PRESENTACION

Por Alvaro Pérez Arango
Director Post-Grado Ingeniería Estructural

Con el advenimiento de las computadoras electrónicas y con su uso cada vez más extensivo en la solución de problemas complejos de Ingeniería Civil, se ha venido imponiendo la necesidad de un tratamiento compacto del Análisis Estructural, que sea susceptible de ser programado en forma adecuada en una computadora. Además de ésto se plantea la necesidad de articular y unificar lógicamente los llamados métodos clásicos para la solución de estructuras, usualmente tratados en forma dispersa. Los dos objetivos arriba enunciados se han alcanzado mediante el empleo del análisis matricial en la formulación y solución de los temas estructurales. En estas condiciones, los procedimientos de solución de estructuras hiperestáticas pueden agruparse en dos grandes categorías: Métodos de Flexibilidad y Métodos de Rigidez.

El Método de Flexibilidad consiste básicamente en:

1. Expresar los desplazamientos de la estructura en términos de las fuerzas internas y externas;

2. Reemplazar las relaciones anteriores en las condiciones de compatibilidad que deben cumplir los desplazamientos, con lo cual se pueden determinar las fuerzas internas;

3. Una vez conocidas las fuerzas internas se pueden determinar los desplazamientos utilizando las ecuaciones establecidas en el numeral (1).

Este procedimiento se denomina también método de las fuerzas por ser éstas los elementos hiperestáticos que primero se calculan. El operador que transforma las fuerzas en los desplazamientos se denomina matriz de flexibilidad. A la categoría de los métodos de flexibilidad pertenecen la conocida ecuación de "tres momentos" y el llamado procedimiento de las "deformaciones compatibles".

El método de rigidez consiste esencialmente en:

a. Expresar las fuerzas internas en función de los desplazamientos de la estructura;

b. Reemplazar las relaciones anteriores en las ecuaciones de equilibrio que deben cumplir las fuerzas, con lo cual se pueden determinar los desplazamientos;

c. Una vez conocidos los desplazamientos se pueden determinar las fuerzas internas utilizando las ecuaciones establecidas en el literal (a).

Este procedimiento se denomina también método de los desplazamientos por ser éstos los elementos hiperestáticos que primero se calculan. El operador que transforma los desplazamientos en las fuerzas se denomina matriz de rigidez. A la categoría de los métodos de rigidez pertenece la conocida ecuación de "pendiente-deflexión", cuyas soluciones iterativas más importantes están representadas por los métodos Cross y Kani.

En el artículo que a continuación presentamos se plantea la deducción de la matriz de rigidez para una viga prismática de eje recto, que posee un plano longitudinal de simetría según el cual actúan las cargas externas. Se estudia además la incidencia que, sobre la matriz de rigidez, tiene la variación en las condiciones de apoyo extremo de la viga. La aplicación se ilustra con varios ejemplos.

CORRECCION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DEBIDO A LA ELIMINACION DE RESTRICCIONES

Por Tomás Castrillón O.
Ingeniero Civil

I. INTRODUCCION.

En este artículo se estudia la influencia de la eliminación de algunas restricciones en los apoyos, en la matriz de rigidez y el vector de carga de un elemento lineal plano.

Se deducen la matriz de rigidez y el vector de carga corregidos, luego se hacen unos ejemplos para ilustrar su aplicación. Se supone al lector familiarizado con el método de rigidez para el cálculo de estructuras.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

En la figura II-1 se indican las fuerzas que actúan en los extremos de un elemento lineal plano.

