

# Grado de Empotramiento que una Zapata común Confiere a un Grupo de dos Pilares

Por: Gabriel García Moreno

## INTRODUCCION

Ya se ha visto en publicaciones anteriores<sup>1, 2</sup>, la forma de calcular el G.D.E. de pilares unidos a zapatas aisladas, ya se encuentren éstas apoyadas en suelo firme, roca, pilotes de punta, o pilotes de fricción. Se ha encontrado que en los dos primeros casos: zapatas apoyadas en suelo firme o zapatas apoyadas en roca, el parámetro más importante, que controla el diseño, es el coeficiente o módulo de balasto,  $K_s$ . Por medio de este mismo parámetro vamos en seguida a presentar la forma de obtener el G.D.E., que una zapata común, confiere a grupos de pilares. El estudio se basa, fundamentalmente, en el trabajo dirigido de grado: "GRADO DE EMPOTRAMIENTO EN ZAPATAS COMBINADAS" de Liliam Zapata Pérez, dirigido por el autor de este artículo. En esta tesis el lector interesado podrá encontrar una información útil, acerca del coeficiente de balasto  $K_s$ : origen, forma de determinarlo experimentalmente, en forma directa, mediante ensayos de carga, o en forma indirecta mediante otros ensayos.

## ARTICULO 1) HIPOTESIS BASICAS

1. Se esquematiza la carga de los pilares como cargas concentradas Figura 1.

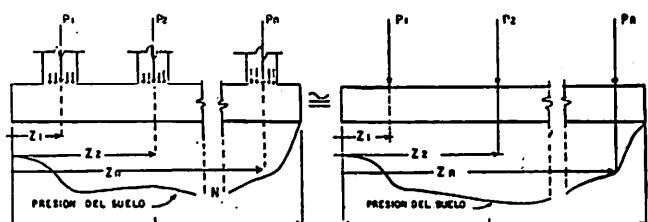


FIGURA 1

2. Según Hetenyi<sup>3</sup>, y de la teoría de las vigas sobre fundación elástica, una fundación puede ser considerada como rígida, cuando el parámetro  $\Omega$ , cumple  $\Omega L < \pi/4$ , y flexible si  $\Omega L \geq \pi$ , donde,

$$\Omega L = \left( \frac{K_s B L^4}{4 E_c I} \right)^{1/4} = \left( \frac{3 K_s L^4}{E_c h^3} \right)^{1/4} \quad (1)$$

$L$  : Longitud total de la base común

$K_s$  : Módulo de balasto

$B$  : Anchura de la base o zapata común

$E_c$  : Módulo de elasticidad del hormigón de la zapata  
 $= 15100 \sqrt{f' c}$

$$Bh^3$$

$I$  :  $\frac{Bh^3}{12}$  momento de inercia de la sección de la zapata

$h$  : espesor de la zapata.

Las vigas con  $\frac{\pi}{4} \leq \Omega L < \pi$  se consideran semi-flexibles.

3. Se acepta según la referencia (1), que la rotación de la base de un pilar unido a una zapata aislada, es, en función del módulo de rigidez del pilar  $k$ :

$$\theta = + \frac{M (1 - f_A^0)}{4 k f_A^0} \quad (2)$$

donde:

$M$  : Momento aplicado por la cimentación al pilar  
 $E_c I_c$

$k$  : Rigidez del pilar =  $\frac{I_c}{H_1}$

$I_c$  : Momento de inercia del pilar

$H_1$  : Altura del pilar

$\theta$  : Rotación de la zapata

$f_A^o$ : G.D.E. del pilar unido a la zapata

## ARTICULO 2) ZAPATA COMUN RIGIDA.

$$\Omega L < \pi / 4$$

El cálculo se efectuará sobre un grupo de dos pilares, pero puede fácilmente extenderse hasta n pilares.

Para utilizar la hipótesis 3, vamos a reemplazar a las cargas de los dos pilares  $P_1, P_2$ , situados a distancias del borde izquierdo  $Z_1, Z_2$ , por su resultante  $P$  situada a una distancia  $Z$ . Figura 2.

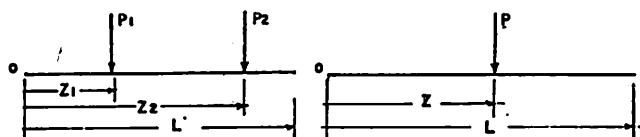


FIGURA 2

Llamaremos a esta resultante  $P$ , "pilar equivalente".

Se tendrá

$$\Sigma F \cdot V = 0 \rightarrow P = P_1 + P_2 \quad (3) - A$$

$$\Sigma M_o = 0 \rightarrow PZ = P_1 Z_1 + P_2 Z_2 \rightarrow Z = (P_1 Z_1 + P_2 Z_2) / (P_1 + P_2) \quad (4) - A$$

Si llamamos  $\alpha = P_2 / P_1$  las ecuaciones (3)-A y (4)-A quedarán:

$$P = P_1 (1 + \alpha) \quad (3)$$

$$Z = (Z_1 + Z_2) / (1 + \alpha) \quad (4)$$

En general el vector  $\vec{P}$  puede ocupar cualquier posición sobre el eje de abscisas y puede tener cualquier sentido, pero en los casos corrientes, se define como excentricidad a la distancia

$$e = Z - \frac{L}{2} = \frac{M}{P} \quad (5)$$

Se define entonces:

$M$  = momento equivalente

$$M = Pe = P_1 (1 + \alpha) e \quad (6)$$

o sea: la solicitación sobre la zapata de los pilares  $P_1, P_2$ , es equivalente a la solicitación del pilar equivalente  $P$  y del momento equivalente  $M$ , localizados en  $L/2$ . Figura 3.

