La Ecuación en Diferencias Finitas Lineal General de Segundo Orden

Por: Gabriel Poveda Ramos

INTRODUCCION

0. Las ecuaciones en diferencias finitas son muy conocidas por la gran utilidad que tienen en estructuras mecánicas, circuitos eléctricos, probabilidades, actuaría, demografía y otras ciencias. Su primera presentación sistemática se le debe a George Boole, desde el siglo XIX, y en su tratamiento presentan muchas analogías formales con las ecuaciones diferenciales. Pero a pesar de su utilidad y de su relativa sencillez de análisis, la literatura especializada que trata de ellas presenta numerosos vacíos todavía. Para comprobarlo basta ojear las obras que citamos en la bibliografía de este artículo.

Uno de los vacíos que anotamos es que no se encuentra en los libros usuales y conocidos en Colombia, ningún algoritmo para resolver la ecuación en diferencias finitas, lineal, de segundo orden con coeficientes variables y que sea no homogénea. El propósito de este artículo es mostrar la manera que construir una solución sintética para tal tipo de ecuaciones, deducida por el autor, y que se presta fácilmente para ser sistematizada en un computador personal.

La Ecuación en DD.FF. lineal, segundo orden, no homogénea.

1. Se trata de la ecuación

$$y_{n+2} + P_n \cdot y_{n+1} + Q_n \cdot y_n = R_n \qquad (01)$$

donde:

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, recorre la sucesión de los números naturales. P_n, Q_n, R_n son funciones de n (0, si se quiere, sucesiones dependientes de n). En las aplicaciones estas funciones suelen ser expresiones algebráicas o trascendentes relativamente sencillas de n.

El problema es construir la solución general y_n de esta ecuación

$$y_n = \text{función de } n$$

suponiendo conocidos los dos primeros términos, y_0, y_1, de esa solución, y sin tener que recurrir a las iteraciones sucesivas (demoradas y poco elegantes) con que se podría hallar y_n mediante operaciones aritméticas.

2. Un teorema muy conocido de las EE.DD.FF. lineales y no homogéneas, establece que la solución general de la ecuación (01) es una suma

$$y_n = Y_n + T_n$$

en donde Y_n es la solución general de la ecuación homogénea asociada

$$Y_{n+2} + P_n \cdot Y_{n+1} + Q_n \cdot Y = 0 \qquad (02)$$

y donde T_n es una solución particular (cualquiera que sea) de la ecuación (01) propuesta.

La parte Y_n se llama la solución complementaria de la ecuación (01) que se propone resolver.

La Solución Complementaria cuando $P_n \equiv 0$

3. Tomamos la ecuación homogénea asociada

$$Y_{n+2} + P_n \cdot Y_{n+1} + Q_n = 0, \text{ donde } P_n \equiv 0, n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (02)$$

y admitimos que su solución puede expresarse como producto de dos funciones U_n, V_n:

$$Y_n = U_n \cdot V_n$$

de manera que

$$Y_{n+1} = U_{n+1} (V_n + \Delta V_n) \longrightarrow Y_{n+2} = U_{n+2} (V_n + 2. \Delta V_n + \Delta^2 V_n)$$

Sustituyendo en la ecuación (02) y reordenando términos, obtenemos

$$(U_{n+2} + P_n . U_{n+1} + Q_n . U_n) V_n + (2U_{n+2} + P_n . U_{n+1}). \Delta V_n + U_{n+2} . \Delta^2 V_n = 0 \quad (03)$$

