (-)^{j_2 - m_2} \alpha_{j_2 - m_2}^+) \\
& + [(u_{j_1'}(N) \beta_{j_1' m_1'}^+ + v_{j_1'}(N) (-)^{j_1' - m_1'} \beta_{j_1' - m_1'}^+) \\
& \times (u_{j_1}(N) \beta_{j_1 m_1} + v_{j_1}(N) (-)^{j_1 - m_1} \beta_{j_1 - m_1}^+) \\
& - (u_{j_1'}(P) \alpha_{j_1' m_1'}^+ + v_{j_1'}(P) (-)^{j_1' - m_1'} \alpha_{j_1' - m_1'}^+) \\
& \times (u_{j_1}(P) \alpha_{j_1 m_1} + v_{j_1}(P) (-)^{j_1 - m_1} \alpha_{j_1 - m_1}^+)] \\
& \times [(u_{j_2'}(N) \beta_{j_2' m_2'}^+ + v_{j_2'}(N) (-)^{j_2' - m_2'} \beta_{j_2' - m_2'}^+) \\
& \times (u_{j_2}(N) \beta_{j_2 m_2} + v_{j_2}(N) (-)^{j_2 - m_2} \beta_{j_2 - m_2}^+) \\
& - (u_{j_2'}(P) \alpha_{j_2' m_2'}^+ + v_{j_2'}(P) (-)^{j_2' - m_2'} \alpha_{j_2' - m_2'}^+) \\
& \times (u_{j_2}(P) \alpha_{j_2 m_2} + v_{j_2}(P) (-)^{j_2 - m_2} \alpha_{j_2 - m_2}^+)] \parallel
\end{aligned}$$

* * *

REFERENCIAS

1. M.G. Mayer, Phys. Rev. **74** (1948), 235.
E. Feenberg, Phys. Rev. **75** (1949), 320.
E. Feenberg, K. C. Hammack y L. W. Nordheim, Phys. Rev. **75** (1949), 1968.
L. W. Nordheim, Phys. Rev. **75** (1949), 1864.
2. O. Haxel, J. H. D. Jensen y H. E. Suess, Phys. Rev. **75** (1949), 1766.
M. G. Mayer, Phys. Rev. **75** (1949), 1969.
M. G. Mayer, Phys. Rev. **78** (1950), 22.
M. G. Mayer y J. H. D. Jensen, **Elementary Theory of Nuclear Shell Structure** (Wiley, New York, 1955).
3. I. E. Tamm, Journal of Phys. (USSR), **9** (1945), 449.
S. M. Dankoff, Phys. Rev. **78** (1950), 382.
4. J. G. Vallatin, Nuovo Cimento, **7**, (1958), 843.
N. N. Bogoluivob, Nuovo Cimento, **7** (1958), 794.

BIBLIOGRAFIA

Bohr, A. y B. R. Mottelson: **Nuclear Structure** W. A. Benjamin, New York, 1969.

Brown, G. E.: **Unified Theory of Nuclear Models and Forces**, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1971.

Calle Arias, C. I.: **Properties of 1^- Excited States of Complex Nuclei**, University Microfilms, Doctoral Dissertation Series M-4880 (1973), Ann Arbor, Michigan (Tesis para el grado de Master).

de Shalit, A. y I. Talmi: **Nuclear Shell Theory**, Academic Press, New York, 1963.

Mattuck, R. D.: **A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem**, McGraw-Hill, New York.

Merzbacher, E. : **Quantum Mechanics** Wiley, New York, 1970.

Rose, M. E.: **Elementary Theory of Angular Momentum**, Wiley, New York, 1957.

Soga, M. : **One and Two Particle Excitations with Good Isospin**, Nuclear Physics, A143 (1970).