Cuadrículas Planas

Por: Gabriel Poveda Ramos

0. Las cuadrículas o redes ortogonales planas y las cuadrículas ortogonales espaciales son objetos geométricos bastante familiares en la Geometría elemental y en el Análisis. Se usan extensamente en Cartografía y en Nomografía. Se emplean también para definir el integral definido de Riemann en dos dimensiones (o integral doble) y en tres dimensiones (o integral triple). Pese a esto, no es común encontrar en la literatura elemental corriente sobre Geometría, ni sobre Análisis, un estudio más o menos sistemático y cuidadoso sobre cuadrículas planas ni sobre cuadrículas (o redes) tridimensionales. En este artículo se desea aportar algunas ideas sencillas al estudio del tema.

1. Una cuadrícula plana es un par de familias, A, B, de rectas paralelas (o de segmentos de rectas), situadas en un mismo plano, con las siguientes condiciones (Ver Figura 1):

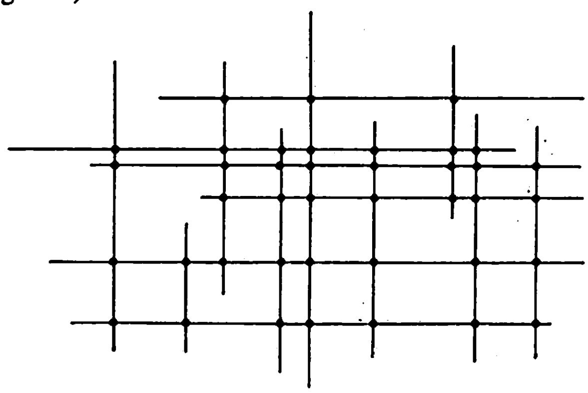

FIGURA 1. Una cuadrícula plana finita.

a.) Tanto A como B son **discretas.** Es decir que cualquier porción finita de plano que contenga rectas de A o de B, solamente las tiene en número finito.

b.) Cada recta de A es perpendicular a las rectas de B y viceversa.

c.) Cada recta de A corta dos o más rectas de B y viceversa, a distancia finita.

d.) Hay al menos un par de rectas de A que cortan a algún par de rectas de B y viceversa.

El número de rectas de A puede ser finito o infinito (numerable). Lo mismo puede ocurrir con el número de rectas de B. En cuanto a la longitud de las rectas puede darse los siguientes casos:

1. Todas las rectas de A y todas las de B son infinitas en longitud. Se dice en este caso que la cuadrícula es doblemente infinita.

2. Todas las rectas de A son infinitas y algunas de B son finitas, o viceversa.

3. Todas las rectas de A son infinitas y todas las rectas de B son finitas, o viceversa.

4. Algunas rectas de A y algunas rectas de B son finitas, pero las demás son infinitas, o viceversa.

5. Todas las rectas de A son finitas y algunas de B son finitas, o viceversa.

6. Todas las rectas de A y todas las de B son finitas o viceversa. En esta situación puede darse dos casos:

   6.a.) Que ningún círculo del plano contenga en su interior a ambas familias A, B; y

   6.b.) Que algún círculo del plano contenga ambas familias A, B. En este caso diremos que la cuadrícula es **finita.**

2. Una recta de A que se corta (normalmente) con una recta de B determinan, juntas, un **nodo.** Decimos que dos nodos son contiguos cuando pertenecen a una misma recta y entre ellos no se interpone ningún otro nodo. Si A tiene número finito de rectas y la familia B también, el número de nodos es finito. En ese caso el número de pares de nodos contiguos es también finito.

Cada par de nodos contiguos determinan un trozo de recta que llamaremos **una cuerda.** Hay tantas cuerdas cuantas parejas de nodos contiguos haya.

Dada una recta r llamaremos su vecina (a cada lado) a la recta que sea paralela a r y que sea la más cercana (por ese lado). Cada par de rectas vecinas de la familia A cortará una recta de B en dos nodos contiguos. Además, cada par de rectas vecinas de A que cortan a un par de rectas vecinas de B determinan, en conjunto, un rectángulo o celda elemental. Cada celda está formada por cuatro cuerdas.

Una sucesión finita de cuerdas consecutivas forman un **camino** en la cuadrícula. Cada camino tiene dos nodos extremos.

