

Cimentaciones en medio elástico

José Rivera Vásquez

1. INTRODUCCION.

Durante muchos años la reacción del suelo sobre un cimiento se obtuvo considerando la cimentación indeformable por la dificultad de tener en cuenta la cimentación flexible.

Actualmente se estudian las cimentaciones flexibles mediante el uso de programas matriciales, pero estos tienen algunos inconvenientes como:

- Entrada de datos dispendiosa (reemplazo de suelo por columnas de concreto, análisis de apoyos elásticos, discretización de la estructura para formar el modelo, etc).
- La exactitud de la solución depende del número de divisiones de la estructura.

Se presenta en este artículo una alternativa de solución haciendo uso de la teoría elástica de la flexión a través de un programa de computador, que partiendo de la solución de la ecuación diferencial de la elástica determina sus constantes ajustando las condiciones de borde. Para cada carga aparecerán 8 constantes y se aplica el principio de superposición para cargas múltiples con muy buena velocidad en la solución. Además se trabaja sobre el modelo completo y desaparecen los inconvenientes anotados para los programas matriciales.

CIMENTACIONES SOBRE APOYO ELÁSTICO CONTINUO

Cuando un sistema de cargas se transmite al suelo por medio del cimiento se produce una distribución de esfuerzos en el terreno que lo equilibra.

La distribución de esfuerzos en el terreno depende de las propiedades físicas del suelo, de las propiedades elásticas del cimiento y del propio sistema de cargas.

WINKLER propuso que para todo punto del cimiento la presión desarrollada por el terreno es proporcional al asentamiento.

Luego, para un punto de la cimentación se cumple que:

$$\delta t = K \cdot Y, \text{ siendo}$$

δt , Presión desarrollada por el terreno sobre el cimiento cuando éste se somete a un sistema de cargas.

Y , Asentamiento del cimiento bajo un sistema de cargas.

K , Coeficiente de proporcionalidad del suelo o coeficiente de balasto, o módulo de reacción de la subsastra.

El comportamiento elástico del suelo se puede asegurar si el coeficiente de seguridad al hundimiento es del orden de 3 y entre más se aproxime la relación esfuerzo-deformación a la Ley de Hooke en el ensayo de placa.

$$\delta = E \cdot \epsilon \text{ (Ley de Hooke)}$$

Transformando $\delta = E \cdot Y/H$

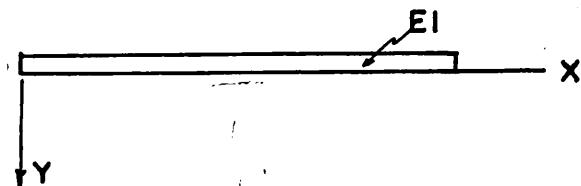
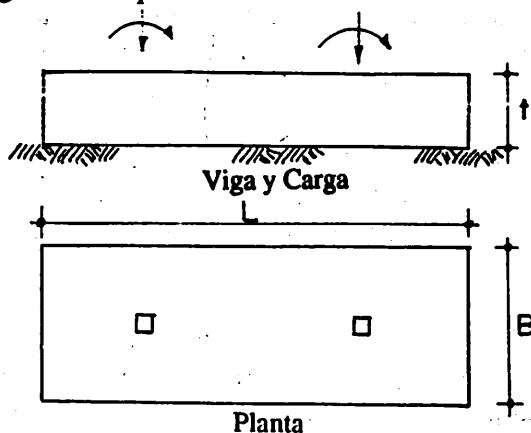
Y = Deformación total del cimiento.

H = Longitud o altura de la columna de suelo.

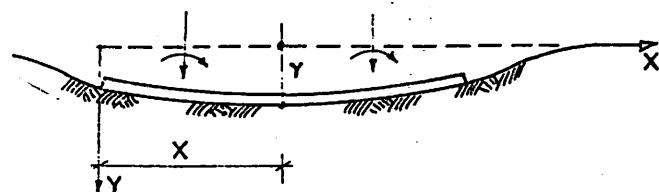
$$\delta t = \frac{E}{H} \cdot Y = K \cdot Y \text{ (Winkler)}$$

Donde H es la altura de la "columna de suelo equivalente" de propiedades constantes.

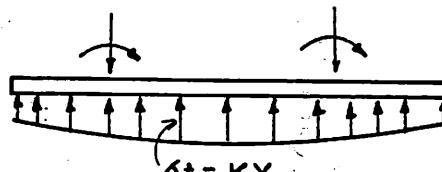
En una viga de sección constante sometida a cargas puntuales y momentos, apoyada en toda su longitud sobre un suelo elástico, tendremos los siguientes esquemas:



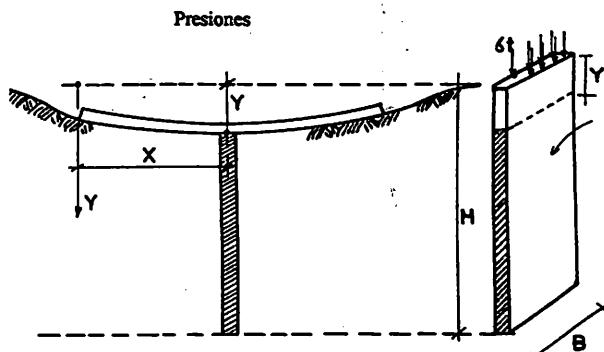
Idealización de la viga ejes coordenados