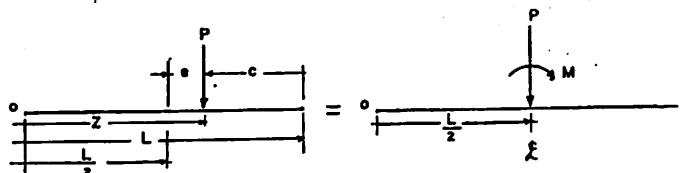


FIGURA 3

El desarrollo anterior se puede también aplicar cuando sobre la zapata, tomada como cuerpo rígido, se considera la aplicación, más general, de dos pilares con cargas  $P_1, P_2$  y sendos momentos  $M_1, M_2$ , Figura 4.

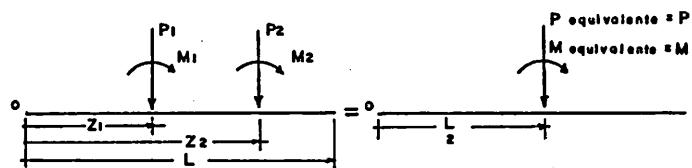


FIGURA 4

$$P = P_1 + P_2 = P_1 (1 + \alpha) = P_2 \frac{1 + \alpha}{\alpha} \quad (7)$$

$$M = M_1 + M_2 = M_1 (1 + \beta) = M_2 \frac{1 + \beta}{\beta} \quad (8)$$

$$e = \frac{M}{P} = \frac{M_1 + M_2}{P_1 + P_2} = \frac{e_1 + \alpha e_2}{1 + \alpha} \quad (9)$$

donde

$$\beta = \frac{M_2}{M_1} \quad (10)$$

Como la zapata común a los dos pilares es rígida, la rotación y asentamiento producidos por  $(P_1, M_1)$ ,  $(P_2, M_2)$  deben ser los mismos del pilar equivalente  $(P, M)$ , Figura 5.

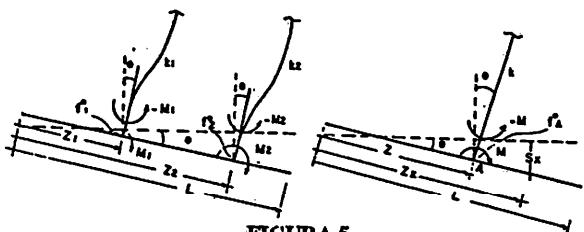


FIGURA 5

Se tiene entonces, de acuerdo con la hipótesis 3:

$$M(1 - f^o_A) = M_1(1 - f^o_1) = M_2(1 - f^o_2)$$

$$\theta = + \frac{1}{4k f^o_A} = + \frac{1}{4k_1 f^o_1} = + \frac{1}{4k_2 f^o_2} \quad (11)$$

De estas tres ecuaciones se deduce, eliminando a  $\theta$ :

$$f^o_A = \frac{1}{k} \quad (a)$$

$$1 + \frac{k_1 f^o_1}{k_1 f^o_1 + k_2 f^o_2}$$

$$\frac{1}{1 - f^o_1} + \frac{1}{1 - f^o_2}$$

$$f^o_1 = \frac{1}{k_1 M (1 - f^o_A)} \quad (b) \quad (12)$$

$$1 + \frac{k M_1 f^o_A}{k M_1 f^o_A}$$

$$f^o_2 = \frac{1}{k_2 M (1 - f^o_A)} \quad (c)$$

$$1 + \frac{k M_2 f^o_A}{k M_2 f^o_A}$$

Así entonces, una vez determinado el G.D.E. del pilar equivalente de rigidez  $k$ :  $f^o_A$ , se pueden encontrar los G.D.E.,  $f^o_1$ ,  $f^o_2$  de los pilares de rigideces  $k_1$ ,  $k_2$ . Es preciso, pues, encontrar la rigidez  $k$  del pilar equivalente, en función de las rigideces  $k_1$ ,  $k_2$ , de los pilares dados, sobre la zapata rígida que les sirve de base común.

Se trata de dos pilares en batería, o mejor, en paralelo, Figura 6,

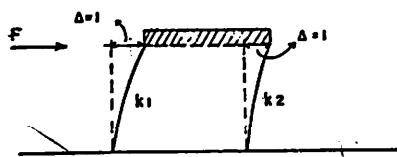


FIGURA 6

que bajo la acción de una fuerza lateral  $F$ , sufren un desplazamiento unitario:  $\Delta = 1$

Se tiene:

$$F = \Delta k \quad \text{para el pilar equivalente}$$

$$F = k = F_1 + F_2 = k_1 + k_2$$

siendo  $F_1$  y  $F_2$  las fuerzas tomadas por los pilares que sufren el desplazamiento unitario  $\Delta = 1$

Así pues:

$$k = k_1 + k_2 \quad (13)$$

es la relación buscada.