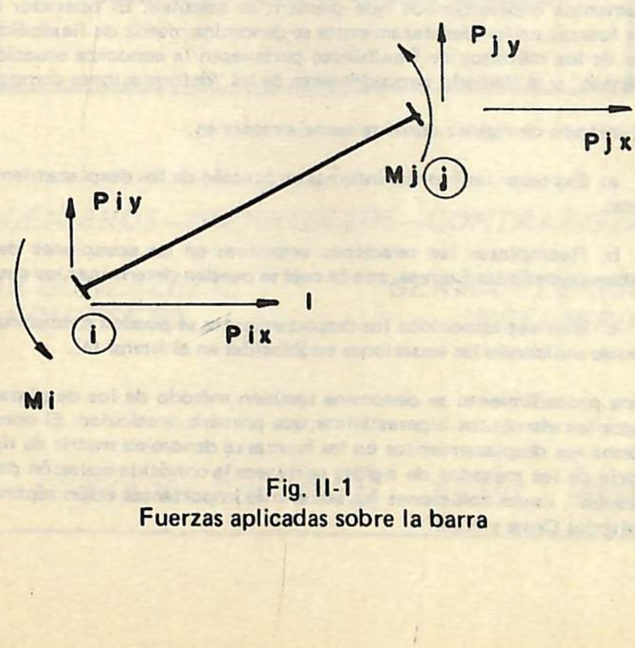

Fig. II-1
Fuerzas aplicadas sobre la barra

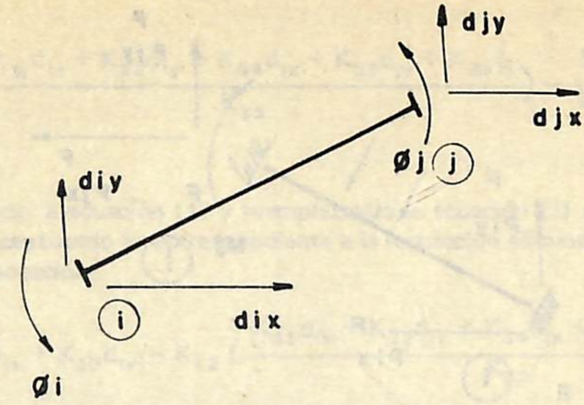

Fig. II-2
Desplazamientos de los nudos

En la figura II-2 se muestran los desplazamientos correspondientes a las fuerzas indicadas en la Figura II-1.

En la figura II-3 están ilustrados los términos de carga (es decir, la fuerza de empotramiento debida a cargas aplicadas en el tramo).

Implícitamente se indica en estas figuras que las fuerzas está referidas a coordenadas globales aunque esto no constituye limitación para las demostraciones.

Se supone conocida la relación Fuerzas-Deformaciones o sea la ecuación (Ref. 3)

$$|P| = |K|\,|d| + |p^F| \tag{1}$$

que equivale a:

$$\begin{vmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ M_i \\ P_{jx} \\ P_{jy} \\ M_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ \phi_i \\ d_{jx} \\ d_{jy} \\ \phi_j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P^F_{ix} \\ P^F_{iy} \\ M^F_i \\ P^F_{jx} \\ P^F_{jy} \\ M^F_j \end{vmatrix} \tag{1a}$$

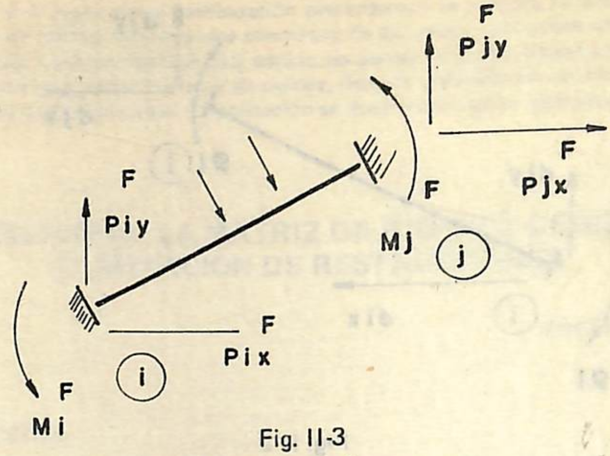

Fig. II-3
Términos de Carga

Se han utilizado los coeficientes K_{ij} para no restar generalidad a la exposición. Es claro que por ejemplo esta relación para un elemento espacial incluirá una matriz de rigidez de 12 x 12.

Se trata de establecer como queda la relación Fuerzas-Deformaciones cuando se elimina o modifica alguna restricción en los apoyos.

III. SOLUCION AL PROBLEMA

III-1 Eliminación de las restricciones

La solución consiste en lo siguiente:

a. Se iguala a cero la fuerza correspondiente a la restricción eliminada. De la ecuación resultante se obtiene el desplazamiento correspondiente a la restricción que se eliminó, en función de los otros desplazamientos.

b. El desplazamiento obtenido en (a) se reemplaza en el resto de las ecuaciones (1) obteniéndose la relación buscada.