Asentamientos, deflexiones elásticas



Presiones

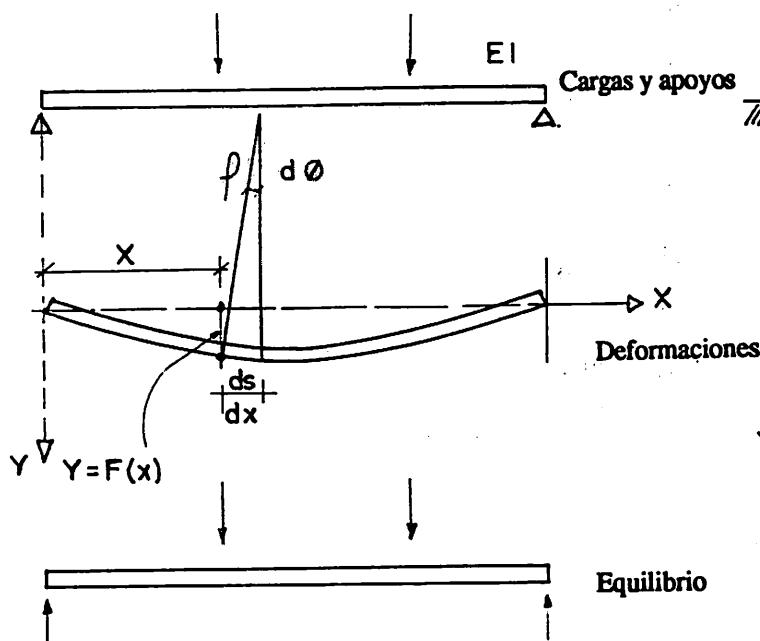


Columna de suelo equivalente
 H = Altura del estrato equivalente
 de propiedades constantes

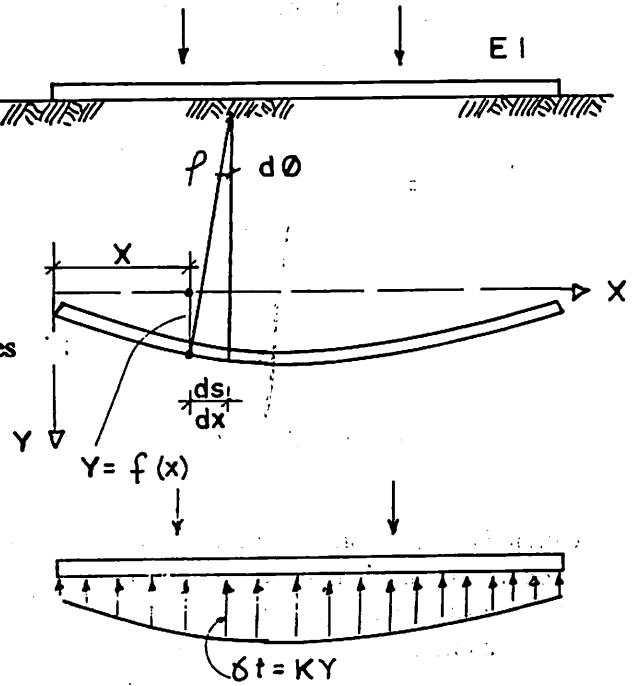
SOLUCION GENERAL

Si se analizan simultáneamente dos vigas, una sobre dos apoyos y la otra sobre apoyo elástico continuo, con el fin de visualizar el problema como uno de flexión con un término adicional que es la reacción del suelo tendremos:

Vigas sobre dos apoyos



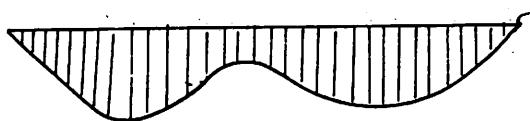
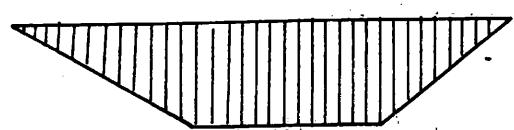
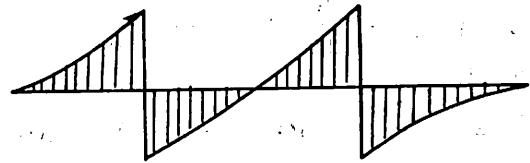
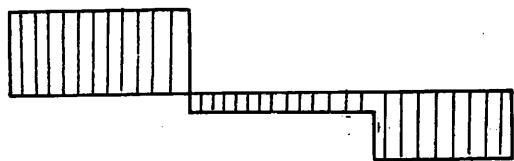
Viga sobre apoyo elástico continuo



Equilibrio

Cortantes

Momentos



El peso propio del cimiento de sección constante no produce flexión ni cortante por lo tanto no se incluye y $6t$ sera la presión neta.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{dM/dX}{EI} = -\frac{V}{EI}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{dV/dX}{EI} = -\frac{W(\text{Carga})}{EI} \rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{(6t \cdot B)}{EI}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{KyB}{EI}$$

$$\text{Llamando } \alpha^4 = \frac{KB}{4EI}; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{KB}{4EI}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\alpha^4 y = 0$$