Reemplazando las ecuaciones (13) y (8) en las ecuaciones (12) - b y (12) - c se obtiene las ecuaciones (14) y (15) que nos dan el valor de  $f_1$  y  $f_2$  en función de  $f^o_A$ .

$$f^o_1 = \frac{1}{k_1 (1 + \beta) (1 - f^o_A)} \quad (14)$$

$$1 + \frac{(k_1 + k_2) f^o_A}{k_1 (1 + \beta) (1 - f^o_A)}$$

$$f^o_2 = \frac{1}{k_2 (1 + \beta) (1 - f^o_A)} \quad (15)$$

$$1 + \frac{\beta (k_1 + k_2) f^o_A}{k_2 (1 + \beta) (1 - f^o_A)}$$

Es pues preciso encontrar  $f^o_A$ , lo cual debe ser logrado introduciendo la condición de rigidez de la zapata en la deformación del suelo S, Figura 5:

$$S_x = C_1 + C_2 Z_x \quad (16)$$

que indica, que si la zapata permanece rígida, la deformación debe ser lineal. Si ahora suponemos que se cumple la teoría de Winkler:

$$q_x = K_s S_x \quad (17)$$

donde:

$q_x$  : Presión en el suelo en el punto  $Z_x$

$S_x$  : Deformación del suelo en  $Z_x$

$K_s$  : Módulo de balasto

Como  $S_x$  es lineal, las presiones  $q_x$ , entre el suelo y la zapata deben también ser lineales de acuerdo con la condición (17). Se pueden presentar dos situaciones:

- 2-a) Toda la superficie de contacto suelo-zapata está en compresión.
- 2-b) Parte de la superficie está en compresión y el resto se levanta.
- 2-a) Toda la superficie suelo-zapata está en compresión. Figura 7.

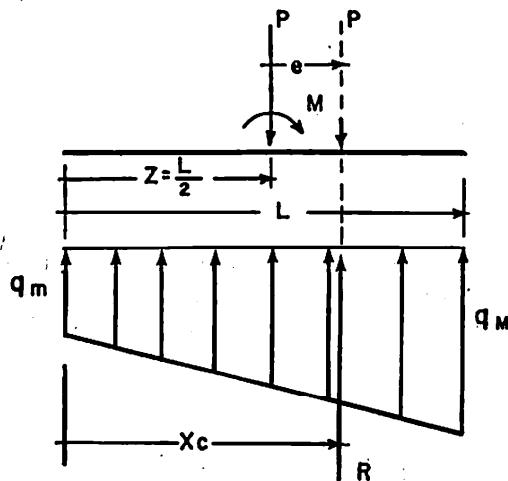


FIGURA 7

La resultante  $R$  de la distribución trapezoidal que se encuentra en el centroide del trapecio de bases  $q_m$ ,  $q_M$  y de altura  $L$  equilibra a la carga equivalente  $P$  situada a la distancia  $e$  de  $L/2$ :

$$R = \frac{q_m + q_M}{2} \cdot L \cdot B = P \quad (18)$$

$$x_c = \frac{L(q_m + 2q_M)}{3(q_m + q_M)} = \frac{L}{2} + e \quad (19)$$

La condición (19) es dada por la geometría.

Reemplazando en la (19) el valor de  $e$  dado por la (9) se pueden despejar de la (18) y (19) los valores de  $q_m$  y  $q_M$ , que quedan:

$$q_m = q_{\text{mínima}} = P(1 - 6e/L) / BL \quad (a)$$

$$q_M = q_{\text{máxima}} = P(1 + 6e/L) / BL \quad (b)$$

y que corresponden a las fórmulas de la flexo-compresión elástica lineal

$$q_m = \frac{P}{A} - \frac{ML}{2(\frac{BL^3}{12})} = \frac{P}{A} - \frac{ML}{2I_b} \quad (a)$$

$$q_M = \frac{P}{A} + \frac{ML}{2(\frac{BL^3}{12})} = \frac{P}{A} + \frac{ML}{2I_b} \quad (b)$$

$$A = BL: \text{Área de la superficie de contacto zapata - suelo.}$$

$$I_b = \frac{BL^3}{12}: \text{Momento de inercia del área } A \text{ (21)-A alrededor de un eje perpendicular al plano del papel, que pasa por el centroide del área } A.$$

La rotación  $\theta$  de la zapata, se puede ahora determinar con el auxilio de la ecuación (17):

$$\theta = \frac{S_M - S_m}{L} = \frac{q_M - q_m}{K_s L} \quad (22)$$

Reemplazando en la (22) los valores  $q_M$  y  $q_m$  dados por las (20), se obtiene:

$$\theta = \frac{12Pe}{K_s BL^3} = \frac{M}{K_s I_b} \quad (23)$$

Igualando la (23) y la primera de las ecuaciones (11) obtenemos el valor de  $f_A^0$  buscado, para el caso de compresión total sobre el área de la zapata:

$$f_A^0 = \frac{1}{1 + \frac{4k}{K_s I_b}} \quad (24)$$

GDE,  $f_A^0$ , en función de la rigidez del pilar equivalente,  $k = k_1 + k_2$ ; o sea:

$$f_A^0 = \frac{1}{1 + \frac{4(K_1 + K_2)}{K_s I_b}} = \frac{1}{1 + \frac{48(K_1 + K_2)}{BL^3 K_s}} \quad (25)$$

Reemplazando este valor en las ecuaciones (14) y (15) obtenemos los G.D.E. de los pilares unidos a la base común:

$$f^o_1 = \frac{1}{4 K_1 (1 + \beta)} \quad (a)$$

$$1 + \frac{K_s I_b}{} \quad (26)$$

$$f^o_2 = \frac{1}{4 K_2 (1 + \beta)} \quad (b)$$

$$1 + \frac{\beta K_s I_b}{}$$

para una distribución de presiones de compresión en toda la zapata.