Dicho de otro modo; se elimina como incógnita, el desplazamiento correspondiente a la restricción que se quita.

Quitando en i, por ejemplo, la restricción correspondiente al giro o lo que es lo mismo suponiendo el extremo i articulado. (Se eligió la restricción correspondiente al giro por ser el caso más común y conocido, ésto sin embargo no le quita generalidad a la demostración, y se hace con el objeto de ilustración).

Se tendrá: (2)

$$M_i = 0 = K_{31}d_{ix} + K_{32}d_{iy} + K_{33}\phi_i + K_{34}d_{jx} + K_{35}d_{jy} + K_{36}\phi_j + M_i^F$$

De donde:

$$\phi_i = -\left(\frac{K_{31}d_{ix} + K_{32}d_{iy} + K_{34}d_{jx} + K_{35}d_{jy} + K_{36}\phi_j}{K_{33}}\right) - \frac{M_i^F}{K_{33}} \qquad (3)$$

Desarrollando la ecuación (1) y reemplazando la ecuación (3) en las ecuaciones resultantes exceptuando la correspondiente a la restricción eliminada se obtiene para la primera ecuación:

$$P_{ix} = K_{11}d_{ix} + K_{12}d_{iy} - K_{13}\left(\frac{K_{31}d_{ix} + K_{32}d_{iy} + K_{34}d_{jx} + K_{35}d_{jy} + K_{36}\phi_j}{K_{33}} + \frac{M_i^F}{K_{33}}\right) + K_{14}d_{jx} + K_{15}d_{jy} + K_{16}\phi_j + P_{ix}^F$$

de donde:

$$P_{ix} = \left(K_{11} - \frac{K_{13}K_{31}}{K_{33}}\right) d_{ix} + \left(K_{12} - \frac{K_{13}K_{32}}{K_{33}}\right) d_{iy}$$

$$+ \left(K_{14} - \frac{K_{13}K_{34}}{K_{33}}\right) d_{jx} + \left(K_{15} - \frac{K_{13}K_{35}}{K_{33}}\right) d_{jy}$$

$$+ \left(K_{16} - \frac{K_{13}K_{36}}{K_{33}}\right) \phi_j + P_{ix}^F - \frac{K_{13}M_i^F}{K_{33}}$$

Algo semejante se hace para las demás ecuaciones (1a.). Es conveniente afectar los términos con una señal que indique que ya es el término corregido. En este caso se pondrá $\overset{o}{P}_{ix}$ y así sucesivamente.

Se deja al lector el desarrollo de las demás ecuaciones. Al final pueden ponerse las ecuaciones así:

$$\begin{vmatrix} \overset{o}{P}_{ix} \\ \overset{o}{P}_{iy} \\ \overset{o}{P}_{jk} \\ \overset{o}{P}_{jy} \\ \overset{o}{M}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{o}{K}_{11} & \overset{o}{K}_{12} & \overset{o}{K}_{14} & \overset{o}{K}_{15} & \overset{o}{K}_{16} \\ \overset{o}{K}_{21} & \overset{o}{K}_{22} & \overset{o}{K}_{24} & \overset{o}{K}_{25} & \overset{o}{K}_{26} \\ \overset{o}{K}_{41} & \overset{o}{K}_{42} & \overset{o}{K}_{44} & \overset{o}{K}_{45} & \overset{o}{K}_{46} \\ \overset{o}{K}_{51} & \overset{o}{K}_{52} & \overset{o}{K}_{54} & \overset{o}{K}_{55} & \overset{o}{K}_{56} \\ \overset{o}{K}_{61} & \overset{o}{K}_{62} & \overset{o}{K}_{64} & \overset{o}{K}_{65} & \overset{o}{K}_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{jx} \\ d_{jy} \\ \phi_j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_{ix}^{Fo} \\ P_{iy}^{Fo} \\ P_{jx}^{Fo} \\ P_{jy}^{Fo} \\ M_j^{Fo} \end{vmatrix} \qquad (1b)$$