En una cuadrícula finita hay un número finito de cuerdas. El máximo de las longitudes de esas cuerdas se le llama **calibre máximo** de la cuadrícula. Al mínimo de esas longitudes se le llama **calibre mínimo.** Si en una cuadrícula coinciden el calibre máximo y el calibre mínimo, se dice que esa cuadrícula tiene calibre uniforme, o bien que es una cuadrícula isométrica.

3. En lo que sigue de esta nota vamos a hablar de cuadrículas de calibre uniforme que tengan además 3 condiciones:

a) Cada recta de la familia A comienza en un nodo de la cuadrícula y termina en otro nodo distinto. Lo mismo ocurre con cada recta de la familia B.

b) Entre dos nodos cualesquiera hay al menos un camino en la cuadrícula.

c) Entre dos nodos cualesquiera hay al menos dos caminos que no pasan por un mismo segmento ni por un mismo nodo. Decimos que se trata de dos caminos sin superposiciones.

Una cuadrícula como ésta se llamará "simplemente conexa", de calibre uniforme. Un ejemplo de esta clase de cuadrícula se muestra en la Figura 2. Se dice también que se trata de una **red.** En lo que sigue, al referirnos a "una red" se subentiende que se trata de una cuadrícula isométrica y simplemente conexa.

Un momento de reflexión basta para darse cuenta de que una red conexa puede construirse partiendo de cualquiera de sus rectángulos (que son cuadrados) yuxtaponiéndole un número conveniente de otros cuadrados en las cuatro direcciones, en la disposición que sea apropiada.

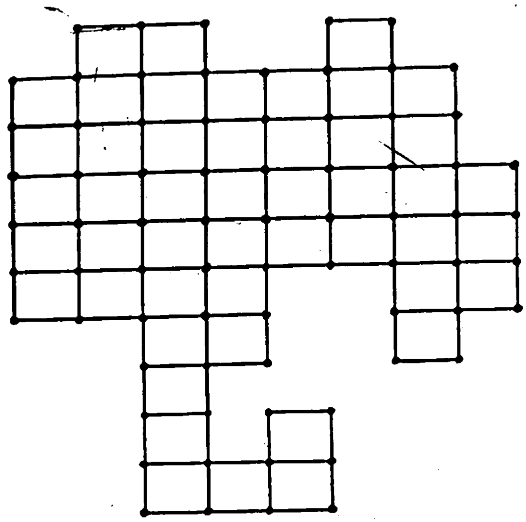

FIGURA 2. Una cuadricula de calibre uniforme, simplemente conexa (UNA RED)

Toda red conexa tiene un borde exterior que es una poligonal simple, cerrada, sin puntos dobles ni múltiples. La red conexa más sencilla consiste en un simple cuadrado, con una celda elemental y 4 nodos.

4. Un momento de reflexión imaginativa permite darse cuenta de que en un nodo pueden incidir dos cuerdas, siendo una de ellas perpendicular a la otra. En este caso el nodo pertenece a una sola celda. Otro nodo puede recibir tres cuerdas incidentes, de las cuales dos son colineales y la tercera es perpendicular a las dos primeras. En este caso el nodo en cuestión pertenece a dos celdas vecinas. En fin, otro nodo diferente puede recibir cuatro cuerdas incidentes en él, de las cuales dos son colineales y las otras dos son perpendiculares a los dos primeros y colineales entre sí. Un nodo como ese puede pertenecer a tres celdas, en unos casos, o puede pertenecer a cuatro celdas, en otros casos.

Cada cuerda incide en dos nodos, que forman sus extremos. Las cuerdas que están sobre el borde exterior de una cuadrícula, pertenecen a una sola celda. En cambio las cuerdas que van por el interior de la cuadrícula pertenecen, cada una, a dos celdas que yacen a lado y lado de la cuerda.

En cuanto a las celdas, cada una de ellas contiene 4 cuerdas que forman sus lados, 4 nodos que forman sus vértices, y 4 ángulos rectos que forman sus esquinas.

5. Sean:

N = Número de celdas elementales de una red conexa.

N_1 = Número de nodos que pertenecen a 1 sola celda (o nodos tipo 1, o nodo convexo).

N_2 = Número de nodos que pertenecen a 2 celdas (o nodos tipo 2 o nodo plano).

N_3 = Número de nodos que pertenecen a 3 celdas (o nodos tipo 3 o nodo cóncavo).

N_4 = Número de nodos que pertenecen a 4 celdas (o nodos tipo 4 o nodo interior).