Cuya solución es

$$y = e^{\alpha x} (A \cdot \sin \alpha x + B \cdot \cos \alpha x) + e^{-\alpha x} (C \cdot \sin \alpha x + D \cdot \cos \alpha x) = f(x)$$

Obtenida la ecuación $y = f(x)$ de la línea elástica se deducen la inclinación, el momento flector, la fuerza cortante y la reacción del terreno mediante las relaciones:

$$\phi \cong \tan \phi = \frac{dy}{dx}; \quad M = EI \frac{d^2y}{dx^2}; \quad V = EI \frac{d^3y}{dx^3}; \quad 6t = K \cdot Y$$

Siendo

$$\frac{dy}{dx} = \alpha e^{\alpha x} [(A-B) \sin \alpha x + (A+B) \cos \alpha x] + \alpha e^{-\alpha x} [-(C+D) \sin \alpha x + (C-D) \cos \alpha x]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\alpha^2 e^{\alpha x} (-B \sin \alpha x + A \cos \alpha x) + 2\alpha^2 e^{-\alpha x} (D \sin \alpha x - C \cos \alpha x)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2\alpha^3 e^{\alpha x} [-(A+B) \sin \alpha x + (A-B) \cos \alpha x] + 2\alpha^3 e^{-\alpha x} [(C-D) \sin \alpha x + (C+D) \cos \alpha x]$$

SOLUCION PARTICULAR

Si se trata de una viga de longitud finita sometida a la acción de una sola carga (carga puntual y momento), la solución será una ecuación que

contiene 4 constantes para el tramo a la izquierda de la carga y otra ecuación para el tramo a la derecha de la misma con otras 4 constantes.

Las constantes se determinarán por las condiciones de frontera, a saber:

EN LOS EXTREMOS EL CORTANTE ES CERO

EN LOS EXTREMOS EL MOMENTO ES CERO

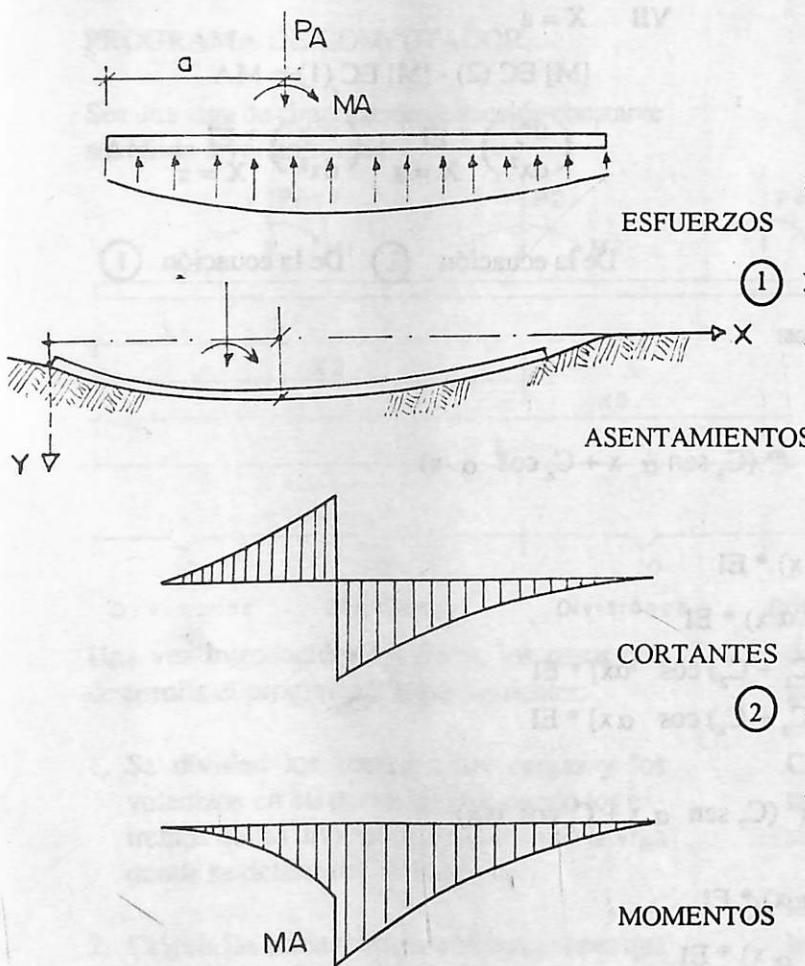
EN EL PUNTO DE APLICACION DE LA CARGA:

Las dos ecuaciones deben tener igual ordenada.

Las dos ecuaciones deben tener igual pendiente.

La diferencia de cortantes igual a la carga exterior.

La diferencia de momentos igual al momento exterior.



