# Una Fórmula de Leibnitz para Diferencias Finitas

*Por: Gabriel Poveda Ramos*

En los cursos de Cálculo o de Análisis Matemático, inclusive en los de nivel elemental es usual que se explique y que se demuestre una identidad que suele atribuirse a Leibnitz y que se refiere a las derivadas sucesivas de un producto de dos funciones de una variable real. Según dicha identidad, la derivada de orden n (n = 0, 1, 2, ...) de un producto u (x) .v(x) de dos funciones de la variable x, en la parte de sus dominios donde ambas coexistan y donde ambas sean derivables hasta el orden n, dicha derivada puede escribirse en la forma

$$D^n [u.\, v] = \sum_{r=o}^{n} \binom{n}{r} D^r u.\, D^{n-r} v \qquad (01)$$

donde D es el operador que indica la derivación respecto a la variable x. Debido a la analogía formal del lado derecho de la expresión (01), con el Teorema del Binomio, es útil recurrir a un cambio en la notación que consiste en introducir los nuevos operadores $D_u$ , $D_v$ que actúan derivando cada una de las dos funciones u, v, respectivamente, sin afectar a la otra función. Es decir, que se definen de tal forma que se puede poner

$$D^r u\,.\, D^{n-r} v = D_u{}^r D_v{}^{n-r} [u.\, v]$$

con lo cual la fórmula de Leibnitz (01) puede escribirse en forma simbólica y algebráica como

$$D^n [uv] = \sum_{r=o}^{r=n} \binom{n}{r} D_u{}^r\, D_v{}^{n-r} [u.\, v]$$

Por la misma razón podemos escribir simbólicamente, que

$$D^n = ( D_u + D_v)^n \qquad (02)$$

teniendo en cuenta la fórmula de Newton que permite expandir la potencia n-ésima de un binomio.

Para demostrar la expresión (o "teorema", si se le quiere llamar así) de la ecuación (01) se toma en cuenta la identidad elemental muy conocida y dada por

$$D (uv) = u.Dv + v.Du \qquad (03)$$

En esta nota nos referimos a dos sucesiones u(i), v(i), ambas de la variable discreta i, la cual recorre los números naturales (i = 0, 1, 2, . . .), y nos proponemos obtener una fórmula que permita el cálculo rápido y directo de una diferencia finita de orden superior, para el producto u(i). v(i) de las dos sucesiones propuestas. Como primer paso, cabe recordar que cuando la variable i pasa de uno cualquiera de sus posibles valores al valor siguiente, el producto u(i). v(i) experimenta un incremento (o primera diferencia finita), dado por

$$\Delta [u(i)\,.\, v(i)] = u(i)\, \Delta v(i) + v(i)\,.\, \Delta u(i) + \Delta u(i)\,.\, \Delta v(i) \qquad (04)$$

Tomando en esta expresión, término a término, la primera diferencia finita y teniendo en cuenta la misma fórmula (04) recién escrita, se puede calcular la segunda diferencia del producto u.v :

$$\Delta^2 [uv] = u.\Delta^2 v + 2\Delta u.\, \Delta v + v\,.\, \Delta^2 u +$$

$$+ 2\,.\, \Delta u\,.\, \Delta^2 v + 2\Delta^2 u.\, \Delta v + \Delta^2 u\, \Delta^2 v \qquad (05)$$

Definamos los símbolos $\Delta_u$ , $\Delta_v$ de tal manera que sean operadores de diferencias finitas que solamente actúan respecto a las sucesiones u, v, respectivamente, y no sobre la otra sucesión. Es decir que dos "potencias" p, q de esos dos operadores se definen por la identidad

$$\Delta_u{}^p\ \Delta_v{}^q [u.\, v] = \Delta^p u.\, \Delta^q v \qquad (06)$$

Usando esta convención de nomenclatura, es fácil ver que la fórmula (04) se escribe

$$\Delta\,[u.\,v.] = [(\Delta_u + \Delta_v) + \Delta_u\,\Delta_v]\;[\,uv\,] \tag{07}$$

y que la fórmula (05) se puede escribir como

$$\Delta^2\,[u.v] = [(\Delta_u+\Delta_v)^2 + 2\,\Delta_u\Delta_v\,(\Delta_u+\Delta_v) + \Delta_u{}^2\,\Delta_v{}^2]\;[u.v]$$

o también como

$$\Delta^2\,[u.v] = [(\Delta_u + \Delta_v) + \Delta_u + \Delta_v]^2\,[u.v] \tag{08}$$

si recordamos la forma del Teorema del Binomio para un cuadrado.