S_1 = Número de segmentos que pertenecen a 1 solo rectángulo (segmentos exteriores).

S_2 = Número de segmentos que pertenecen a 2 rectángulos (segmentos interiores).

Cada celda tiene 4 ángulos rectos, luego en toda la red hay 4N ángulos rectos. A un nodo tipo 1 le corresponde 1 ángulo recto. A un nodo tipo 2 le corresponden 2 rectos; y así sucesivamente. De aquí se deduce que

$$N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 = 4N \qquad (5.1)$$

que es una de las ecuaciones fundamentales de una red. Más abajo hablaremos de redes múltiplemente conexas, y en ellas también vale la ecuación indicada en (5.1).

6. Es importante examinar qué le ocurre a $N, N_1, \ldots, S_1, S_2$ cuando a una red conexa se le yuxtapone una celda adicional y sigue siendo conexa. Esto depende de la forma geométrica del borde exterior de la red en el sitio donde se agregue la nueva celda. Hay 9 casos que se ilustran en las figuras 3.1, 3.2, ... , hasta 3.9. En las 9 figuras la celda adicional aparece marcada con una cruz "x".

Caso 1 (Fig. 3.1). En este caso se presenta lo siguiente:

$$\Delta N = 1 \quad \Delta N_1 = 0 \quad \Delta N_2 = 2 \quad \Delta N_3 = 0 \quad \Delta N_4 = 0$$
$$\Delta S_1 = 2 \qquad \Delta S_2 = 1$$

Caso 2 (Fig. 3.2). En este caso se presenta lo siguiente:

$$\Delta N = 1 \quad \Delta N_1 = 1 \quad \Delta N_2 = 0 \quad \Delta N_3 = 1 \quad \Delta N_4 = 0$$
$$\Delta S_1 = 2 \qquad \Delta S_2 = 1$$

Caso 3 (Fig. 3.3). En este caso sucede lo siguiente:

$$\Delta N = 1 \quad \Delta N_1 = 2 \quad \Delta N_2 = -2 \quad \Delta N_3 = 2 \quad \Delta N_4 = 0$$
$$\Delta S_1 = 2 \qquad \Delta S_2 = 1$$

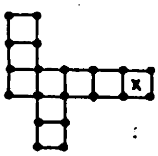

FIG. 3.1

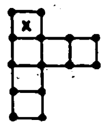

FIG. 3.2

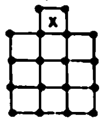

FIG. 3.3

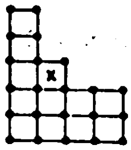

FIG. 3.4

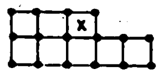

FIG. 3.5

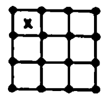

FIG. 3.6

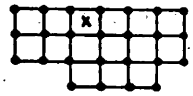

FIG. 3.7

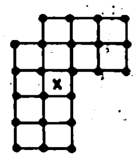

FIG. 3.8

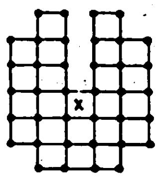

FIG. 3.9

FIGURA 3

Caso 4 (Fig. 3.4). En este caso sucede lo siguiente:

$$\Delta N = 1 \quad \Delta N_1 = 1 \quad \Delta N_2 = -2 \quad \Delta N_3 = 1 \quad \Delta N_4 = 1$$
$$\Delta S_1 = 0 \qquad \Delta S_2 = 2$$

Caso 5 (Fig. 3.5). En este caso sucede lo siguiente:

$$\Delta N = 1 \quad \Delta N_1 = 0 \quad \Delta N_2 = 0 \quad \Delta N_3 = 0 \quad \Delta N_4 = 1$$
$$\Delta S_1 = 0 \qquad \Delta S_2 = 2$$

Caso 6 (Fig. 3.6). En este caso sucede lo siguiente:

$$\Delta N = 1 \quad \Delta N_1 = -1 \quad \Delta N_2 = 2 \quad \Delta N_3 = -1 \quad \Delta N_4 = 1$$
$$\Delta S_1 = 0 \qquad \Delta S_2 = 2$$

Caso 7 (Fig. 3.7). En este caso sucede lo siguiente:

$$\Delta N = 1 \quad \Delta N_1 = -2 \quad \Delta N_2 = 2 \quad \Delta N_3 = -2 \quad \Delta N_4 = 2$$
$$\Delta S_1 = -2 \qquad \Delta S_2 = 3$$

