ECUACION DE LA RECTA TANGENTE A DOS CIRCULOS

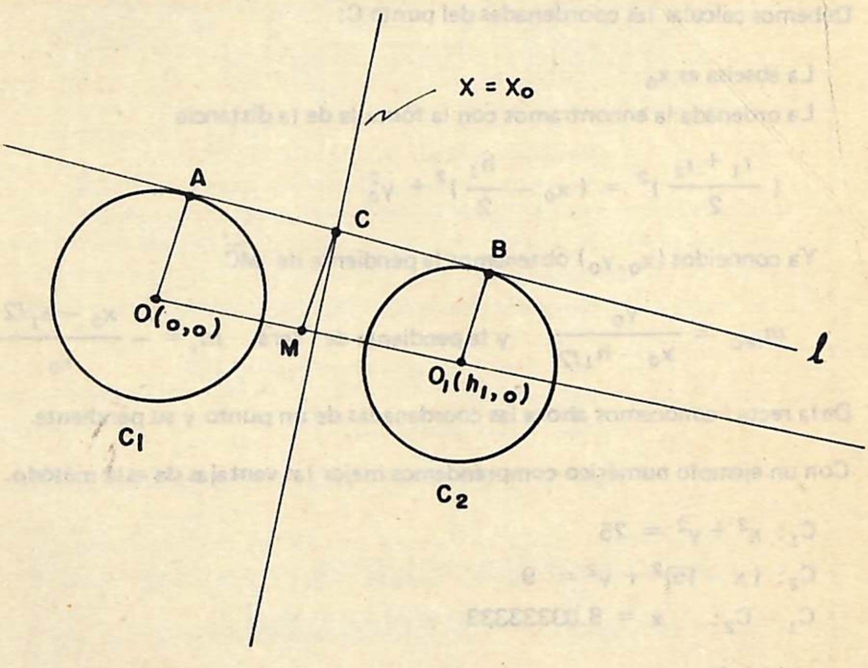
Por: Juan Fdo. Sanín E.
Profesor del Depto. de Matemáticas

Este problema es de común ocurrencia entre estudiantes y aún entre estudiosos de la geometría analítica.

No obstante lo anterior la solución numérica de dicho problema es, en la mayoría de los casos, bastante laboriosa a menos que se introduzcan algunos refinamientos de cálculo.

El método que se presenta a continuación tiene, en mi concepto, la ventaja de que el problema numérico se simplifica notablemente.

Consideremos 2 círculos C_1 y C_2 en el plano cartesiano. Sin sacrificar la generalidad del problema podemos suponer que el centro de C_1 está en O(0,0) y que el centro de C_2 está en $O_1(h_1,0)$.



$$C_1: \ x^2 + y^2 - r_1^2 = 0$$

$$C_2: (x - h_1)^2 + y^2 - r_2^2 = 0$$

Sea l la recta solicitada y los puntos A, B los puntos de tangencia de la recta sobre C_1 y C_2.

El eje Radical de C_1 y C_2 será la recta definida por la ecuación:

$$C_1 - C_2 \quad \text{es decir} \quad x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + h_1^2}{2h_1} = x_0$$

Esta recta corta la recta l en el punto C.

C por ser un punto del eje radical es además el punto medio de AB.

M el punto medio de OO_1

$$M\left(\frac{h_1}{2}, 0\right)$$

La figura $OABO_1$ es un trapecio rectangular en el cual la línea CM es la base media. Por tanto

$$d_{CM} = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad \text{distancia de } \overline{MC}$$

Debemos calcular las coordenadas del punto C:

La abscisa es x_0

La ordenada la encontramos con la fórmula de la distancia

$$\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 = \left(x_0 - \frac{h_1}{2}\right)^2 + y_0^2$$

Ya conocidos (x_0, y_0) obtenemos la pendiente de $\overline{MC}$

$$m_{MC} = \frac{y_0}{x_0 - h_1/2} \quad \text{y la pendiente de l será} \quad m_l = -\frac{x_0 - h_1/2}{y_0}$$

De la recta l conocemos ahora las coordenadas de un punto y su pendiente.

Con un ejemplo numérico comprendemos mejor las ventajas de este método.

C_1: $x^2 + y^2 = 25$

C_2: $(x - 15)^2 + y^2 = 9$

$C_1 - C_2$: $x = 8.03333333$

M (7.5,0)

$$d_{CM} = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

$$d^2_{CM} = 16 = (8.03333333 - 7.5)^2 + y_0^2$$

$$y_0 = \pm 3.96428499$$

$$C' (8.03333333, 3.96428499)$$

$$C'' (8.03333333, -3.96428499)$$

La recta l' que pasa por C'

$$m_{MC'} = \frac{3.96428499}{0.53333333} = 7.433034377$$

$$m_{l'} = -0.134534558$$

La ec. de l'

$$y = -0.134534558\,x + 5.045045948$$

La ec. de l''

$$y = 0.134534558\,x - 5.045045948$$

N. de la D. Invitamos a los lectores a discutir este artículo. Se reciben comentarios hasta Septiembre 30/77.