Podemos ahora imponer a la función U_n, aún no determinada, la condición de que anule el coeficiente de ΔV_n en la ecuación (03). Es decir, que hacemos

$$2U_{n+2} + P_n . U_{n+1} = 0 \quad (04)$$

lo cual hace que el coeficiente de V_n no sea idénticamente nulo

$$U_{n+2} + P_n . U_{n+1} + Q_n . U_n \not\equiv 0$$

La ecuación (04) puede escribirse como

$$U_{n+2} = - P_n . U_{n+1} / 2 \quad (n = 0, 1, 2, ...) \quad (04A)$$

cuya solución es especialmente fácil de construir de manera particular. Basta poner

$$U_1 = 1$$

y deducir, de manera reiterativa:

$$U_2 = - P_0 U_1 / 2 = - P_0 / 2$$

$$U_3 = P_1 U_2 / 2 = P_1 P_0 / 2^2$$

$$U_4 = - P_2 U_3 / 2 = - P_2 P_1 P_0 / 2^3$$

$$U_5 = P_3 P_2 P_1 P_0 / 2^4$$

y, en general:

$$U_n = (- 1/2)^{n-1} P_{n-2} P_{n-3} ... P_1 P_0 \text{ para } n \geqslant 2 \quad (05)$$

El lector puede fácilmente verificar que, efectivamente, la expresión (05) satisface la ecuación (04), o sea la ecuación (04A), usando el método de inducción completa.

A partir de la expresión (05) o de la ecuación (04A) podemos escribir

$$U_{n+1} = (- P_{n-1} / 2) U_n$$

y también

$$U_{n+2} = (- P_n / 2) U_{n+1} = (P_n . P_{n-1} / 4) U_n \quad (06)$$

4. Por lo tanto, el coeficiente de V_n en la ecuación (03) vale

$$U_{n+2} + P_n . U_{n+1} + Q_n . U_n = [P_n . P_{n-1}/4 - P_n . P_{n-1}/2 + Q_n] U_n$$

$$= (Q_n - P_n . P_{n-1} / 4) U_n \quad (07)$$

De este modo, la ecuación (03) queda

$$(Q_n - P_n . P_{n-1} / 4) \; . V_n + (P_n . P_{n-1} /4) \Delta^2 V_n = 0$$

teniendo en cuenta las igualdades (04), (06), (07). La igualdad anterior puede escribirse también en la forma

$$\Delta^2 V_n - \left(1 - \frac{4Qn}{P_n . P_{n-1}}\right) V_n = 0 \quad (08)$$

Recordando que

$$\Delta^2 V_n = V_{n+2} - 2V_{n+1} + V_n$$

podemos escribir la ecuación (06) en la forma

$$V_{n+2} - 2V_{n+1} + \frac{4Qn}{P_n . P_{n-1}} V_n = 0$$

o también

$$V_{n+2} = 2V_{n+1} + N_n . V_n \quad (09)$$

en la cual hemos puesto

$$N_n = - \frac{4Qn}{P_n . P_{n-1}} \quad (10)$$

para abreviar la nomenclatura.

La función V_n de la ecuación (09)

5. La solución general de la ecuación (09) queda especificada cuando se especifican V_0 y V_1. Por lo tanto, pongamos

$$V_o = A \; , \; V_1 = B$$

donde A, B son constantes independientes de n. (O, si se quiere decir de una manera más general, podrían ser funciones continuas de n, periódicas, con período igual a 1).

Aplicando la ecuación (09) de manera reiterada, se encuentra que, al efectuar las operaciones indicadas y reorganizando términos, se tiene

$$\left.\begin{array}{l}
V_0 = A \\[6pt]
V_1 = B \\[6pt]
V_2 = C + 2B, \text{ donde} \\[6pt]
\qquad\qquad C = N_0 A \text{ o sea } A = C/N_0 \\[6pt]
V_3 = 2C + (4 + N_1) B \\[6pt]
V_4 = C (4 + N_2) + B (8 + 2 N_1 + 2N_2) \\[6pt]
V_5 = C (8+2N_2+2N_3) + B (16+4N_1+4N_2+4N_3+N_1N_3) \\[6pt]
V_6 = C (16+4N_2 + 4N_3 + 4N_4 + N_2 N_4) + \\
+B(32+8N_1+8N_2+8N_3+8N_4+2N_1N_3+2N_1N_4+2N_2N_4) \\[6pt]
V_7 = C(32+8N_2+8N_3+8N_4+8N_5+2N_2N_4+2N_2N_5+ 2N_3N_5) \\
+ B (64+16N_1+16N_2+16N_3+16N_4+16N_5 + 4N_1N_3+ 4N_1N_4 \\
+ 4N_1 N_5 + 4N_2N_4 + 4N_2N_5 + 4N_3N_5 + N_1N_3N_5)
\end{array}\right\} \quad (11)$$