Caso 8 (Fig. 3.8). En este caso sucede lo siguiente:

$$\Delta N = 1 \quad \Delta N_1 = -1 \quad \Delta N_2 = 0 \quad \Delta N_3 = -1 \quad \Delta N_4 = 2$$

$$\Delta S_1 = -2 \qquad \Delta S_2 = 3$$

Caso 9 (Fig. 3.9). En este caso sucede lo siguiente:

$$\Delta N = 1 \quad \Delta N_1 = 0 \quad \Delta N_2 = -2 \quad \Delta N_3 = 0 \quad \Delta N_4 = 2$$

$$\Delta S_1 = -2 \qquad \Delta S_2 = 3$$

7. Ya se dijo que toda red puede construirse yuxtaponiendo sucesivamente sus celdas elementales, partiendo de una cualquiera de ellas. Combinando este hecho con el estudio de los 9 casos mencionados podemos deducir algunas observaciones elementales.

Obs. 1.- En toda red conexa se tiene, $N_1 > 4$, porque para $N = 1$ se tiene $N_1 = 4$ y para todos los nueve casos de $\Delta N = 1$ sucede que $\Delta N_1 = -1$ o $\Delta N_1 = -2$ sólo en aquellos tres casos en que ya era $N_1 = 5$ o $N_1 = 6$. Esto significa que cada red tiene al menos 4 esquinas angulares convexas, lo cual es casi obvio.

Obs. 2.- Excepto en el caso de una simple celda unitaria -en que $N = 1$ y $N_2 = 0$- en toda otra red se tiene $N_2 > 2$.

Obs. 3.- En toda red que tenga siquiera 1 nodo interno (es decir $N_4 > 1$) el número N_2 de nodos tipo 2 (o nodos planos) será $N_2 > 4$.

Obs. 4.- En toda red que tenga siquiera 1 nodo tipo 3 (o nodo cóncavo), es decir cuando $N_3 > 1$ se tendrá $N_2 > 2$.

Obs. 5.- Examinando los 9 casos citados se observa que $\Delta N_1 + \Delta N_3$ es un número par. Además, para $N = 1$ se tiene que $N_1 + N_3 = 4$. Luego para toda red se tiene que $N_1 + N_3$ es un número par.

Obs. 6.- El número $N_1 + 3N_3$ es par porque

$$N_1 + 3N_3 = (N_1 + N_3) + 2N_3$$

y ya vimos que el lado derecho es un número par.

Obs. 7.- Cuando a una red se le yuxtaponga ($\Delta N = 1$) o se le desprenda ($\Delta N = -1$) una celda elemental, el número de nodos cambia según la ecuación.

$$\Delta N_1 + 2\,\Delta N_2 + 3\,\Delta N_3 + 4\,\Delta N_4 = 4\,\Delta N$$

que sale de inmediato de la ecuación (5.1). Estudiando cada uno de los 9 casos de yuxtaposición que se analizan arriba se puede comprobar que esta igualdad se cumple efectivamente en todos los casos.

8. El número N de celdas unitarias contiene 4N costados de celdas, que sean interiores a la red. Al número S_1 de segmentos del borde le corresponden S_1 de esos costados; y al número S_2 de segmentos internos le corresponden $2S_2$ costados. Luego

$$S_1 + 2S_2 = 4N \tag{8.1}$$

Además, recorriendo el perímetro o borde exterior de la red en el sentido contrario al reloj, podemos establecer que

$$S_1 = N_1 + N_2 + N_3 \tag{8.2}$$

Por otra parte: cada cuerda interna tiene dos terminales internas; las S_2 cuerdas internas contienen $2S_2$. Cada nodo interior (tipo 4) es apoyo de 4 terminales de cuerdas internas. Cada nodo cóncavo (tipo 3) es apoyo de 2 terminaciones. Y cada nodo plano (tipo 2) es apoyo de una terminación. Por lo tanto

$$2S_2 = 4N_4 + 2N_3 + N_2 \tag{8.3}$$

Combinando las tres ecuaciones (8.1), (8.2) y (8.3), se vuelve a obtener la ecuación (5.1).