$x < a$

$$(1) \quad y = f_1(x) = e^{\alpha x} (C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x) \\ + e^{-\alpha x} (C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x)$$

ASENTAMIENTOS

$x > a$

$$(2) \quad Y = f_2(x) = e^{\alpha x} (C_5 \sin \alpha x + C_6 \cos \alpha x) \\ + e^{-\alpha x} (C_7 \sin \alpha x + C_8 \cos \alpha x)$$

MOMENTOS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA MINAS

La determinación de las constantes en las ecuaciones se realiza atendiendo a las condiciones de frontera mediante el siguiente procedimiento:

I $X = 0; V = 0$

$$V = - \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right) * EI = 0$$

$$X = 0$$

De la ecuación ①

II $X = L; V = 0$

$$V = - \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right) * EI = 0$$

$$X = L$$

De la ecuación ②

III $X = 0; M = 0$

$$M = - \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) * EI = 0$$

$$X = 0$$

De la ecuación ①

IV $X = L; M = 0$

$$M = - \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) * EI = 0$$

$$X = L$$

De la ecuación ②

Determinadas las constantes C_1, C_2, \dots, C_8 tenemos:

$X < a$

$$y = e^{-\alpha x} (C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x) + e^{-\alpha x} (C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x)$$

$$6t = k y$$

$$M = -2\alpha^2 e^{-\alpha x} (-C_2 \sin \alpha x + C_1 \cos \alpha x) * EI$$

$$-2\alpha^2 e^{-\alpha x} (C_4 \sin \alpha x - C_3 \cos \alpha x) * EI$$

$$V = -2\alpha^3 e^{-\alpha x} [-(C_1 + C_2) \sin \alpha x + (C_1 + C_2) \cos \alpha x] * EI$$

$$-2\alpha^3 e^{-\alpha x} [(C_3 - C_4) \sin \alpha x + (C_3 + C_4) \cos \alpha x] * EI$$

$X > a$

$$y = e^{-\alpha x} (C_5 \sin \alpha x + C_6 \cos \alpha x) + e^{-\alpha x} (C_7 \sin \alpha x + C_8 \cos \alpha x)$$

$$6t = k y$$

$$M = -2\alpha^2 e^{-\alpha x} (-C_6 \sin \alpha x + C_5 \cos \alpha x) * EI$$

$$-2\alpha^2 e^{-\alpha x} (C_8 \sin \alpha x - C_7 \cos \alpha x) * EI$$

$$V = -2\alpha^3 e^{-\alpha x} [-(C_5 + C_6) \sin \alpha x + (C_5 + C_6) \cos \alpha x] * EI$$

$$-2\alpha^3 e^{-\alpha x} [(C_7 - C_8) \sin \alpha x + (C_7 + C_8) \cos \alpha x] * EI$$

V $X = a$

$$f_1(a) = f_2(a)$$

Igual ordenada

VI $X = a$

$$f^1(a) = f^2(a)$$

Igual pendiente

VII $X = a$

$$[V] EC(1) - [V] EC(2) = PA$$

$$-\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{X=a} * EI + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{X=a} * EI = PA$$

De la ecuación ① De la ecuación ②

VII $X = a$

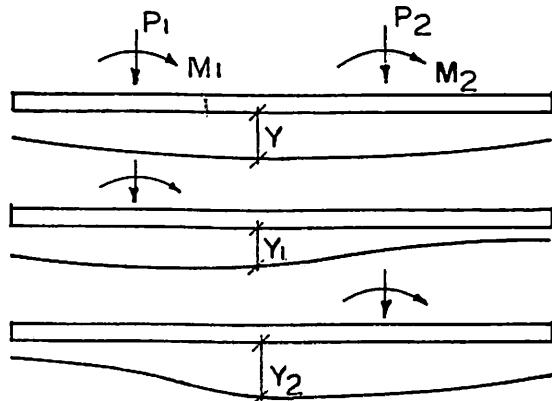
$$[M] EC(2) - [M] EC(1) = MA$$

$$-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{X=a} * EI + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{X=a} * EI = MA$$

De la ecuación ② De la ecuación ①

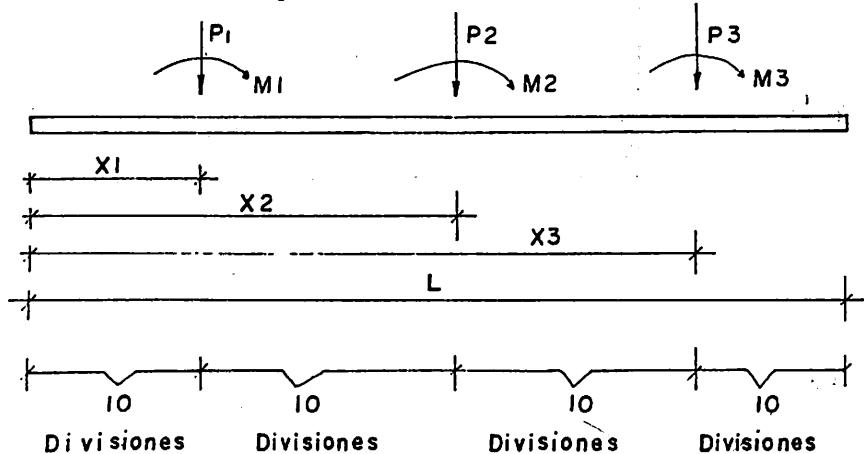
PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Si suponemos comportamiento elástico del suelo se puede calcular la acción de cada carga por separado y después sumar sus efectos.



PROGRAMA DE COMPUTADOR

Sea una viga de cimentación de sección constante sometida a varias cargas.