En donde las rigideces modificadas están dadas por:

$$\overset{o}{K}_{ij} = K_{ij} - \frac{K_{in} K_{nj}}{K_{nn}} \tag{4a}$$

y para los términos de carga modificados

$$T_i^{F o} = T_i^F - \frac{K_{in}}{K_{nn}} T_n^F \tag{5a}$$

donde T es un término de carga (P_x , P_y , M)

El subíndice n corresponde al número de orden de la restricción que se elimina. Es fácil comprobar que para la tercera de las ecuaciones (1a) se obtendría la ecuación $M_i = 0$

Resumiendo:

Al quitar una restricción se corrige la matriz de rigidez así:

1. Se eliminan la columna y la fila n, o sea las correspondientes a la restricción que se quita.
2. Los términos restantes de la matriz de rigidez se corrigen de acuerdo a la ecuación (4a).
3. Los términos de carga se modifican utilizando la relación (5a).

El procedimiento descrito anteriormente puede seguirse utilizando para eliminar otras restricciones. Si se supone, por caso, que la barra que se ilustra en la figura 1 está articulada tanto en el extremo i como en el j.

Entonces: $M_i = M_j = 0$

Si se supone que ya se ha hecho la corrección para tener en cuenta la articulación en el extremo i, se tendrá partiendo de la 1b:

$$\overset{o}{M}_j = \overset{o}{K}_{61} d_{ix} + \overset{o}{K}_{62} d_{iy} + \overset{o}{K}_{64} d_{jx} + \overset{o}{K}_{65} d_{jy} + \overset{o}{K}_{66} \phi_j + M_j^{F o} = 0$$

De donde:

$$\phi_j = - \frac{\overset{o}{K}_{61} d_{ix} + \overset{o}{K}_{62} d_{iy} + \overset{o}{K}_{64} d_{jx} + \overset{o}{K}_{65} d_{jy}}{\overset{o}{K}_{66}} - \frac{M_j^{Fo}}{\overset{o}{K}_{66}}$$

Reemplazando seguidamente en las ecuaciones (1b) se obtienen las ecuaciones corregidas (se hace únicamente para la primera ecuación).

$$\overset{oo}{P}_{ix} = \overset{o}{K}_{11} d_{ix} + \overset{o}{K}_{12} d_{iy} + \overset{o}{K}_{14} d_{jx} + \overset{o}{K}_{15} d_{jy}$$

$$- \overset{o}{K}_{16} \left(\frac{\overset{o}{K}_{61} d_{ix} + \overset{o}{K}_{62} d_{iy} + \overset{o}{K}_{64} d_{jx} + \overset{o}{K}_{65} d_{jy}}{\overset{o}{K}_{66}} + \frac{M_j^{Fo}}{\overset{o}{K}_{66}} \right) + P_{ix}^{Fo}$$

De donde:

$$\overset{oo}{P}_{ix} = \left(\overset{o}{K}_{11} - \frac{\overset{o}{K}_{16}\overset{o}{K}_{61}}{\overset{o}{K}_{66}} \right) d_{ix} + \left(\overset{o}{K}_{12} - \frac{\overset{o}{K}_{16}\overset{o}{K}_{62}}{\overset{o}{K}_{66}} \right) d_{iy}$$

$$+ \left(\overset{o}{K}_{14} - \frac{\overset{o}{K}_{16}\overset{o}{K}_{64}}{\overset{o}{K}_{66}} \right) d_{jx} + \left(\overset{o}{K}_{15} - \frac{\overset{o}{K}_{16}\overset{o}{K}_{65}}{\overset{o}{K}_{66}} \right) d_{jy}$$

$$+ \left(P_{ix}^{Fo} - \frac{\overset{o}{K}_{16} M_j^{Fo}}{\overset{o}{K}_{66}} \right)$$

Por último puede ponerse

$$\overset{oo}{P}_{ix} = \overset{oo}{K}_{11} d_{ix} + \overset{oo}{K}_{12} d_{iy} + \overset{oo}{K}_{14} d_{jx} + \overset{oo}{K}_{15} d_{jy} + M_j^{Foo}$$

En donde, generalizando

$$\overset{oo}{K}_{ij} = \overset{o}{K}_{ij} - \frac{\overset{o}{K}_{ip}\overset{o}{K}_{pj}}{\overset{o}{K}_{pp}}$$

$$T_i^{Foo} = T_i^{Fo} - \frac{K_{ip} T_p^{Fo}}{\overset{o}{K}_{pp}}$$

$\overset{oo}{K}_{ij}$ = Término ij en la matriz, corregido para tener en cuenta la eliminación de las restricciones n y p.

p = Número de orden correspondiente a la restricción que se elimina en la segunda corrección.