9. Obs. 9.- En los nueve casos de yuxtaposición (Ver Fig. 3) se puede comprobar que $\Delta N_1 = \Delta N_3$. Además en el caso $N = 1$, o sea la celda unitaria, se tiene $N_1 = 4$ y $N_3 = 0$. Por lo tanto para cualquier N, o sea para toda red se tiene

$$N_1 = N_3 + 4 \tag{9.1}$$

Obs. 10.- Combinando las ecuaciones (5.1) y (9.1) se encuentra que

$$2N_2 = 4\,(N - N_4 - N_1) + 12$$

El lado derecho es múltiple de 4, luego N_2 es cero o un número par.

Obs. 11.- Puesto que $N_2 > 0$, la ecuación anterior dice que en toda red se tiene que

$$N > N_1 + N_4 - 3$$

Obs. 12.- También de la ecuación (5.1) se obtiene que

$$N_1 + 2N_2 + 3N_3 = 4(N - N_4)$$

es decir que el número $N_1 + 2N_2 + 3N_3$ es divisible por 4 en toda red.

Obs. 13.- Una red que no tenga nodos tipo 3 (o nodos cóncavos) se llama red convexa. En ese caso se tiene $N_3 = 0$ y resulta que $N_1 = 4$, y por la ecuación (5.1) se deduce que

$$N_2 + 2N_4 = 4(N - 1)$$

Es decir, que el número $N_2 + 2N_4$ es divisible por 4.

Obs. 14.- En una red sin nodos interiores ($N_4 = 0$) el número de cuerdas interiores es

$$S_2 = N_3 + N_2/2 = N_2/2 + N_1 - 4$$

según las ecuaciones 8.3 y 9.1

Obs. 15.- El número de nodos convexos N_1 debe ser siempre

$$N_1 > 4$$

por la ecuación (9.1) y puesto que $N_3 \geqslant 0$.

Obs. 16.- La longitud del perímetro de la red es

$$N_1 + N_2 + N_3 = 2N_1 + N_2 - 4 = N_2 + 2N_3 + 4$$

que es un número par, en toda red, porque N_2 es número par.

Obs. 17.- En toda red el número N de celdas unitarias es mayor que el número N_4 de nodos interiores

$$N_1 > N_4$$

En efecto las ecuaciones 5.1 y 9.1 dan la igualdad

$$4N_1 + 2N_2 - 12 = 4(N - N_4)$$

pero $N_1 \geqslant 4$ luego $4N_1 - 12 \geqslant 4$ y también $4N_1 - 12 + 2N_2 \geqslant 4$ (porque $N_2 \geqslant 0$).

Por lo tanto, según la ecuación anterior resulta $4(N - N_4) \geqslant 4$ y $N \geqslant N_4 + 1$.

10. Si subdividimos la red original partiendo en dos partes iguales cada segmento y partiendo en cuatro partes iguales cada celda unitaria original, obtenemos una nueva red cuyo calibre es la mitad del calibre anterior. La nueva red tiene más nodos, más cuerdas y más celdas que la original. Llamemos

N_1'' = Número de nodos tipo 1 en la nueva red.

N_2'' = Número de nodos tipo 2 en la nueva red, etc.

S_1'' = Número de cuerdas exteriores de la nueva red.

S_2'' = Número de cuerdas interiores de la nueva red

N'' = Número de celdas de la nueva red

Es fácil darse cuenta que, con relación a la red original, se tiene

$$N_1'' = N_1$$

$$N_2'' = N_2 + S_1$$

$$N_3'' = N_3$$

$$N_4'' = N_4 + N$$

$$S_1'' = 2S_1$$

$$S_2'' = 2S_2 + 4N$$

$$N'' = 4N$$

Es fácil comprobar que para todas estas expresiones también se cumplen las ecuaciones y las desigualdades deducidas más arriba para la red original.

11. Si subdividimos la red original partiendo cada segmento en n partes iguales, y partiendo cada celda en n^2 celdas iguales resulta una nueva red, más fina que la primera. El número de sus elementos será

$$N_1^{(n)} = N_1$$

$$N_2^{(n)} = N_2 + (n-1)\ S_1$$

$$N_3^{(n)} = N_3$$

$$N_4^{(n)} = N_4 + (n-1)^2 N$$

$$S_1^{(n)} = nS_1$$

$$S_2^{(n)} = nS_2 + (n-1)\ n \times 2N$$

$$N^{(n)} = n^2 N$$

A título de ejemplo mostramos cómo se cumple la ecuación (8.1). Formemos el lado izquierdo

$$S_1^{(n)} + 2S_2^{(n)} = nS_1 + 2nS_2 + (n-1)\,n \times 4N$$

$$= n\,(S_1 + 2S_2) + 4n\ (n-1)\,N$$

$$= 4nN + 4n^2N - 4nN = 4n^2N$$

y el lado derecho de la ecuación 8.1 será, para esta nueva red:

$$4N^{(n)} = 4n^2N$$

y, comparando los dos resultados anteriores obtenemos la igualdad

$$S_1^{(n)} + 2S_2^{(n)} = 4N^{(n)}$$

que es la igualdad (8.1) en la nueva red.