Una vez introducidos los datos, los pasos que desarrolla el programa son los siguientes:

1. Se dividen los tramos entre cargas y los voladizos en 10 partes iguales siendo los extremos de las divisiones los puntos de la viga donde se determina Y , δ , M y V .
2. Calcula las constantes para las ecuaciones que definen los efectos de la primera carga y los guarda para llamarlos más adelante. Calcula las constantes para las ecuaciones que



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA MINAS

$$Y = Y_1 + Y_2$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

$$M = M_1 + M_2$$

$$V = V_1 + V_2$$

DATOS

P_1, M_1, X_1

P_2, M_2, X_2

P_3, M_3, X_3

L, B, EI, K

Divisiones

definen los efectos de la segunda carga y los guarda para llamarlos más adelante.

Continua éste proceso hasta calcular las constantes de todas y cada una de las cargas del sistema.

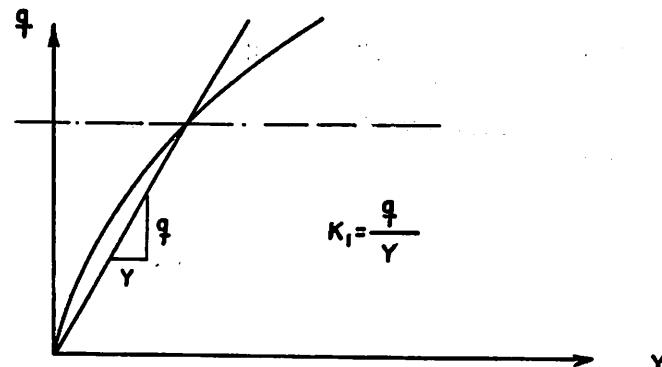
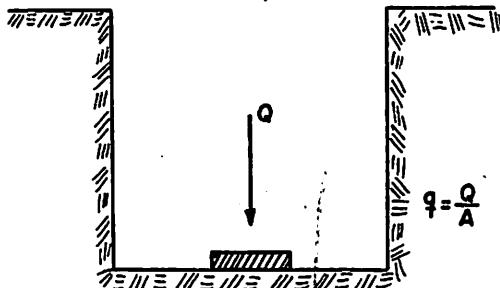
3. Recorre la viga de izquierda a derecha calculando acumulativamente, en cada punto de los determinados en el paso 1, la de las cargas del sistema para δ , Y , δ , M , y V , y escribe los resultados.

COEFICIENTE DE REACCIÓN DE LA SUBRASANTE

El módulo de reacción se suele determinar mediante una prueba de placa en la que se somete a carga una placa cuadrada de un pie de lado, colocada sobre el estrato de suelo en estudio y de ella se determina la relación esfuerzo-deformación, que resulta generalmente no lineal.

Para el nivel medio de presiones a las que se prevee va a estar sujeta la cimentación, se determina una rigidez secante que se toma como módulo de reacción.

Para aplicar el resultado del ensayo al diseño de cimentaciones deben hacerse las siguientes correcciones:



CORRECCIONES PARTICULARES

En una cimentación individual determinada se deben hacer correcciones por efecto de ancho, efecto de longitud y efecto de profundidad.

$$K = (K_1) \text{ (Factores de corrección)}$$

Efecto de ancho

Efectos de long.

Efectos de profud.

$$K = K_1 \cdot \left[\frac{B + 12B}{12B} \right] \cdot \left[\frac{1 + B/L}{1.5} \right] \cdot \left[1 + \frac{2D}{B} \right] \text{ ARENAS}$$

$$K = K_1 \cdot \left[\frac{1}{B} \right] \cdot \left[\frac{1 + B/L}{1.5} \right] \cdot \left[1 \right] \text{ ARCILLAS}$$

$$L > 2B \quad \text{PERO NO MAYOR DE } 2$$

K_s = Valor del ensayo de placa.

K = Valor del coeficiente de reacción de la sub. para diseño.

B = Ancho de la zapata (en pies).

D = Profundidad a que va a quedar la cimentación con relación a la superficie del terreno, (en pies).

L = Longitud de la cimentación (en pies).

CORRECCIONES GENERALES

En el estudio de suelos, al calcular el valor de K deben tenerse en cuenta otros factores que inciden significativamente en él, tales como:

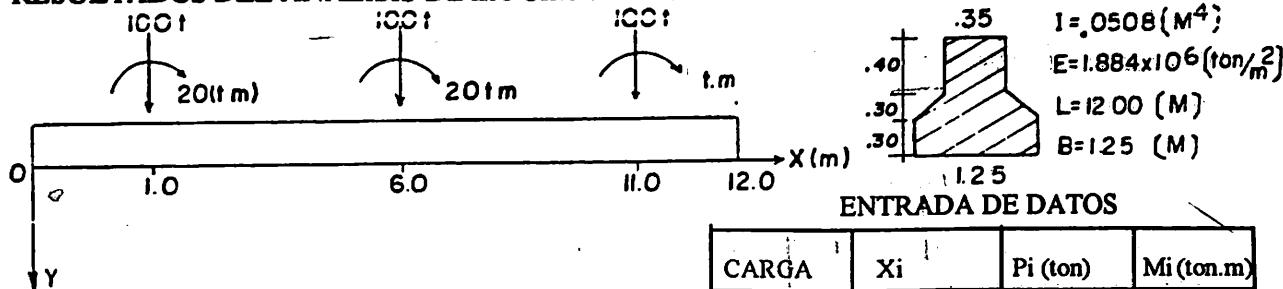
- A. La presencia de capas compresibles que afectan los asentamientos y no se detectan en el ensayo de placa.
- B. Forma y dimensiones de las zapatas. En zapatas calculadas con la misma presión de contacto las de mayor área se asentarán más.
- C. Efecto de conjunto. En un conjunto de zapatas muy cercanas entre si calculadas con la misma presión de contacto, las zapatas perimetrales se asentarán menos que las centrales.