Es importante anotar lo siguiente:

a. No pueden eliminarse tantas restricciones que hagan la estructura (el elemento lineal y sus soportes) inestable.

b. Tampoco deben eliminarse restricciones de tal manera que la matriz $|K|$ en la relación $|P| = |K||d|$ sea singular porque entonces ocurrirá que no puede obtenerse $|d|$ en función de $|p|$ lo cual quiere decir que el elemento puede sufrir cualquier desplazamiento, como cuerpo rígido, sin que ello modifique las fuerzas que actúan en los extremos.

III-2 Apoyos Elásticos

Siguiendo la metodología descrita en III-1, es fácil considerar el caso en que no se elimina del todo una restricción, sino que existe ésta en forma parcial.

En efecto, si, por ejemplo, en lugar de considerar el extremo i (en la viga de la figura II-1) articulado se tiene que hay un empotramiento elástico (caso frecuente en las construcciones metálicas), se tendrá: (figura III-1)

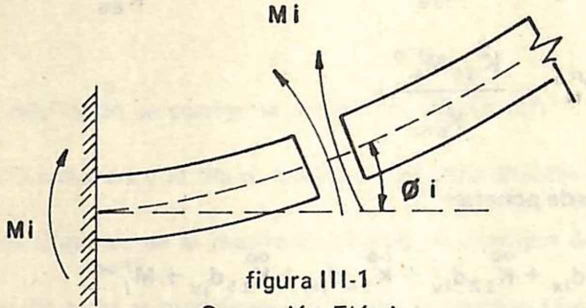

figura III-1
Corrección Elástica

Notar que el giro de la articulación elástica es contrario al sentido del momento.

$$M_i = -K_i \phi_i$$

en donde K_i será la rigidez de la restricción (fuerza necesaria para que gire la unidad). En lugar de la ecuación (2) se escribiría:

$$-K_i \phi_i = K_{31} d_{ix} + K_{32} d_{iy} + K_{33} \phi_i + K_{34} d_{jx} + K_{35} d_{jy} + K_{36} \phi_j + M_i^F \tag{2a}$$

De donde:

$$\phi_i = \frac{K_{31} d_{ix} + K_{32} d_{iy} + K_{34} d_{jx} + K_{35} d_{jy} + K_{36} \phi_j}{-K_i - K_{33}} + \frac{M_i^F}{-K_i - K_{33}}$$

Si se sigue como ya se dijo con el mismo procedimiento, es decir reemplazando ϕ_i en las ecuaciones (1a)

$$P_{ix} = K_{11} d_{ix} + K_{12} d_{iy}$$

$$+ K_{13} \left(\frac{K_{31} d_{ix} + K_{32} d_{iy} + K_{34} d_{jx} + K_{35} d_{jy} + K_{36} \phi_j + M_i^F}{- K_i - K_{33}} \right)$$

$$+ K_{14} d_{jx} + K_{15} d_{jy} + K_{16} \phi_j + P_{ix}^F$$

Finalmente puede ponerse:

$$\overset{C}{P}_{ix} = \overset{C}{K}_{11} d_{ix} + \overset{C}{K}_{12} d_{iy} + \overset{C}{K}_{14} d_{jx} + \overset{C}{K}_{15} d_{jy} + \overset{C}{K}_{16} \phi_j + P_{ix}^{FC}$$

Siendo en general,

$$\overset{C}{K}_{ij} = K_{ij} - \frac{K_{in} K_{nj}}{K_{nn} + K_g} \qquad (4b)$$

$$T_i^{FC} = T_i^F - \frac{K_{in}}{K_{nn} + K_g} T_n^F \qquad (5b)$$

En resumen se procede en la misma forma en que se dijo en la sección II recordando que:

K_g = Rigidez del resorte del apoyo elástico.

n = Número de orden del apoyo elástico.

El superíndice C indica corrección por apoyo elástico.