## 2-b) Parte de la superficie está en compresión.

Este caso se da cuando  $q_m$ , dado por la ecuación (20)-a es negativa, caso que se tiene cuando:

$$e > \frac{L}{6}$$

Observemos que si  $e = \frac{L}{6}$ ,  $q_m$  de la ecuación (20)-a es cero. Luego  $e = \frac{L}{6}$  es el valor máximo de la excentricidad para estar todavía en el caso anterior, en cuyo caso la distribución de presiones de la Figura 7 es triangular, Figura 8: Distribución ABC. Cuando  $e$  aumenta:  $e > \frac{L}{6}$ ,

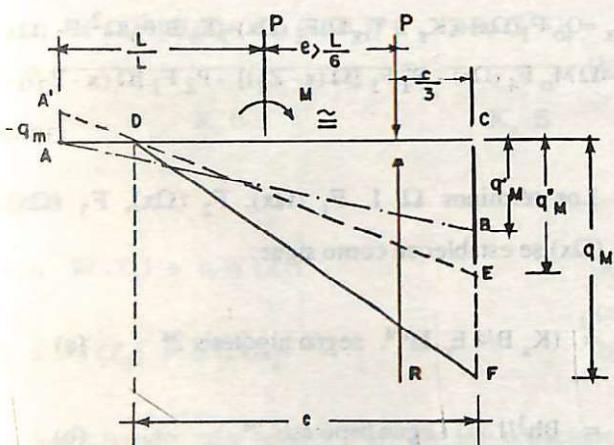


FIGURA 8

la distribución lineal sería A'DE, obligando a que  $q_m$  fuese de tracción. Como la unión terreno-cimentación no está en capacidad de soportar tracciones mutuas, la distribución cambia a DFC, para mantener el equilibrio, aumentando  $q_M$  a  $q_M'$ , en tal forma que la resultante R se pueda correr a la derecha, pasando por el centroide del triángulo, situado a  $\frac{c}{3}$  del borde C.

$$q_M \frac{Bc}{2} = P \quad (27)$$

o sea

$$q_M = \frac{2P}{Bc} \leq q_u \quad (28)$$

$q_u$  = tensión útil de servicio

$$c_{\text{mínima}} = c_m = \frac{2P}{Bq_u} \quad (29)$$

La rotación de la zapata será entonces, utilizando la ecuación (27):

$$\theta = \frac{s_M}{c} = \frac{q_M}{K_s c} = \frac{2M}{K_s e Bc^2} = \frac{2P}{K_s Bc^2} \quad (30)$$

y la excentricidad:

$$e = \frac{L}{2} - \frac{c}{3} \quad (30)-a$$

$$\therefore L > c = \frac{3}{2} (L - 2e) \geq \frac{2P}{B q_u} \quad (31)$$

Igualando la (30) con la primera de las ecuaciones (11) se tendrá

$$f^o_A = \frac{1}{1 + \frac{8(k_1 + k_2)}{K_s e Bc^2}} \quad (32)$$

la cual reemplazada en las ecuaciones (12)-b y (12)-c se obtiene:

$$f^o_1 = \frac{1}{1 + \frac{8(k_1 + \beta)}{K_s e B c^2}} \quad (33)$$

$$f^o_2 = \frac{1}{1 + \frac{8(k_2 + \beta)}{\beta K_s e B c^2}} \quad (34)$$

Estas dos expresiones pueden simplificarse sustituyendo en ellas el valor de  $c$  dado por la ecuación (31) y llamando  $J$  al valor dado por:

$$J = \frac{2L^3}{27 e (L - 2e)^2} \quad (35)$$

Las ecuaciones (33) y (34) quedan así:

$$f^o_1 = \frac{1}{1 + \frac{4k_1(1 + \beta)J}{K_s I_b}} \quad (36)$$

$$f^o_2 = \frac{1}{1 + \frac{4k_2(1 + \beta)J}{\beta K_s I_b}} \quad (37)$$

que son los grados de empotramiento de los dos pilares situados en una base común, cuando la reacción del suelo no se aplica a toda el área de la zapata. Las dos expresiones son similares a las ecuaciones (26)-a y (26)-b, salvo el parámetro  $J$  que es un coeficiente adimensional que las corrige para obtener el área eficaz de contacto suelo-cimentación.

### ARTICULO 3) ZAPATA COMUN CONSIDERADA COMO CUERPO ELASTICO FLEXIBLE $\Omega L \geq \pi/4$ (véanse las conclusiones)

Este caso se desarrollará basado en la teoría de Hetenyi<sup>3</sup> Figura 9.

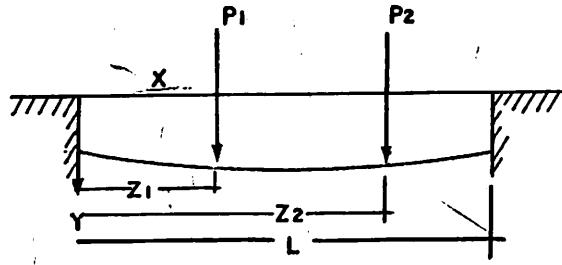


FIGURA 9

La ecuación de la elástica según Hetenyi<sup>3</sup>, para la abscisa  $x$ , es:

$$\begin{aligned} Y_x &= Y_o F_1(\Omega x) + (\theta_o/\Omega) F_2(\Omega x) - (M_o/(\Omega^2 EI)) F_3(\Omega x) \\ &- (Q_o/(\Omega^3 EI)) F_4(\Omega x) + (P_1/\Omega^3 EI) F_4[\Omega(x - Z_1)] \\ &+ (P_2/\Omega^3 EI) F_4[\Omega(x - Z_2)] \end{aligned} \quad (38-a)$$