Observando las fórmulas (07) y (08), surge la conjetura de que, para toda potencia entera y positiva, n, se tenga que la n-ésima diferencia finita del producto u.v sea

$$\Delta^n\;[u.v] = [(\Delta_u + \Delta_v) + \Delta_u\,\Delta_v]^n\;[u.v] \tag{09}$$

considerando la definición (06) y el Teorema del Binomio.

En este artículo se trata de demostrar la verdad de esta fórmula, que no aparece mencionada en los textos usuales sobre Diferencias Finitas, ni siquiera en los más completos como el de Jordan ni los demás que se mencionan en la bibliografía.

Para esta demostración recurrimos al conocido principio de inducción completa. En primer lugar, ya observamos que la equivalencia

$$\Delta^n\;[u.\,v] = [(\Delta_u + \Delta_v) + \Delta_u\,.\,\Delta_v]^n\;[u.\,v] \tag{09}$$

es válida para n = 1 y para n = 2. Es evidente que también vale para n = 0.

Ahora señalaremos que, si es válida para cualquier n, lo es también, necesariamente para n + 1. En efecto, supongamos que para cualquier número natural n se tiene

$$\Delta^n = [(\Delta_u + \Delta_v) + \Delta_u\;\Delta_v]^n$$

y que la potencia n-ésima del paréntesis se forma usando la fórmula del binomio de Newton. Entonces, por definición

$$\Delta^{n+1} = \Delta[(\Delta_u + \Delta_v) + \Delta_u\,.\,\Delta_v]^n$$

$$= \Delta\left[\sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}\sum_{k=o}^{h}\binom{h}{k}\Delta_u{}^{n-h+k}\,\Delta_v{}^{n-k}\right]$$

$$= \sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}\sum_{k=o}^{h}\binom{h}{k}\,\Delta\,(\Delta_u{}^{n-h+k}\,\Delta_v{}^{n-k}) \tag{10}$$

Pero la combinación de incrementos finitos que aparece en la última expresión puede darse en una forma equivalente. En efecto:

$$\Delta\,(\Delta_u{}^{n-h+k}\,\Delta_v{}^{n-k})\,(uv) = \Delta\,(\Delta^{n-h+k}\,u\,.\,\Delta^{n-k}\,v)$$

$$= \Delta^{n-h+k+1}\,u.\,\Delta^{n-k}\,v + \Delta^{n-h+k}\,u.\,\Delta^{n-k+1}\,v$$

$$+ \Delta^{n-h+k+1}\,u.\,\Delta^{n-k+1}\,v \tag{11}$$

lo cual se deduce simplemente al aplicar el operador Δ al paréntesis ($\Delta^{n-h+k}\,u\,.\,\Delta^{n-k}\,v$). Sustituyendo la expresión (11) en la (10) se obtiene:

$$\Delta^{n+1} = \sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}\sum_{k=o}^{h}\binom{h}{k}\Delta_u{}^{n-h+k+1}\,.\,\Delta_v{}^{n-k}$$

$$+ \sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}\sum_{k=o}^{h}\binom{h}{k}\Delta_u{}^{n-h+k}\,.\,\Delta_v{}^{n-k+1}$$

$$+ \sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}\sum_{k=o}^{h}\binom{h}{k}\Delta_u{}^{n-h+k+1}\,.\,\Delta_v{}^{n-k+1}$$

Haremos los siguientes cambios de nomenclatura: (1) en la primera suma doble cambiaremos k+1 por s; (2) en la segunda suma doble cambiaremos k por s; y (3) en la última suma doble cambiaremos h por r y k por s. Así se tiene:

$$\Delta^{n+1} = \sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}\sum_{s=o}^{h+1}\binom{h}{s-1}\Delta_u{}^{n-h+s}\,.\,\Delta_v{}^{n-s+1}$$

$$+\sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}\sum_{s=o}^{h}\binom{h}{s}\Delta_u^{n-h+s}\,.\,\Delta_v^{\,n-s+1}$$

$$+\sum_{r=o}^{n}\binom{n}{r}\sum_{s=o}^{r}\binom{r}{s}\Delta_u^{n+1-r+s}\,.\,\Delta_v^{\,n+1-s}$$

Teniendo en cuenta que $\binom{h}{h+1} = 0$, por definición, observamos que en la segunda suma doble el límite superior de la segunda sumatoria puede pasarse desde h hasta h + 1. Hecho esto, las dos primeras sumas dobles pueden recogerse en una sola. En esta forma se obtiene:

$$\Delta^{n+1} = \sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}\sum_{s=o}^{h+1}\left[\binom{h}{s-1}+\binom{h}{s}\right]\Delta_u^{n-h+s}\,.\,\Delta_v^{\,n-s+1}$$

$$+\sum_{r=o}^{n}\binom{n}{r}\sum_{s=o}^{r}\binom{r}{s}\Delta_u^{n+1-r+s}\,.\,\Delta_v^{\,n+1-s}$$