6. Observando estos primeros términos en la solución V_n que se busca se aprecia, evidentemente, que tienen la forma general

$$V_n = CF_n + BG_n \qquad (12)$$

en donde

$$F_n = 2^{n-2} + 2^{n-4} K (n, 4) + 2^{n-6} . K (n, 6) + ... \qquad (13)$$

(que tiene n/2 sumandos si n es par, y (n-1)/2 sumandos si n es impar), y donde

$$G_n = 2^{n-1} + 2^{n-3} L (n, 3) + 2^{n-5} L (n, 5) +... \qquad (14)$$

(que también tiene n/2 sumandos si n es par, y (n + 1)/2 sumandos si n es impar).

El último término de F_n corresponde a la potencia 2° = 1 si n es par, y a la potencia $2^1 = 2$ si n es impar. En cambio, para G_n vale lo contrario: su último término es $2^\circ = 1$ si n es impar, y es $2^1 = 2$ si n es par. Los símbo-
El último término de F_n corresponde a la potencia 2° = 1 si n es par, y a la potencia $2^1 = 2$ si n es impar. En cambio, para G_n vale lo contrario: su último término es
$2^\circ = 1$ si n es impar, y es $2^1 = 2$ si n es par. Los símbolos K (n, i), L (n, j) los usamos para abreviar las expresiones formadas por productos de las Ni y sus sumas. Así, por ejemplo, refiriéndonos a la expresión para V_n, que encontramos arriba, se tiene

$$K (7,4) = N_2 + N_3 + N_4 + N_5$$

$$K (7,6) = N_2 N_4 + N_2 N_5 + N_3 N_5$$

$$L (7,3) = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$$

$$L (7,5) = N_1N_3 + N_1N_4 + N_1N_5 + N_2N_4 + N_2N_5 + N_3N_5$$

De una manera más general, observamos que la forma de estos coeficientes es

$$K (n,4) = N_2 + N_3 + . . . + N_{n-2}$$

$$\begin{array}{l}
K (n, 6) = N_2N_4 + N_2N_5 + N_2N_6 + \dots\dots + N_2N_{n-2} + \\
+ N_3 N_5 + N_3N_6 + \dots\dots + N_3N_{n-2} + \\
+ N_4 N_6 + \dots\dots + N_4 N_{n-2} + \\
+ N_5 N_7 + \dots\dots + N_5 N_{n-2} + \\
+ \dots\dots\dots\dots + \\
+ N_{n-4} N_{n-2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
K (n, 8) = N_2N_4N_6 + N_2N_4N_7 + N_2N_4N_8 + N_2N_4N_9 + \\
\dots\dots + N_2N_4N_{n-2} + \\
+ N_2N_5N_7 + N_2N_5N_8 + N_2N_5N_9 + \dots\dots + N_2N_5N_{n-2} + \\
+ N_2N_6N_8 + N_2N_6N_9 + \dots\dots + N_2N_7N_{n-2} + \\
+ N_2N_7N_9 + \dots\dots + N_2N_7N_{n-2} + \\
+ \dots\dots\dots + \\
+ N_2N_{n-4}N_{n-2} + \\
N_3N_5N_7 + N_3N_5N_8 + N_3N_5N_9 + \dots\dots + N_3N_5N_{n-2} + \\
+ N_3N_6N_8 + N_3N_6N_9 + \dots\dots + N_3N_5N_{n-2} + \\
+ N_3N_7N_9 + \dots\dots + N_3N_7N_{n-2} + \\
+ \dots\dots\dots \\
+ N_{n-6} N_{n-4}N_{n-2}
\end{array}$$

y así sucesivamente.

Los primeros coeficientes L (n, j) son:

$L(n, 3) = N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_{n-2}$

$L(n, 5) = N_1N_3 + N_1N_4 + N_1N_5 + ... + N_1N_{n-2} +$

$+ N_2N_4 + N_2N_5 + ... + N_2N_{n-2} +$

$+ .... +$

$+ N_{n-5}N_{n-3} + N_{n-5}N_{n-2} +$

$+ N_{n-4}N_{n-2}$

y así sucesivamente.