IV. EJEMPLOS

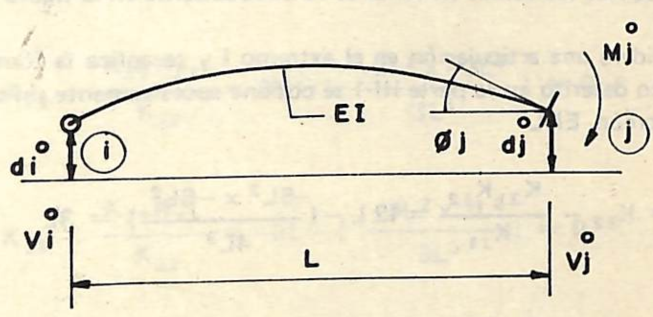

Fig. IV-1
Viga Articulada en I

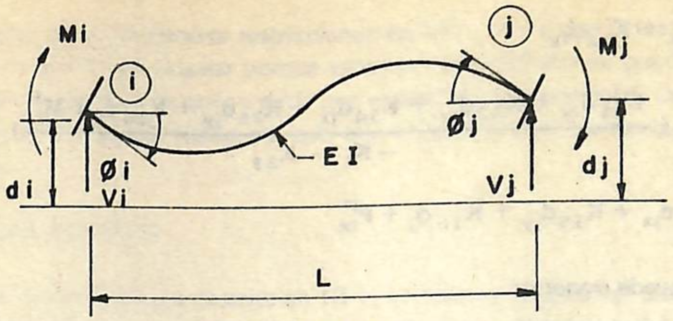

Fig. IV-2
Viga Articulada con nudos Rígidos

IV-1 Ejemplo

Se trata de obtener la matriz de rigidez para la viga ilustrada en la figura IV-1 partiendo de la matriz de rigidez del elemento de la figura IV-2. No se tienen en cuenta deformaciones axiales, ni deformaciones debidas a fuerza cortante.

Es bien conocida la relación:

$$\begin{vmatrix} M_i \\ V_i \\ M_j \\ V_j \end{vmatrix} = \frac{EI}{L^4} \begin{vmatrix} 4L^3 & -6L^2 & 2L^3 & 6L^2 \\ -6L^2 & 12L & -6L^2 & -12L \\ 2L^3 & -6L^2 & 4L^3 & 6L^2 \\ 6L^2 & -12L & 6L^2 & 12L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_i \\ d_i \\ \phi_j \\ d_j \end{vmatrix}$$

Siendo:

E = módulo de elasticidad.
I = momento de inercia.
El significado de los demás términos se ve directamente en la figura IV-2.

Si se considera una articulación en el extremo i y se aplica la fórmula (4a) y el procedimiento descrito en la parte III-1 se obtiene sucesivamente sin tener en cuenta el factor común EI/L^4

$$\overset{o}{K}_{22} = K_{22} - \frac{K_{21}K_{12}}{K_{11}} = 12\,L - \left(\frac{-6L^2 \times -6L^2}{4L^3}\right) = 3L$$

$$\overset{o}{K}_{23} = K_{23} - \frac{K_{21}K_{13}}{K_{11}} = -6L^2 - \left(\frac{-6L^2 \times 2L^3}{4L^3}\right) = -3L^2$$

$$\overset{o}{K}_{24} = K_{24} - \frac{K_{21}K_{14}}{K_{11}} = -12L - \left(\frac{-6L^2 \times 6L^2}{4L^3}\right) = -3L$$

$$\overset{o}{K}_{33} = K_{33} - \frac{K_{31}K_{13}}{K_{11}} = 4L^3 - \left(\frac{2L^3 \times 2L^3}{4L^3}\right) = 3L^3$$

$$\overset{o}{K}_{34} = K_{34} - \frac{K_{31}K_{14}}{K_{11}} = 6L^2 - \left(\frac{2L^3 \times 6L^2}{4L^3}\right) = 3L^2$$

$$\overset{o}{K}_{44} = K_{44} - \frac{K_{41}K_{14}}{K_{11}} = 12L - \left(\frac{6L^2 \times 6L^2}{4L^3}\right) = 3L$$

Quedando la relación buscada así

$$\begin{vmatrix} \overset{o}{V}_i \\ \overset{o}{M}_j \\ \overset{o}{V}_j \end{vmatrix} = \frac{EI}{L^4} \begin{vmatrix} 3L & -3L^2 & -3L \\ -3L^2 & 3L^3 & 3L^2 \\ -3L & 3L^2 & 3L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overset{o}{d}_i \\ \overset{o}{\phi}_j \\ \overset{o}{d}_j \end{vmatrix}$$

Esta ecuación, bien conocida también, es válida pues para el caso en que haya una articulación en el nudo i y no se consideren deformaciones axiales (fig. IV-1).