Una propiedad elemental bien conocida de los coeficientes binomiales, que forman el célebre triángulo de Pascal, es que cumplen la igualdad

$$\binom{h}{s+1}+\binom{h}{s}=\binom{h+1}{s}$$

Por lo tanto

$$\Delta^{n+1} = \sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}\sum_{s=o}^{h+1}\binom{h+1}{s}\Delta_u^{n-h+s}\,.\,\Delta_v^{\,n-s+1}$$

$$+\sum_{r=o}^{n}\binom{n}{r}\sum_{s=o}^{r}\binom{r}{s}\Delta_u^{n+1-r-s}\,.\,\Delta_v^{\,n+1-s}$$

En la primera de las dos sumas dobles de la anterior expresión pongamos h + 1 = r, con lo cual se tiene

$$\Delta^{n+1} = \sum_{r=1}^{n+1}\binom{n}{r-1}\sum_{s=o}^{r}\binom{r}{s}\Delta_u^{n+1-r+s}\,.\,\Delta_v^{\,n+1-s}$$

$$+\sum_{r=o}^{n}\binom{n}{r}\sum_{s=o}^{r}\binom{r}{s}\Delta_u^{n+1-r+s}\,.\,\Delta_v^{\,n+1-s}$$

Y teniendo en cuenta que

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r}$$

se puede escribir

$$\Delta^{n+1} = \sum_{r=o}^{n+1}\binom{n+1}{r}\sum_{s=o}^{r}\binom{r}{s}\Delta_u^{n+1-r+s}\,.\,\Delta_v^{\,n+1-s}$$

$$= [(\Delta_u + \Delta_v) + \Delta_u\ \Delta_v]^{n+1}$$

es decir que para $\Delta^{n+1}$ se tiene:

$$\Delta^{n+1}\ (u.v) = [(\Delta_u + \Delta_v) + \Delta_u\,.\,\Delta_v]^{n+1}\ (u.\ v)$$

Esta expresión es de la misma forma que la expresión (09), lo cual demuestra la validez de dicha fórmula

Ejemplo.- Si se tratara de calcular la expresión

$$\Delta^3\ (2^n\,.\,n^{(5)}),\ \text{con}\ n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

y siendo $n^{(5)} = n\,(n-1)\ldots.(n-4)$, tomando las sucesivas diferencias finitas

$$\Delta\ (2^n\,.\,n^{(5)})$$

$$\Delta^2 (2^n\,.\,n^{(5)}) = \Delta\,.\,\Delta\,(2^n\,.\,n^{(5)})$$

$$\Delta^3 (2^n\,.\,n^{(5)}) = \Delta\,.\,\Delta^2 (2^n\,.\,n^{(5)})$$

habría que realizarlo paso a paso, lo cual requiere un gran número de operaciones.

En cambio, usando la fórmula que hemos deducido, podemos poner

$$U_n = 2^n\ ,\ V_n = n^{(5)}$$

$$\Delta^3 = [(\Delta_u + \Delta_v) + \Delta_u\,\Delta_v]^3$$

$$= (\Delta_u + \Delta_v)^3 + 3\ (\Delta_u + \Delta_v)^2\ \Delta_u\,\Delta_v + 3\,(\Delta_u + \Delta_v)\ \Delta_u^2\,\Delta_v^2 + \Delta_u^3\,\Delta_v^3$$

$$= \Delta_u^3 (1 + 3\Delta_v + 3\,\Delta_v^2 + \Delta_v^3) + 3\Delta_u^2 (\Delta_v + 2\,.\,\Delta_v^2 + \Delta_v^3) + 3\,\Delta_u\,(\Delta_v^2 + \Delta_v^3) + \Delta_v^3$$

Además:

$$\Delta_u (2^n) = 2^n$$

$$\Delta_u^2 (2^n) = 2^n$$

$$\Delta_u^3 (2^n) = 2^n$$

$$\Delta_v (n^{(5)}) = 5\, n^{(4)}$$

$$\Delta_v^2 (n^{(5)}) = 5 \times 4\, n^{(3)} = 20\, n^{(3)}$$

$$\Delta_v^3 (n^{(5)}) = 5 \times 4 \times 3\, n^{(2)} = 60\, n^{(2)}$$

De donde

$$\Delta^3 (2^n\,.\,n^{(5)}) = 2^n (1+3x5n^{(4)} + 3x20n^{(3)} + 60n^{(2)}) + 3x2^n (5n^{(4)} + 2x20n^{(3)} + 60n^{(2)}) + 2^n (20n^{(3)} + 60n^{(2)}) + 60n^{(2)} = 2^n (1+30\, n^{(4)} + 200n^{(3)} + 300n^{(2)}) + 60n^{(2)}$$