12. El número N_4 de nodos interiores de una red establece una cota inferior máxima para el número $N_1 + N_2 + N_3$ de nodos perimetrales. En la celda unitaria simple, donde $N = 1$, se tiene $N_4 = 0$ y $N_1 + N_2 + N_3 = 4$. Y en cualquier red que tenga $N_4 = 0$ se puede comprobar gráficamente que $N_1 + N_2 + N_3 > 4$. (Ver Fig. 4.0).

En una red cualquiera que tenga un solo nodo interior ($N_4 = 1$) puede verificarse gráficamente que se tiene $N_1 + N_2 + N_3 > 8$. (Ver Fig. 4.1).

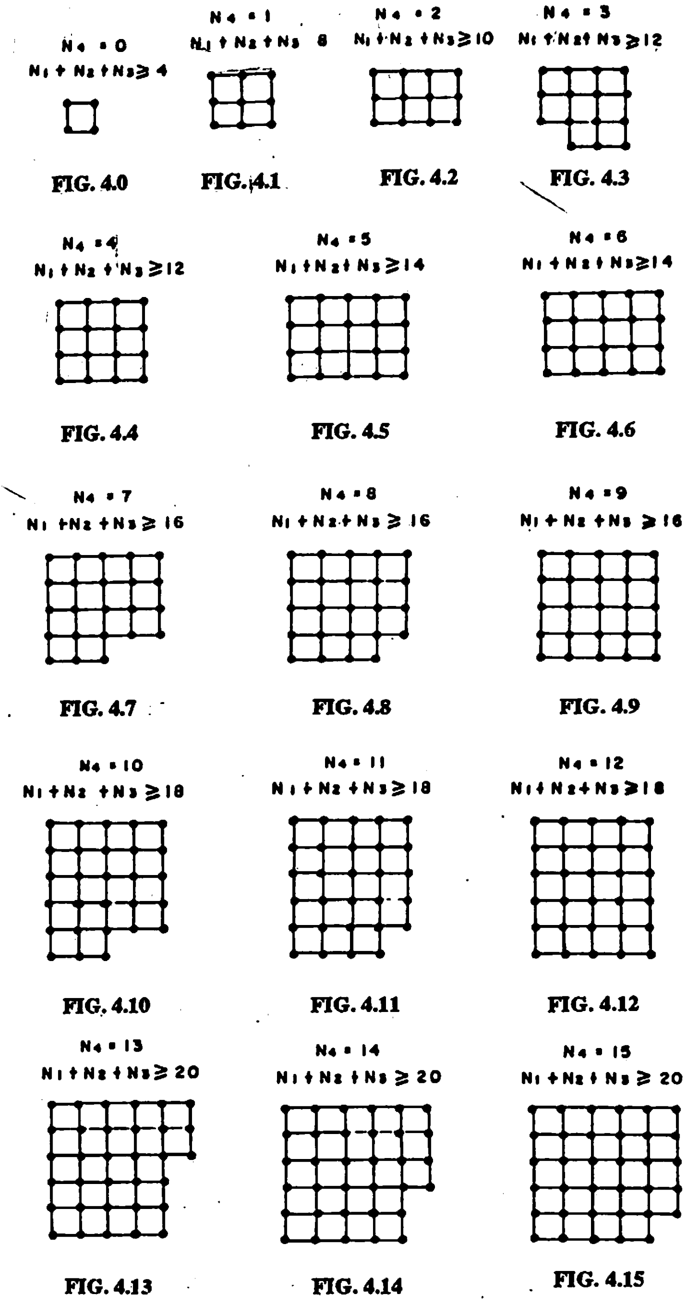

FIGURA 4

Este procedimiento de representaciones gráficas, que se ven en la Fig. 4 nos muestra que

Si $N_4 = 2$, entonces $N_1 + N_2 + N_3 > 10$

$N_4 = 3$, $N_1 + N_2 + N_3 > 12$

$N_4 = 4$, $N_1 + N_2 + N_3 > 12$

$N_4 = 5$, $N_1 + N_2 + N_3 > 14$

$N_4 = 6$, $N_1 + N_2 + N_3 > 14$

.