Es interesante investigar que pasaría si se pretende, en este caso, insertar una articulación en el extremo j. Volviendo a aplicar el procedimiento a la matriz ya corregida por primera vez se tendría:

$$\overset{oo}{K}_{11} = K_{11} - \frac{K_{12}K_{21}}{K_{22}} = 3L - \left(\frac{-3L^2 \times -3L^2}{3L^3}\right) = 0$$

$$\overset{oo}{K}_{13} = K_{13} - \frac{K_{12}K_{23}}{K_{22}} = -3L - \left(\frac{-3L^2 \times 3L^2}{3L^3}\right) = 0$$

$$\overset{oo}{K}_{31} = K_{31} - \frac{K_{32}K_{21}}{K_{22}} = -3L - \left(\frac{3L^2 \times -3L^2}{3L^3}\right) = 0$$

$$\overset{oo}{K}_{33} = K_{33} - \frac{K_{32}K_{23}}{K_{22}} = 3L - \left(\frac{3L^2 \times 3L^2}{3L^3}\right) = 0$$

Se obtiene una matriz singular. Este resultado era de esperarse, puesto que el elemento que quedaría sería un elemento cercha, para el cual es necesario tener en cuenta el término correspondiente a las cargas axiales, el cual se despreció en este ejemplo. Se deja al lector efectuar la corrección teniendo en cuenta los términos debidos a carga axial.

IV-2 Ejemplo

Se trata de modificar la matriz de rigidez para tener en cuenta articulaciones elásticas en los extremos i y j (Figura IV-3).

Siendo,

$$K_{ir} = K_i \frac{EI}{L} = \text{rigidez del resorte en nudo i.}$$

$$K_{jr} = K_j \frac{EI}{L} = \text{rigidez del resorte en nudo j.}$$

Este problema lo estudian en las Refs 1 y 2 para obtener las constantes modificadas que se usan en el método de Cross.

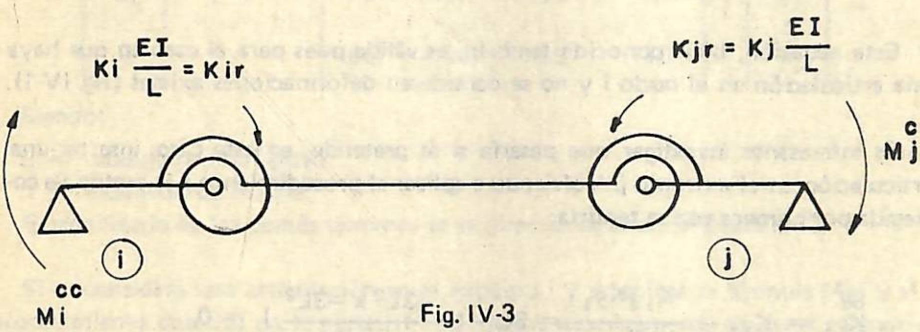

Fig. IV-3
Viga con Articulaciones Elásticas

Se partirá de la relación:

$$\begin{vmatrix} M_i \\ M_j \end{vmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{vmatrix}$$

Es decir que se consideran únicamente los giros de los nudos.