7. Examinando la forma de estas expresiones y aplicando fórmulas combinatorias elementales se deduce que el número de sumandos que contienen las K (n, 2i) y las L (n, 2j + 1), es:

K (n, 4) contiene n-3 sumandos
K (n, 6) contiene $(n-5)(n-4)/2 = (n-4)^{(2)}/2!$ sumandos
K (n, 8) contiene $(n-7)(n-6)(n-5)/3! = (n-5)^{(3)}/3!$ sumandos
K (n, 10) contiene $(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)/4! = (n-6)^{(4)}/4!$ sumandos
K (n, 2 i) contiene $(n-i-1)^{(i-1)}/(i-1)!$ sumandos

L (n, 3) contiene n-2 sumandos
L (n, 5) contiene $(n-4)(n-3)/2! = (n-3)^{(2)}/2!$ sumandos
L (n, 7) contiene $(n-6)(n-5)(n-4)/3! = (n-4)^{(3)}/3!$ sumandos
. . . .
L (n, 2 j + 1) contiene $(n-j)^{(j-1)}/(j-1)!$ sumandos

donde, como es usual, hemos escrito $n^{(m)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$.

8. También observando la forma como están construidos los coeficientes K (n, 2i), se aprecia que K (n, 6), K (n, 8), ... , etc., se pueden escribir en la forma:

$$K(n,6+2r) = \sum_{2}^{n-4-2r} N_{h_1} \sum_{h_1+2}^{n-2-2r} N_{h_2} \sum_{h_2+2}^{n-2r} N_{h_3} \dots\dots \sum^{n-2} N_{h_{r+2}} \qquad (15)$$

donde hay r + 2 sumatorias

En cuanto a los L (n, 2 j + 1), se pueden escribir

$$L(n, 5+2r) = \sum_{1}^{n-4+2r} N_{k_1} \sum_{k_1+2}^{n-2-2r} N_{k_2} \sum_{k_2+2}^{n-2r} N_{k_3} \dots\dots\dots\dots \sum^{n-2} N_{k_{r+2}} \qquad (16)$$

Con esta notación, la ecuación (11), combinada con (12) y (13), se puede escribir

$$V_n = C\left[2^{n-2} + 2^{n-4}\sum_{i=2}^{n-2} Ni + \sum_{r=o}^{Hn} 2^{n-6-2r}\, K(n, 6+2r)\right]$$

$$+ B\left[2^{n-1} + 2^{n-3}\sum_{i=1}^{n-2} Ni + \sum_{r=o}^{H'n} 2^{n-5-2r}\, L(n,5+2r)\right],$$

$$, (n \geqslant 2) \qquad (17)$$

en donde H_n es el valor que convierte al exponente n-6-2r en 1 si n es impar, y en cero si n es par, al hacer $r = H_n$. En cambio, H_n' es el valor que convierte al exponente n-5-2r en 1 si n es par, y en cero si n es impar al hacer $r = H_n'$.

Fácilmente se deduce que

$$H_n = 1/2\,(n - 6 - \varepsilon_n)$$

$$H_n' = 1/2\,(n - 5 - \varepsilon_{n+1})$$

en donde

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0 \text{ sii n es par} \\ 1 \text{ sii n es impar} \end{cases}, \qquad \varepsilon_{n+1} = \begin{cases} 1 \text{ sii n es par} \\ 0 \text{ sii n es impar} \end{cases}$$

o, volviendo a la expresión (11):

$$V_n = CF_n + BG_n \qquad (11)$$

Demostración de la solución (17) para la ecuación (09)

9. Demostremos que F_n cumple la ecuación (09). En efecto, observando las ecuaciones (11) y la forma (17) de F_n, resulta claro que ésta satisface la ecuación.