La rotación  $\theta_x = -dy/dx$ :

$$\begin{aligned} \theta_x &= \theta_o F_1(\Omega x) - (M_o/\Omega EI) F_2(\Omega x) - (Q_o/\Omega^2 EI) F_3(\Omega x) \\ &- 4\Omega Y_o F_4(\Omega x) + (P_1/\Omega^2 EI) F_3[\Omega(x - Z_1)] + \\ &(P_2/\Omega^2 EI) F_3[\Omega(x - Z_2)] \end{aligned} \quad (38-b)$$

El momento  $M = -EI(d^2y/dx^2)$ :

$$\begin{aligned} M_x &= M_o F_1(\Omega x) + (Q_o/\Omega) F_2(\Omega x) + (K_s B Y_o/\Omega^2) F_3(\Omega x) + \\ &(K_s B \theta_o/\Omega^3) F_4(\Omega x) - (P_1/\Omega) F_2[\Omega(x - Z_1)] - \\ &(P_2/\Omega) F_2[\Omega(x - Z_2)] \end{aligned} \quad (38-c)$$

El esfuerzo cortante  $Q_x = -dM/dx$ :

$$\begin{aligned} Q_x &= Q_o F_1(\Omega x) + (K_s B Y_o/\Omega) F_2(\Omega x) + (K_s B \theta_o/\Omega^2) F_3(\Omega x) \\ &- 4\Omega M_o F_4(\Omega x) - P_1 F_1[\Omega(x - Z_1)] - P_2 F_1[\Omega(x - Z_2)] \end{aligned} \quad (38-d)$$

Los términos  $\Omega$ ,  $I$ ,  $F_1(\Omega x)$ ,  $F_2(\Omega x)$ ,  $F_3(\Omega x)$ ,  $F_4(\Omega x)$  se establecen como sigue:

$$\Omega = (K_s B/4 E_c I)^{1/4}, \text{ según hipótesis 2a} \quad (a)$$

$$I = Bh^3/12, \text{ según hipótesis 2a} \quad (b)$$

$$F_1(\Omega x) = \cos h(\Omega x) \cos(\Omega x) \quad (c)$$

$$F_2(\Omega x) = [\cos h(\Omega x) \cdot \operatorname{sen}(\Omega x) + \cos(\Omega x) \cdot \operatorname{sen} h(\Omega x)]/2 \quad (d)$$

$$F_3(\Omega x) = [\operatorname{sen} h(\Omega x) \cdot \operatorname{sen}(\Omega x)]/2 \quad (e)$$

$$F_4(\Omega x) = [\cos h(\Omega x) \cdot \operatorname{sen}(\Omega x) - \operatorname{sen} h(\Omega x) \cdot \cos(\Omega x)]/4 \quad (f)$$

Las constantes  $Y_o$  y  $Q_o$ , se pueden encontrar a partir de las condiciones de borde:

$$\text{para } x = 0 \rightarrow M_o = Q_o = 0 \quad (a) \quad (40)$$

$$\text{para } x = L \rightarrow M_L = Q_L = 0 \quad (b)$$

Si se define a  $W(x)$  y  $G(x)$  como:

$$W(x) = \frac{F_3(\Omega L) F_2[\Omega(L-x)] - F_4(\Omega L) F_1[\Omega(L-x)]}{\operatorname{sen} h^2(\Omega L) - \operatorname{sen}^2(\Omega L)} \quad (a) \quad (41)$$

$$G(x) = \frac{F_3(\Omega L) F_1[\Omega(L-x)] - F_2(\Omega L) F_2[\Omega(L-x)]}{\operatorname{sen} h^2(\Omega L) - \operatorname{sen}^2(\Omega L)} \quad (b)$$

se puede, enseguida, por medio de las ecuaciones (40)-a-b y (41)-a-b, reemplazar en las ecuaciones (38)-b-c, para obtener los valores  $Y_o$  y  $\theta_o$ :

$$Y_o = \frac{8 P_1 \Omega [W(Z_1) + \alpha W(Z_2)]}{K_s B} = \frac{8 P_1 \Omega W_1}{K_s B} \quad (a) \quad (42)$$

$$\theta_o = \frac{8 P_1 \Omega^2 [G(Z_1) + \alpha G(Z_2)]}{K_s B} = \frac{8 P_1 \Omega^2 G_1}{K_s B} \quad (b)$$

donde:

$$W_1 = W(Z_1) + \alpha W(Z_2) \quad (a) \quad (43)$$

$$G_1 = G(Z_1) + \alpha G(Z_2) \quad (b)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (38)-b-c-d se obtienen la rotación  $\theta_x$ , el momento  $M_x$  y el cortante  $Q_x$ :

para  $0 \leq x < Z_1$

$$\theta_x = (8 P_1 \Omega^2 / K_s B) [F_1(\Omega x) G_1 - 4 F_4(\Omega x) W_1] \quad (a)$$

$$M_x = (8 P_1 / \Omega) [F_3(\Omega x) W_1 + F_4(\Omega x) G_1] \quad (b) \quad (44)$$

$$Q_x = (8 P_1) [F_2(\Omega x) W_1 + F_3(\Omega x) G_1] \quad (c)$$

Para  $Z_1 \leq x < Z_2$

$$\theta_x = (8 P_1 \Omega^2 / K_s B) \{F_1(\Omega x) G_1 - 4 F_4(\Omega x) W_1 + F_3[\Omega(x - Z_1)]/2\} \quad (a)$$

$$M_x = (8 P_1 / \Omega) \{F_3(\Omega x) W_1 + F_4(\Omega x) G_1 - F_2[\Omega(x - Z_1)]/8\} \quad (b) \quad (45)$$

$$Q_x = (8 P_1) \{F_2(\Omega x) W_1 + F_3(\Omega x) G_1 - F_1[\Omega(x - Z_1)]/8\} \quad (c)$$