Para tener en cuenta la articulación elástica en el nudo i, se aplica la ecuación (4b).

$$\overset{c}{K}_{11} = K_{11} - \frac{K_{11}K_{11}}{K_{11} + K_{ir}} = \frac{K_{11}K_{ir}}{K_{11} + K_{ir}} = \frac{4EI}{L}\frac{K_i}{K_i + 4}$$

$$\overset{c}{K}_{12} = K_{12} - \frac{K_{11}K_{12}}{K_{11} + K_{ir}} = \frac{K_{12}K_{ir}}{K_{11} + K_{ir}} = \frac{2EI}{L}\frac{K_i}{K_i + 4}$$

$$\overset{c}{K}_{21} = K_{21} - \frac{K_{21}K_{11}}{K_{11} + K_{ir}} = \frac{K_{21}K_{ir}}{K_{11} + K_{ir}} = \frac{2EI}{L}\frac{K_i}{K_i + 4}$$

$$\overset{c}{K}_{22} = K_{22} - \frac{K_{21}K_{12}}{K_{11} + K_{ir}} = \frac{K_{22}K_{11} + K_{22}K_{ir} - K_{21}K_{12}}{K_{11}K_{ir}}$$

$$= \frac{4EI}{L}\frac{K_i + 3}{K_i + 4}$$

Entonces quedaría para tener en cuenta el apoyo elástico en el extremo i

$$\begin{vmatrix} \overset{c}{M}_i \\ \overset{c}{M}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{c}{K}_{11} & \overset{c}{K}_{12} \\ \overset{c}{K}_{21} & \overset{c}{K}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overset{c}{\phi}_i \\ \overset{c}{\phi}_j \end{vmatrix}$$

El superíndice c indica articulación elástica en el nudo i.

Para tener en cuenta la articulación elástica en j, se repite el procedimiento.

$$\overset{cc}{K}_{11} = \overset{c}{K}_{11} - \frac{\overset{c}{K}_{12}\overset{c}{K}_{21}}{\overset{c}{K}_{22} + K_{jr}} = \frac{\overset{c}{K}_{11}\overset{c}{K}_{22} + \overset{c}{K}_{11}K_{jr} - \overset{c}{K}_{12}\overset{c}{K}_{21}}{\overset{c}{K}_{22} + K_{jr}}$$

$$= \frac{4EI}{L}\left(\frac{K_iK_j + 3K_i}{(4 + K_i)(4 + K_j) - 4}\right)$$

$$\overset{cc}{K}_{12} = \overset{c}{K}_{12} - \frac{\overset{c}{K}_{12}\overset{c}{K}_{22}}{\overset{c}{K}_{22} + K_{jr}} = \frac{\overset{c}{K}_{12}K_{jr}}{\overset{c}{K}_{22} + K_{jr}} = \frac{2EI}{L}\left(\frac{K_iK_j}{(4 + K_i)(4 + K_j) - 4}\right)$$

$$\overset{cc}{K}_{21} = \overset{cc}{K}_{12} \quad \text{según el principio de Maxwell}$$

$$\overset{cc}{K}_{22} = \overset{c}{K}_{22} - \frac{\overset{c}{K}_{22}\overset{c}{K}_{22}}{\overset{c}{K}_{22} + K_{jr}} = \frac{\overset{c}{K}_{22}K_{jr}}{\overset{c}{K}_{22} + K_{jr}} = \frac{4EI}{L}\left(\frac{K_iK_j + 3K_j}{(4 + K_i)(4 + K_j) - 4}\right)$$

Estas fórmulas se obtienen por algunos autores (Ref 3) mediante otros procedimientos.

Por último

$$\begin{vmatrix} \overset{cc}{M}_i \\ \overset{cc}{M}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{cc}{K}_{11} & \overset{cc}{K}_{12} \\ \overset{cc}{K}_{21} & \overset{cc}{K}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overset{cc}{\phi}_i \\ \overset{cc}{\phi}_j \end{vmatrix}$$

El superíndice cc indica articulaciones elásticas en los nudos i y j.

V. CONCLUSIONES

Se han obtenido unas fórmulas generales, para tener en cuenta modificaciones en los soportes de un elemento estructural.

Algunos programas de computador, utilizados en el análisis de estructuras, incluyen esta metodología, puesto que se presta muy bien para la sistematización.

También se han hecho unas aplicaciones sencillas, para obtener matrices de rigidez modificadas para elementos estructurales simples, las cuales también han sido obtenidas por otros métodos.

VI. REFERENCIAS

1. Distribución de Momentos por James M. Gere

2. Iterative Methods in Structural Analysis por S. BLASZKOWIAK y Z. KACZKOWSKI.

3. Matrix Methods of Structural Analysis por R.K. Livesley.