.

.

En general, se puede ver en la Fig. 4, que se cumple la siguiente tabla de acotaciones para $N_1 + N_2 + N_3$:

$N_4 =$	$N_1 + N_2 + N_3 >$
.	.
.	.
.	.
$K^2 - 1$	$4K + 4$
K^2	$4K + 4$
$K^2 + 1$	$4K + 6$
$K^2 + 2$	$4K + 6$
.	.
.	.
.	.
$K^2 + K - 1$	$4K + 6$
$K(K+1)$	$4K + 6$
$K^2 + K + 1$	$4K + 8$
.	.
.	.
.	.
$(K+1)^2 - 1$	$4K + 8$
$(K+1)^2$	$4K + 8$
$(K+1)^2 + 1$	$4K + 10$
$(K+1)^2 + 2$	$4K + 10$
.	.
.	.
.	.

En esta forma, al hacer recorrer a N_4 todos los valores entre K^2 y $(K+1)^2$ para todos los números $K=1,2,3, \ldots\ldots$, hacemos recorrer a N_4 toda la sucesión de los números naturales. Aplicando la tabla anterior podemos hallar la máxima cota inferior correspondiente a $N_1 + N_2 + N_3$.

13. El número N de celdas unitarias es igual al área de la red cuadricular isométrica, tomando el área de cada celda como unidad. Pues bien, el número de nodos interiores, N_4, obliga a una cota inferior al número N.

En la Fig. 3.1 puede verse que en una red que carece de nodos interiores ($N_4 = 0$) podemos poner siempre $N > 1$. En una red con 1 solo nodo interior ($N_4 = 1$) se tiene forzosamente que $N > 4$ (Ver Fig. 4.1). Y así mismo podemos continuar para construir la siguiente tabla de acotaciones:

$N_4 =$	$N_1 + N_2 + N_3 >$
0	1
1	4
2	6
3	8
4	9
5	11
6	12
7	14
8	15
9	16
10	18
11	19
12	20
13	22
14	23
.	.
.	.
.	.

En general, entre dos cuadrados sucesivos, K^2 y $(K + 1)^2$, los valores de N_4 determinan las siguientes acotaciones para $K > 1$:

$N_4 =$	$N_1 + N_2 + N_3 >$
.	.
.	.
K^2	$(K+1)^2$
$K^2 + 1$	$(K+1)^2 + 2$
$K^2 + 2$	$(K+1)^2 + 3$
$K^2 + 3$	$(K+1)^2 + 4$
.	.
.	.
.	.
.	.
$K^2 + K - 1$	$(K+1)(K+2) - 1$
$K(K+1)$	$(K+1)(K+2)$
$K^2 + K + 1$	$(K+1)(K+2) + 2$
$K^2 + K + 2$	$(K+1)(K+2) + 3$
.	.
.	.
.	.
.	.
$(K + 1)^2 - 1$	$(K+2)^2 - 1$
$(K + 1)^2$	$(K+2)^2$
$(K + 1)^2 + 1$	$(K+2)^2 + 2$
.	.
.	.
.	.

14. Obs. 18.- Si se agrega, o se le desprende una celda elemental a una red, el aumento de sus cuerdas exteriores, ΔS_1, y el aumento de sus cuerdas interiores, ΔS_2, están ligados por la relación

$$\Delta S_1 + 2 . \Delta S_2 = 4 . \Delta N$$

que se deduce de la ecuación (8.1).

Obs. 19.- Combinando las ecuaciones (5.1), (8.1) y (9.1) se deduce

$$4N_1 + 2N_2 + 4N_4 - 12 = S_1 + 2S_2$$

o sea

$$S_1 = 4 (N_1 + N_4) + 2 (N_2 - S_2)$$

de donde se sigue que el número S_1 de cuerdas exteriores es un número par en toda red.