$$V_{n+2} = 2V_{n+1} + N_n V_n \qquad (09)$$

para n = 0, n = 1, n = 2 y aun para más valores de n. Además: supongamos que F_n cumple la (09) hasta para cierto valor n = m + 1 y, por lo tanto, también para n = m. Es decir, supongamos que

$$F_m = 2^{m-2} + 2^{m-4} \sum_{2}^{m-2} N_i + \sum_{o}^{Hm} 2^{m-6-2r} K(m, 6+2r) \qquad (18)$$

y que

$$F_{m+1} = 2^{m-1} + 2^{n-3} \sum_{2}^{m-1} N_i + \sum_{o}^{Hm+1} 2^{m-5-2r} K(m+1, 6+2r) \qquad (18A)$$

satisfacen la ecuación en DD.FF. (09).

Calculemos ahora, partiendo de las expresiones (18) y (18A), la expresión

$$F_{m+2} = 2F_{m+1} + N_m F_m$$

y obtenemos

$$F_{m+2} = 2\left[2^{m-1} + 2^{m-3} \sum_{2}^{m-1} Ni + \sum_{o}^{Hm+1} 2^{m-5-2r} \times K(m+1, 6+2r)\right] + N_m \left[2^{m-2} + 2^{m-4} \sum_{o}^{m-2} Ni + \sum_{o}^{Hm} 2^{m-5-2r} K(m, 6+2r)\right]$$

$$= 2^m + 2^{m-2} \sum_{2}^{m} Ni + 2^{m-4} N_m \sum_{2}^{m-2} N_i + 2\sum_{o}^{Hn+1} 2^{m-5-2r} K(m+1, 6+2r) + N_m \sum_{o}^{Hn} 2^{m-6-2r} K(m,6+2r) + \ldots\ldots$$

Reordenando términos; incorporando algunos a las sumatorias por cambio de índice en las sumatorias indicadas; expresando K (m, 6 + 2r) como sumatoria múltiple, y después de algunos pasos de álgebra elemental que omitimos por ser tipográficamente dispendiosos, se tiene finalmente,

$$F_{m+2} = 2^m + 2^{m-2} \sum_{2}^{m} Ni + \sum_{r=o}^{Hm+2} 2^{m-4-2r} K(m+2, 6+2r)$$

Esta última expresión es la que resulta de sustituir m+2 en lugar de m en la ecuación (18) o en lugar de m+1 en lugar de (18A). Se deduce así que la expresión (18) o, si se quiere, la (18A) es una solución de la ecuación (09).

Por el mismo método, y mediante cálculos muy parecidos, se demuestra que

$$G_n = 2^{n-1} + 2^{n-3} \sum_{i=1}^{n-2} Ni + \sum_{r=o}^{Hn'} 2^{m-5-2r} L(n, 5+2r) \qquad (19)$$

también satisface la ecuación (09).

Formando el determinante

$$\begin{vmatrix} F_n & G_n \\ F_{n+1} & G_{n+1} \end{vmatrix}$$

y calculando explícitamente su valor con las fórmulas (13) y (14), se comprueba que este determinante no es idénticamente nulo. Esto significa que las soluciones F_n y G_n son independientes y que, por lo tanto, la solución

$$V_n = CF_n + B.G_n \text{ para } n \geqslant 2 \qquad (11)$$

con C y B constantes arbitrarias, es la solución general de la ecuación (09).

De esta manera, si $P_n \neq 0$, la solución general de

$$Y_{n+2} + P_n \cdot Y_{n+1} + Q_n = 0 \qquad (02)$$

es la función (o la sucesión):

$$Y_n = (-1/2)^{n-1} P_{n-2} P_{n-1} \ldots P_1 P_o (CF_n + BG_n) \qquad (22.1)$$

Esta es, así mismo, la solución complementaria de la ecuación (01) no homogénea, que se trata de resolver, cuando $P_n \not\equiv 0$.

La Solución Complementaria cuando $P_n \equiv 0$.