SUPOSICIONES

Una vez determinado el valor de K, el diseño de las cimentaciones queda regido por:

1. El valor de K es independiente de la presión del suelo.
2. El valor de K es constante para cada punto de la superficie de la zapata.
3. La interacción suelo-estructura existe aún si las deformaciones son negativas.

RESULTADOS DEL ANALISIS DE LA CIMENTACION DE LA FIGURA



1. Método rígido

2. Método flexible $K = 1 \text{ (Kg / cm}^3\text{)}$

3. Método flexible $K = 4 \text{ (Kg / cm}^3\text{)}$

CARGA	X_i	$P_i \text{ (ton)}$	$M_i \text{ (ton.m)}$
1	1.00	100	20
2	6.00	100	20
3	11.00	100	20

$$L = 12.00 \text{ (m)} \quad B = 1.25 \text{ (m)} \\ I = 0.0508 \text{ (m}^4\text{)} \quad E = 1.884 \times 10^6 \text{ (ton / m}^2\text{)} \\ K_2 = 1000 \text{ (ton / m}^3\text{)} \quad K_3 = 4000 \text{ (ton / m}^3\text{)}$$

ABS (m)	RIGIDO			FLEXIBLE $K = 1 \text{ Kg/cm}^3$			FLEXIBLE $K = 4 \text{ Kg/cm}^3$		
	$\delta(\text{ton/m}^2)$	$V \text{ (ton)}$	$M \text{ (ton-m)}$	$\delta(\text{ton/m}^2)$	$V \text{ (ton)}$	$M \text{ (ton-m)}$	$\delta(\text{ton/m}^2)$	$V \text{ (ton)}$	$M \text{ (ton-m)}$
.00	18.00	0	0	23.72	0	0	29.10	0	0
.50	18.17	11.30	2.82	22.82	14.55	3.66	27.27	17.62	4.45
1.00	18.33	22.71	11.32	21.91	28.53	14.45	25.39	34.08	17.43
1.00	18.33	-77.29	31.32	21.91	-71.47	34.45	25.39	-65.92	37.43
1.50	18.50	-65.78	-4.45	20.96	-58.08	2.09	23.31	-50.69	8.33
2.00	18.67	-54.17	-34.44	19.99	-45.28	-23.73	21.13	-36.81	-13.49
2.50	18.83	-42.45	-58.60	19.09	-33.07	-43.29	19.08	-24.25	-28.70
3.00	19.00	-30.62	-76.87	18.30	-21.40	-56.89	17.33	-12.89	-37.94
3.50	19.17	-18.70	-89.21	17.66	-10.17	-64.76	15.97	-2.51	-41.75
4.00	19.33	-6.67	-95.56	17.18	0.71	-67.11	15.04	7.16	-40.57
4.50	19.50	5.47	-95.86	16.88	11.35	-64.09	14.54	16.38	-34.67
5.00	19.67	17.71	-90.07	16.75	21.85	-55.79	14.39	25.40	-24.22
5.50	19.83	30.05	-78.13	16.76	32.32	-42.25	14.49	34.42	-9.27
6.00	20.00	42.50	-60.00	16.88	42.82	-23.46	14.68	43.53	10.22
6.00	20.00	-57.50	-40.00	16.88	-57.18	-3.46	14.68	-56.47	30.22
6.50	20.17	-44.95	-65.62	17.05	-46.58	-29.41	14.74	-47.27	4.28
7.00	20.33	-32.29	-84.93	17.31	-35.84	-50.02	14.76	-38.05	-17.05
7.50	20.50	-19.53	-97.89	17.69	-24.92	-65.22	14.95	-28.78	-33.76
8.00	20.67	-6.67	-104.44	18.24	-13.70	-74.89	15.49	19.29	-45.79
8.50	20.83	6.30	-104.54	18.98	-2.08	-78.85	16.50	-9.32	-52.97
9.00	21.00	19.38	-98.12	19.93	10.06	-76.88	18.06	1.45	-54.98
9.50	21.17	32.55	-85.15	21.08	22.87	-68.68	20.20	13.38	-51.32
10.00	21.33	45.83	-65.56	22.40	36.45	-53.89	22.86	26.81	-41.35
10.50	21.50	59.22	-39.30	23.87	50.90	-32.09	25.95	42.04	-24.21
11.00	21.67	72.71	-6.32	25.42	66.30	-2.83	29.28	59.29	1.03
11.00	21.67	-27.29	13.68	25.42	-33.70	17.17	29.28	-40.71	21.03
11.50	21.83	-13.70	3.43	26.96	-17.33	4.37	32.58	-21.37	5.43
12.00	22.00	0	0	28.50	0	0	35.81	0	0