Para  $Z_2 \leq x < L$

$$\theta_x = (8 P_1 \Omega^2 / K_s B) \{F_1(\Omega x) G_1 - 4 F_4(\Omega x) W_1 + F_3[\Omega(x - Z_1)]/2 + \alpha F_3[\Omega(x - Z_2)]/2\} \quad (a)$$

$$M_x = (8 P_1 / \Omega) \{F_3(\Omega x) W_1 + F_4(\Omega x) G_1 - F_2[\Omega(x - Z_1)]/8 - \alpha F_2[\Omega(x - Z_2)]/8\} \quad (b) \quad (46)$$

$$Q_x = (8 P_1) \{F_2(\Omega x) W_1 + F_3(\Omega x) G_1 - F_1[\Omega(x - Z_1)]/8 - \alpha F_1[\Omega(x - Z_2)]/8\} \quad (c)$$

Si se reemplaza  $x$  por  $Z_1$  y  $Z_2$ , respectivamente, se obtienen los valores de  $\theta_x$  y  $M_x$  correspondientes a los puntos  $Z_1$  y  $Z_2$ , valores que nos permiten deducir, tomando en cuenta las ecuaciones (11), los G.D.E.  $f^o_1$ ,  $f^o_2$  buscados, de los pilares con  $P_1$  y  $P_2$ , unidos a la cimentación elástica:

$$f^o_1 = \frac{1}{4 k_1} \quad (a)$$

$$1 + \frac{1}{K_s B U_1} \quad (46) - A$$

$$f^o_2 = \frac{1}{4 k_2} \quad (b)$$

$$1 + \frac{1}{K_s B U_2}$$

donde:

$$U_1 = \frac{F_3(\Omega Z_1) W_1 + F_4(\Omega Z_1) G_1}{\Omega^3 [F_1(\Omega Z_1) G_1 - 4 F_4(\Omega Z_1) W_1]} \quad (a)$$

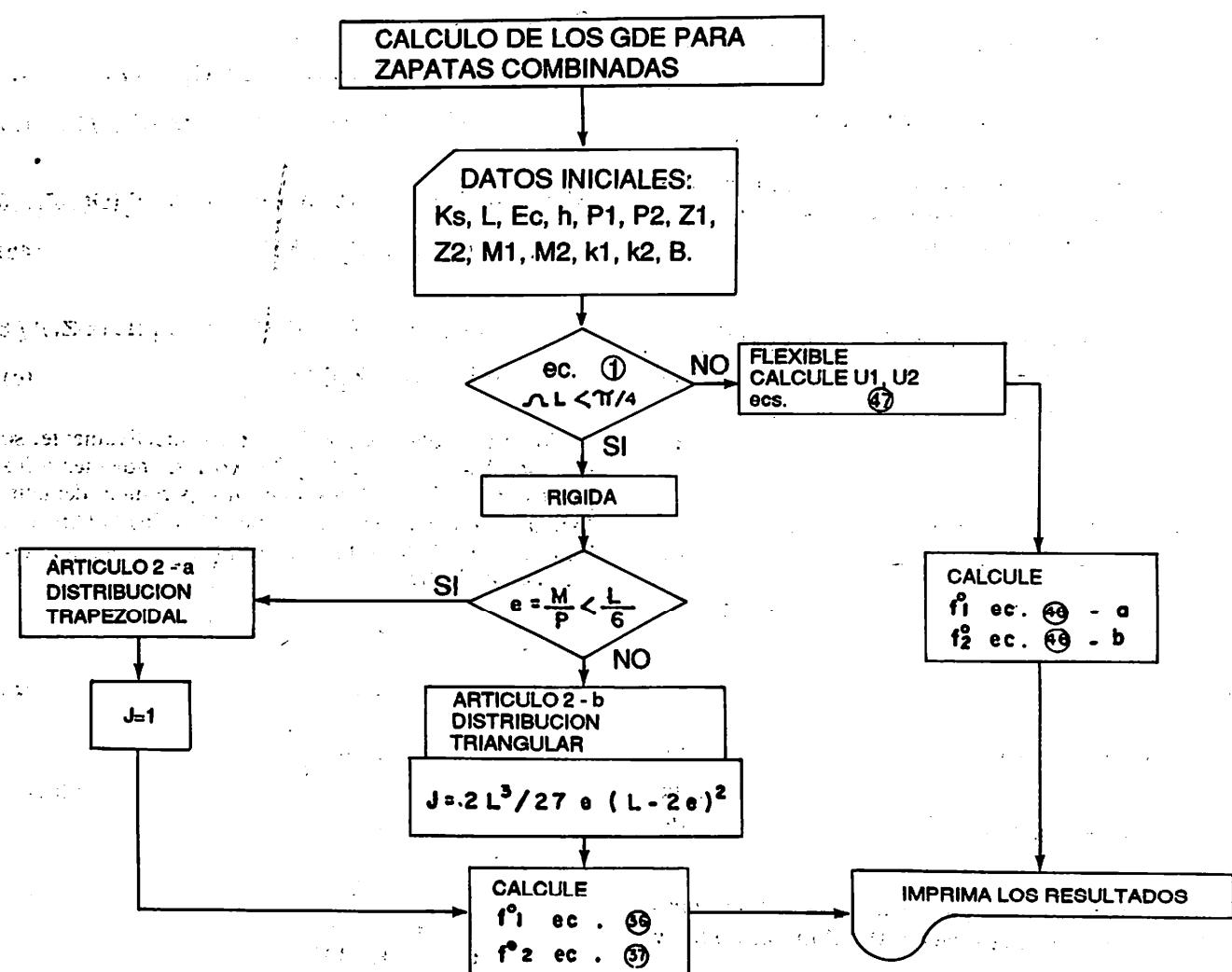
$$U_2 = \frac{F_3(\Omega Z_2) W_1 + F_4(\Omega Z_2) G_1 - F_2[\Omega(Z_2 - Z_1)]/8}{\Omega^3 [F_1(\Omega Z_2) G_1 - 4 F_4(\Omega Z_2) W_1 + F_3[\Omega(Z_2 - Z_1)]/2]} \quad (b)$$