En este caso, la ecuación homogénea asociada es

$$Y_{n+2} + Q_n Y_n = 0 \tag{20}$$

o también

$$Y_{n+2} = - Q_n Y_n \tag{20A}$$

Una solución básica J_n de esta ecuación la podemos construir poniendo

$$J_o = 1 \qquad J_1 = 1$$

y aplicando reiteradamente la expresión (20A), a saber:

$$J_2 = - Q_o \qquad J_3 = - Q_1$$

$$J_4 = Q_2 Q_o \qquad J_5 = Q_3 Q_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y, en general

$$J_n = (-1)^{[n/2]} Q_{n-2} Q_{n-4} \cdots\cdots Q_{\varepsilon n} \tag{21}$$

donde [n/2] significa la parte entera de n/2 y donde

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0 \text{ sii } n \text{ es par} \\ 1 \text{ sii } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Otra solución básica W_n de la ecuación (20) se obtiene por el método de variación de parámetros, según el cual W_n es

$$W_n = w_n J_n$$

donde w_n es una función aún no determinada. De aquí obtenemos

$$W_{n+1} = (w_n + \Delta w_n) J_{n+1}$$

$$W_{n+2} = (w_n + 2 \Delta w_n + \Delta^2 w_n) J_{n+2}$$

y sustituyendo en la ecuación (20), después de reordenar términos:

$$w_n (J_{n+2} + Q_n J_n) + (2 \Delta w_n + \Delta^2 w_n) J_{n+2} = 0$$

o sea

$$\Delta^2 w_n + 2.\Delta w_n = 0$$

porque J_n satisface a la ecuación (20). Poniendo $t = \Delta w_n$, tenemos

$$\Delta t_n + 2t_n = 0 \leftrightarrow t_{n+1} = - t_n$$

y poniendo $t_o = 1$ se obtiene

$$\{t_n\} = (1, -1, 1, -1, \ldots.)$$

cuya primera sumatoria $w_n = \sum_{0}^{n-1} t_j$ puede construirse muy fácilmente haciendo $w_o = 0$, de donde

$$w_o = 0 , w_1 = 1, w_2 = 0 , w_3 = 1, \ldots\ldots w_n = \varepsilon_n$$

Entonces la otra solución básica de (20) es

$$W_n = w_n J_n = \varepsilon_n J_n$$

de manera que la solución general de (20) es

$$Y_n' = C_1 J_n + C_2 \varepsilon_n J_n$$

La Solución complementaria de (01)

En resumen, la solución complementaria de la ecuación (01) propuesta es

$$Y_n = \begin{cases} Y_n^* = (-1/2)^{n-1} (CF_n + BG_n) \prod_{k=o}^{n-2} P_k , \\ \text{cuando } P_n \not\equiv 0 & (22.1) \\ \\ Y_n' = (-1)^{n/2} (C_1 + C_2 E_n) Q_{n-2} Q_{n-4} \ldots Q_{kn} , \\ \text{cuando } P_n \equiv 0 & (22.2) \end{cases}$$

Una Solución Particular de la Ecuación (01) Propuesta

Para buscar una solución particular acudimos al método de variación de parámetros, y consideramos primero el caso $P_n \not\equiv 0$. En este caso, sabemos que F_n es una solución particular de la homogénea asociada (02), y que cualquier otra función

$$D.F_n \text{ donde } D = \text{constante}$$

también lo será. Proponemos pues una solución particular de la ecuación no-homogénea (01) en la forma

$$y_n^* = Z_n \ F_n \tag{23}$$

De ésta deduzco

$$y^*_{n+1} = F_{n+1} \ (Z_n + \Delta Z_n) \tag{23A}$$

$$y^*_{n+2} = F_{n+2} \ (Z_n + 2\,\Delta Z_n + \Delta^2 Z_n) \tag{23B}$$

y sustituimos en la ecuación original (01):

$$(F_{n+2} + P_n F_{n+1} + Q_n . F_n)\, Z_n + (2F_{n+2} + P_n\, F_{n+1}).\Delta Z_n$$

$$+ \ F_{n+2} . \Delta^2 Z_n = R_n \tag{24}$$

El primer paréntesis de la izquierda es nulo, porque F_n satisface la ecuación (02). Escribamos $\Delta Z_n = T_n$ y dividamos por F_{n+2} y queda