ESFUERZOS EN EL SUELO

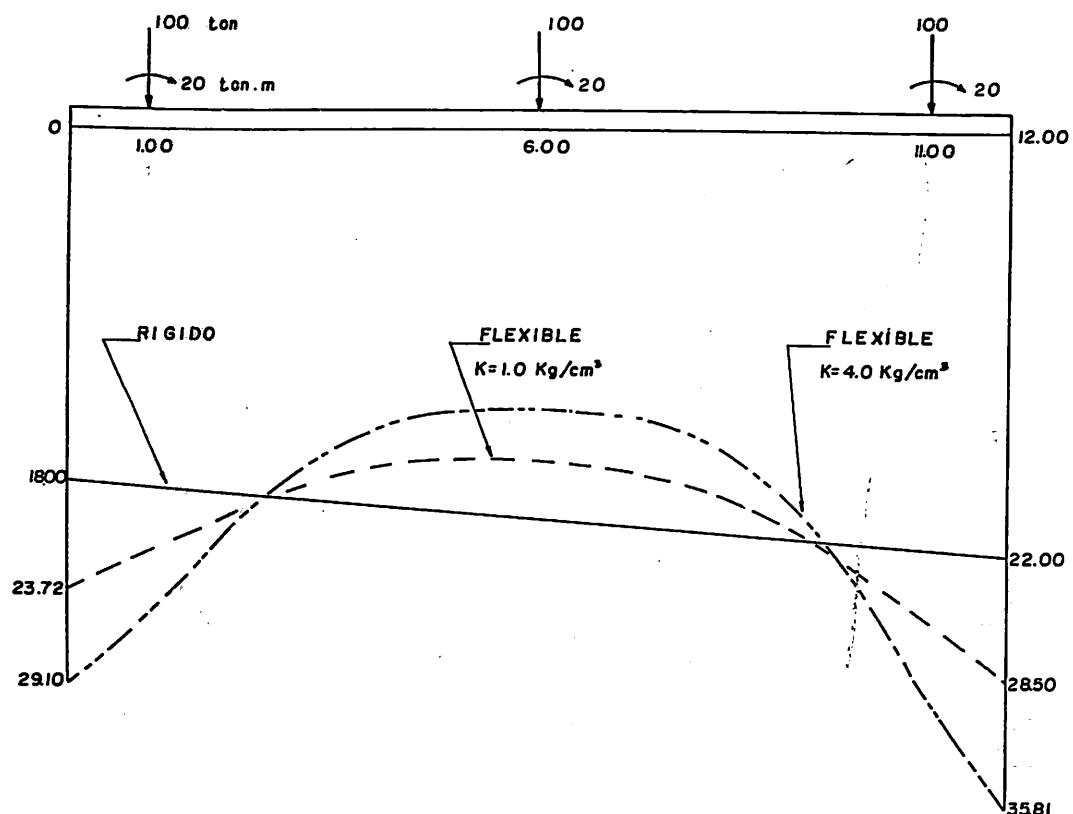


DIAGRAMA DE CORTANTES

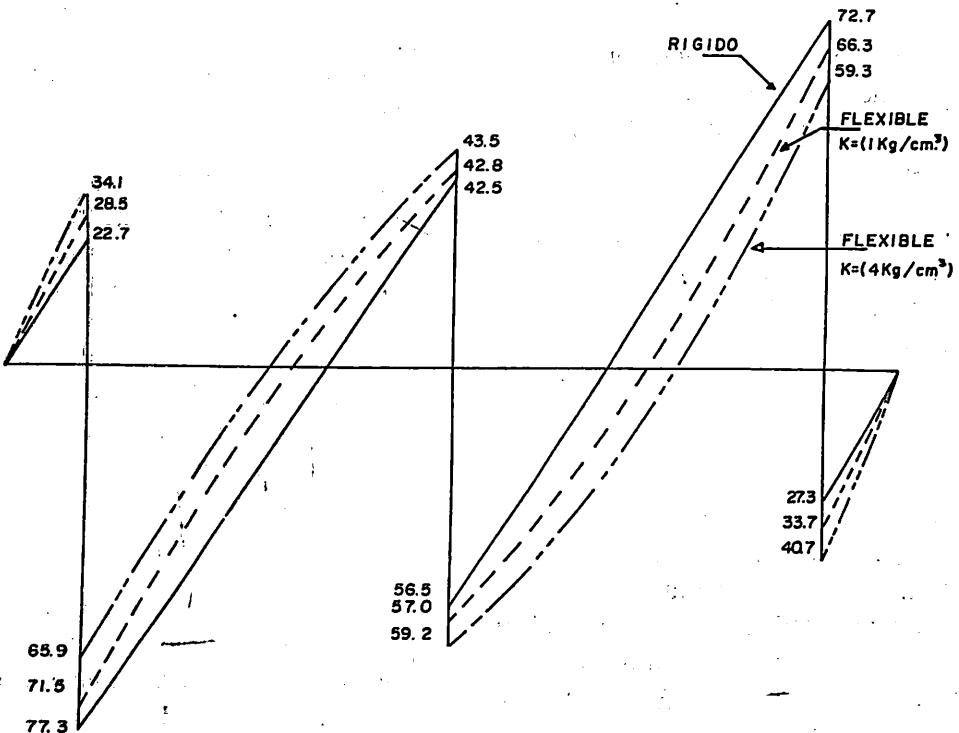
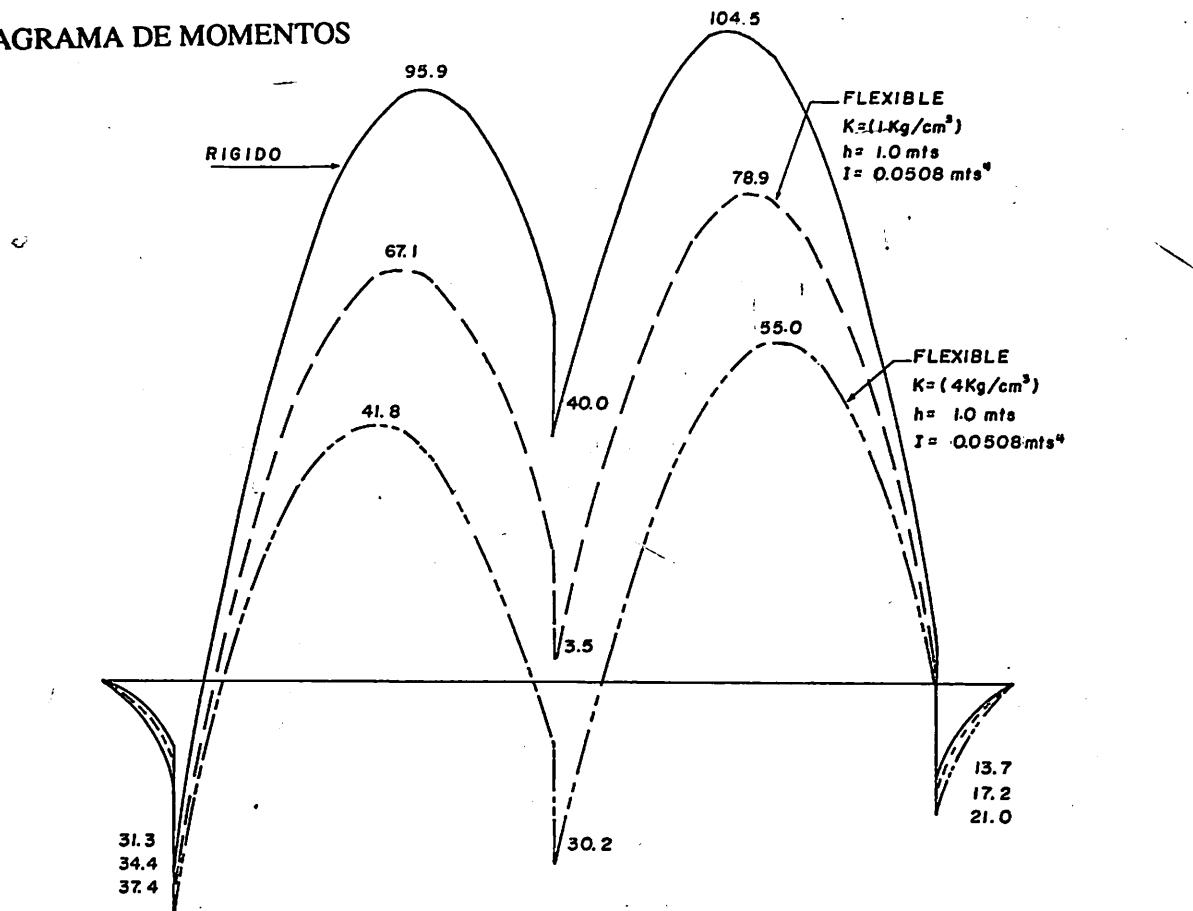


DIAGRAMA DE MOMENTOS



COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Como se observa, en el ejemplo anterior, existen marcadas diferencias entre los diagramas de momento obtenidos por el método rígido y por el método flexible.

Los momentos, obtenidos por el método rígido, pueden apartarse mucho del comportamiento real del cimiento ya que el método supone un cimiento infinitamente rígido y en determinadas circunstancias esa suposición no se presentará. El resultado conducirá a un diseño seguro pero antieconómico.

Es frecuente, en los textos de cimentaciones, encontrar la hipótesis que la influencia de la reacción de la subrasante no es muy significativa por estar su valor afectado de una raíz cuarta. Sin embargo el ejemplo anterior muestra diferencias en los momentos del 50% y más para valores de $K = 1 \text{ (Kg/cm}^3)$ y $K = 4 \text{ (kg/cm}^3)$.

Ante la dificultad de determinar un valor exacto para la reacción de la subrasante, K , se propone diseñar el cimiento con la envolvente de momentos obtenida para los valores extremos posibles de K .

Aunque el proceso es aparentemente dispendioso, con la ayuda del computador resulta rápido y sencillo. Además el método utilizado propuesto es exacto e independiente del modelo utilizado en contraste con los métodos matriciales en los cuales, para la misma exactitud en la solución, hay que dividir el cimiento con gran cantidad de elementos haciendo la solución lenta (con un tiempo de cálculo en el computador hasta de diez o más veces que el empleado por el método propuesto).

El método también es propicio para trabajarse iterativamente en busca de la rigidez ideal del cimiento que es inicialmente desconocida y que afectará los valores de los momentos.