$U_1$  y  $U_2$  son constantes dimensionales: ( $L^{-3}$ ), que relacionan a las funciones hipercirculares que caracterizan a la elástica y que forman parte de las expresiones (46), que nos dan los G.D.E. de los pilares unidos a una cimentación común, asentada en un suelo de módulo de balasto  $K_s$ .

#### ARTICULO 4) DIAGRAMA DE FLUJO. EJEMPLOS.

La sistematización de los casos estudiados en los artículos anteriores se puede efectuar según el siguiente diagrama de flujo:

Se ha escrito, entonces, un programa en BASIC y calculado algunos ejemplos, en los cuales se ha variado principalmente a  $h$ , espesor de la zapata, y a  $L$ , longitud de la misma, con el objeto de observar el efecto en los G.D.E. de los pilares  $P_1, P_2$ . Esto debido a que se puede deducir de la ecuación (1), que el parámetro  $\Omega L$ , que define la condición de cimentación FLEXIBLE, o cimentación RIGIDA, varía con estas dos magnitudes, ya que  $E_c$  y  $K_s$  son parámetros definidos de entrada en el diseño, por condiciones experimentales o de los materiales, no quedando sino  $h$  y  $L$  como magnitudes con las cuales el ingeniero pueda jugar libremente.



### 1. DISTRIBUCION TRAPEZOIDAL

$$K_s = 11000 \text{ t/m}^2 \cdot \text{m}$$

$$E_c = 2'526.713 \text{ t/m}^2 = 15100 \sqrt{\frac{t}{c}}$$

$P_1$ (t)	$M_1$ (t.m)	$k_1$ (t.m)	$Z_1$ (m)	$P_2$ (t)	$M_2$ (t.m)	$k_2$ (t.m)	$Z_2$ (m)
77,5	14,3	4386,7	1,0	85,7	12,5	9096,2	4,5

No.			CONDICION	$f_1^*$	$f_2^*$	CALIDAD	No.
1	$h = 0,5$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	FLEXIBLE	0,8108	0,1742	MALA
2			$B = 2,5$	FLEXIBLE	0,8427	0,2086	REGULAR
3		$B = 2,5$	$L = 5,0$	FLEXIBLE	0,8427	0,2086	REGULAR
4			$L = 6,0$	FLEXIBLE	0,8406	0,9944	BUENA
5	$h = 0,8$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	FLEXIBLE	0,8869	0,2655	REGULAR
6			$B = 2,5$	FLEXIBLE	0,9074	0,3112	REGULAR
7		$B = 2,5$	$L = 5,0$	FLEXIBLE	0,9074	0,3112	REGULAR
8			$L = 6,0$	FLEXIBLE	0,9003	0,9638	BUENA
9	$h = 1,0$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	FLEXIBLE	0,8052	0,3090	REGULAR
10			$B = 2,5$	FLEXIBLE	0,8379	0,3585	REGULAR
11		$B = 2,5$	$L = 5,0$	FLEXIBLE	0,8379	0,3585	REGULAR
12			$L = 6,0$	FLEXIBLE	0,9183	0,9502	BUENA
13	$h = 1,5$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	FLEXIBLE	0,7421	0,3605	REGULAR
14			$B = 2,5$	FLEXIBLE	0,7825	0,4133	REGULAR
15		$B = 2,5$	$L = 5,0$	FLEXIBLE	0,7825	0,4133	REGULAR
16			$L = 6,0$	FLEXIBLE	0,9350	0,9376	EXCELENTE
17	$h = 2,9$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	RIGIDA	0,8745	0,7460	BUENA
18			$B = 2,5$	RIGIDA	0,8970	0,7860	BUENA
19		$B = 2,5$	$L = 5,0$	RIGIDA	0,8970	0,7860	BUENA
20			$L = 6,0$	FLEXIBLE	0,9420	0,9324	EXCELENTE
21	$h = 3,6$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	RIGIDA	0,8745	0,7460	BUENA
22			$B = 2,5$	RIGIDA	0,8970	0,7860	BUENA
23		$B = 2,5$	$L = 5,0$	RIGIDA	0,8970	0,7860	BUENA
24			$L = 6,0$	RIGIDA	0,9377	0,8639	BUENA

### 2. DISTRIBUCION TRIANGULAR

$$K_s = 11000 \text{ t/m}^2 \cdot \text{n}$$

$$E_c = 2'526.713 \text{ t/m}^2 = 15100 \sqrt{\frac{t}{c}}$$

$P_1$ (t)	$M_1$ (t.m)	$k_1$ (t.m)	$Z_1$ (m)	$P_2$ (t)	$M_2$ (t.m)	$k_2$ (t.m)	$Z_2$ (m)
38,6	42,5	4386,7	1,0	85,0	102	9096,2	4,5