15. La ecuación (5.1) se ha deducido haciendo un "balance" de ángulos rectos a través de toda la red. Para establecer otros balances es necesario señalar las siguientes observaciones:

- En un nodo tipo 1, que pertenece a una celda elemental, inciden:

  1 ángulo recto de la red
  2 extremos de cuerdas exteriores, o de tipo 1

- En un nodo tipo 2 inciden:

  2 ángulos planos rectos
  2 extremos de cuerdas tipo 1
  1 extremo de cuerda tipo 2

- En un nodo tipo 3 inciden:

  3 ángulos rectos
  2 extremos de cuerdas tipo 1
  2 extremos de cuerdas tipo 2

- En un nodo tipo 4 inciden:

  4 ángulos rectos
  4 extremos de cuerdas tipo 2

- Sobre un segmento tipo 1 se apoya un borde de una celda elemental.

- Sobre un segmento tipo 2 se apoyan dos bordes de celdas elementales.

16. Un balance de extremos de cuerdas tipo 1 da la ecuación

$$2N_1 + 2N_2 + 2N_3 = 2S_1 \tag{16.1}$$

Un balance de extremos de cuerdas tipo 2 da la ecuación

$$N_2 + 2N_3 + 4N_4 = 2S_1 \tag{16.2}$$

Un balance de bordes de celdas da la ecuación

$$S_1 + 2S_2 = 4N \tag{16.5}$$

Esta última ecuación también puede deducirse combinando las ecuaciones (5.1), (16.1) y (16.2).

17. Observando los 9 casos de la Fig. 3 puede observarse que ΔS_1 y ΔS_2, pueden tomar como valores los números 1, 2 ó 3, según el caso. Esto significa que S_1 y S_2 pueden ser números pares o impares, según la cuadrícula específica que se estudie.

18. Llamamos una cuadrícula doblemente conexa a una que, como la de la Fig. 5, presenta interrupciones que, en su conjunto, forman un polígono rectangular totalmente interior a la red original.

En una red de este tipo siguen siendo válidas las ecuaciones (5.1), (16.1), (16.2), (16.3) y todas las que se desprendan de ellas. En cambio, no es válida la ecuación (9.1). La relación entre N_1 y N_3 en este caso se deduce de la siguiente consideración.

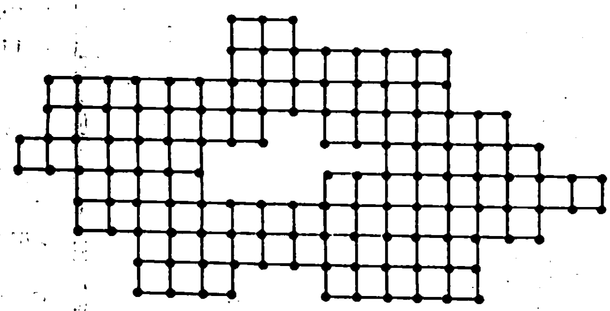

FIGURA 5

Sean

N_1^* : número de nodos tipo 1 que tendría la red principal, simplemente conexa, si no tuviera la región "hueca".

N_2^* : número de nodos tipo 2 de la misma red.

N_3^* : número de nodos tipo 3 de la misma red.

n_1 : número de nodos tipo 1 de la región "hueca"

n_2 : número de nodos tipo 2 de la región "hueca"

n_3 : número de nodos tipo 3 de la región "hueca"

Ya sabemos que

$$N_1^* = N_3^* + 4$$

y que

$$n_1 = n_3 + 4$$

Pero cada nodo tipo 1 de la región "hueca" es un nodo tipo 3 de la red doblemente conexa. Cada vértice tipo 3 de la región "hueca" es un vértice tipo 1 de la red doblemente conexa. Cada vértice tipo 2 de la región "hueca" es un vértice tipo 2 de la red doblemente conexa. Entonces, en la red doblemente conexa tenemos

$$N_1 = N_1^* + n_3 \qquad (18.1.A)$$

$$N_2 = N_2^* + n_2 \qquad (18.1.B)$$

$$N_3 = N_3^* + n_1 \qquad (18.1.C)$$

Además

$$N_1^* = N_3^* + 4 \qquad (18.2.A)$$

$$N_1 = n_3 + 4 \qquad (18.2.B)$$

Sumando la ecuación (18.2.A) y la ecuación (18.2.B) obtenemos

$$N_1^* + n_3 = N_3^* + n_1$$

o sea

$$N_1 = N_3$$

para la red doblemente conexa

19. Si hay dos "huecos" la red, ella es triplemente conexa y en ella se tendrá

$$N_1 = N_3 - 4$$

Si hay m "huecos" la red sera (m+1) - plenamente conexa, y en ella se tendrá

$$N_1 = N_3 - 4 \,(m - 1)$$