No.			CONDICION	$f_1^*$	$f_2^*$	CALIDAD	No.
1	$h = 0,5$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	FLEXIBLE	0,8269	0,1596	MALA
2			$B = 2,5$	FLEXIBLE	0,8566	0,1918	REGULAR
3		$B = 2,5$	$L = 5,0$	FLEXIBLE	0,8566	0,1918	REGULAR
4			$L = 6,0$	FLEXIBLE	0,9576	0,9144	EXCELENTE
5	$h = 0,8$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	FLEXIBLE	0,2613	0,2104	MALA
6			$B = 2,5$	FLEXIBLE	0,3066	0,2499	MALA
7		$B = 2,5$	$L = 5,0$	FLEXIBLE	0,3066	0,2499	MALA
8			$L = 6,0$	FLEXIBLE	0,8333	0,8986	BUENA
9	$h = 1,0$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	FLEXIBLE	0,1705	0,2295	MALA
10			$B = 2,5$	FLEXIBLE	0,2044	0,2713	MALA
11		$B = 2,5$	$L = 5,0$	FLEXIBLE	0,2044	0,2713	MALA
12			$L = 6,0$	FLEXIBLE	0,8110	0,8961	BUENA
13	$h = 1,5$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	FLEXIBLE	0,1036	0,2490	MALA
14			$B = 2,5$	FLEXIBLE	0,1263	0,2930	MALA
15		$B = 2,5$	$L = 5,0$	FLEXIBLE	0,1263	0,2930	MALA
16			$L = 6,0$	FLEXIBLE	0,7940	0,8943	BUENA
17	$h = 2,9$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	RIGIDA	0,7746	0,7991	BUENA
18			$B = 2,5$	RIGIDA	0,8112	0,8325	BUENA
19		$B = 2,5$	$L = 5,0$	RIGIDA	0,8112	0,8325	BUENA
20			$L = 6,0$	FLEXIBLE	0,7877	0,8936	BUENA
21	$h = 3,6$	$L = 5,0$	$B = 2,0$	RIGIDA	0,7746	0,7991	BUENA
22			$B = 2,5$	RIGIDA	0,8112	0,8325	BUENA
23		$B = 2,5$	$L = 5,0$	RIGIDA	0,8112	0,8325	BUENA
24			$L = 6,0$	RIGIDA	0,8905	0,9039	BUENA

#### 4-a) ANALISIS DE LOS RESULTADOS, Y CONCLUSIONES

En la referencia (2) se demuestra la gran incidencia que tiene el G.D.E. que las cimentaciones confieren a las estructuras, en el buen comportamiento y en la economía estructural. Mientras mayor sea el G.D.E., en general, mejor es el comportamiento y más económica resulta la estructura. Por esto se ha incluido, en las tablas de resultados, una columna que da la calidad de la cimentación, tomando como medida, los G.D.E.:  $f_1^o$ ,  $f_2^o$ , de los pilares. Es obvio, que además, debe también tomarse como valor de comparación, el volumen de la cimentación, medido en este caso, de áreas muy semejantes, por su espesor  $h$ . Desde este punto de vista, resulta, inmediatamente, que las cimentaciones con distribución trapezoidal son, en general, más eficaces que las que tienen distribución triangular.

Se puede, igualmente observar como el aumento del espesor hace también, en general, al hacer más masiva a la fundación, aumentar a los G.D.E., en el caso de la distribución triangular esto no se hace tan evidente, casos de las fundaciones Nos. 2, 3, 4.

La conclusión más importante que se puede extraer de estos resultados, la constituye el hecho de que la mayor parte de las fundaciones combinadas que el ingeniero diseña son de tipo FLEXIBLE, y no de tipo RIGIDO, como se podría creer a primera vista. Para ser de tipo RIGIDO se necesitarían espesores muy considerables, en estos casos, de más de 2,9 m de espesor, lo cual a todas luces las hace antieconómicas, o simplemente impracticables. Así pues, el ingeniero siempre debe diseñar a las zapatas combinadas como flexibles, para lo

cual, la teoría expuesta, no sólo le suministra la forma de calcular los G.D.E., ecuaciones (46) y 46-A sino de calcular los momentos y las cortantes:  $M_x$  y  $Q_x$ , ecuaciones (44)-b-c, (45)-b-c y 46-b-c. En este caso se está considerando a las cimentaciones cuyo  $\Omega L \geq \pi/4$  como flexibles, despreciando la diferencia dada en la hipótesis 2<sup>a</sup>:  $\pi/4 \leq \Omega L < \pi$  son vigas semiflexibles. Realmente la diferencia concierne a la transmisibilidad de los esfuerzos de frontera a lo largo de la cimentación <sup>3</sup>, más que a cualesquiera otras consideraciones. Por lo tanto la diferencia entre elementos semiflexibles y flexibles es difícil realmente de establecer para las cimentaciones de longitud finita, las cuales se pueden tomar todas como semi-rígidas. El caso de las cimentaciones aisladas cuyas longitudes son más cortas, relativamente a sus espesores, que las longitudes de las combinadas, hace que en estos casos, en la práctica, el límite de  $\Omega L$  esté muy cerca al límite inferior  $\pi/4$  o ligeramente por encima. Por lo tanto es práctico y suficientemente exacto, diseñar a las cimentaciones aisladas como rígidas, y a las combinadas como flexibles.

#### REFERENCIAS

1. G. GARCIA-MORENO. "Determinación del grado de empotramiento conferido por distintos tipos de cimentaciones en las estructuras". Dyna N° 106, Sept. 1985.
2. G. GARCIA-MORENO. "Aplicaciones y sistematización del grado de empotramiento". G. García-Moreno. Calle 35A, N° 65D-22, Medellín. Teléfono: 235 04 23, Medellín, 1989.
3. M. HETENYI. "Beams on Elastic Foundations". Ann Arbor, Michigan, University of Michigan Press, 1946.