$$\Delta T_n + (2 + P_n\, F_{n+1} / F_{n+2})\, T_n = R_n / F_{n+2}$$

o bien

$$T_{n+1} + (1 + P_n\, F_{n+1} / F_{n+2}) \ T_n = R_n / F_{n+2} \tag{25}$$

Esta última es una ecuación en DD.FF., lineal, de primer orden, no homogénea, cuya solución explícita general se conoce bien, y contiene una constante arbitraria[1] aditiva. Para una solución particular podemos poner esa constante igual a cero, y tengo

$$T^*_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \ (1 + P_k\, F_{k+1} / F_{k+2}) \ \text{x}$$

$$\text{x} \ \sum_{j=o}^{n-1} \ (R_j / F_{j+2}) \div \prod_{i=o}^{i=j} \ (-1)^{i+1} (1+P_i F_{i+1} / F_{i+2}) \tag{26}$$

Entonces, si $P_n \not\equiv 0$, la solución general de la ecuación (01) es

$$y_n = Y_n^* + F_m \sum_{k=o}^{n-1} T_k^* \tag{27}$$

En el caso de que sea $P_n \not\equiv 0$, la ecuación (23) toma la forma

$$y^*_n = Z_n \ J_n$$

y la ecuación (24) queda

$$(J_{n+2} + Q_n\, J_n)\, Z_n + 2J_{n+2} . \Delta Z_n + J_{n+2} . \Delta^2 Z_n = R_n$$

cuyo primer paréntesis es nulo, y se obtiene

$$2. \Delta Z_n + \Delta^2 Z_n = R_n / J_{n+2}$$

o bien

$$\Delta T_n + 2\, T_n = R_n / J_{n+2} \tag{28}$$

en donde hemos puesto

$$T_n = \Delta Z_n \leftrightarrow Z_n = \sum_{k=o}^{n-1} T_k$$

La ecuación (28) es lineal, de primer orden, no homogénea y su solución general, que se sabe bien cómo construir, tiene un término particular que es

$$T_n' = (-1)^n \sum_{k=o}^{n-1} (-1)^{k+1}\, R_k / J_{k+2} \tag{29}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (01) cuando $P_n \equiv 0$, es

$$y_n = Y_n' + J_n \sum_{i=o}^{n-1} (-1)^i \sum_{k=o}^{i-1} (-1)^{i+1}\, R_k / J_{k+2} \tag{30}$$

(1) Ver, por ejemplo, Miller, Kenneth S. An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations.

Resumen de la Solución de la Ecuación (01)

Dada la ecuación en DD.FF. lineal, de 2º orden, no-homogénea

$$y_{n+2} + P_n \cdot y_{n+1} + Q_n \cdot y_n = R$$

construyo su solución general así:

1. Si es $P_n \not\equiv 0$ procedemos de la siguiente manera:

   1.1 Construir los coeficientes N_n según la expresión (10).

   1.2 A partir de los anteriores escribir explícitamente los coeficientes K (n,6 + 2r) dados por la fórmula abreviada (15), y los coeficientes L (n, 5+2r) dados por la fórmula (16).

   1.3 Con los anteriores, escribir explícitamente y expandir las sumatorias en la fórmula (17), para tener v_n, con dos constantes arbitrarias C, B.

   1.4 Construir las expresiones (05) para U_n.

   1.5 Formar el producto $U_n\, V_n = Y_n$ establecida en la fórmula (22.1) y que da la solución complementaria Y^*_n.

   1.6 Construir la función (26) para T_n, y buscar la sumación de su primitiva, $\sum_{o}^{n-1} T_k = W_n$

   1.7 Formar la suma general.

   $$y_n = Y_n^* + W_n\, F_n \qquad (27A)$$

   y esta es la solución general de (01) cuando $P_n \not\equiv 0$.

2. Si es $P_n \equiv 0$, procedemos así:

   2.1 Construir la expresión (22.2) para Y_n', que será la solución complementaria.

   2.2 Formar la expresión (29) y su sumación primitiva

   $$Z_n = \sum_{o}^{n-1} T_k'$$

   2.3 La solución general es

   $$y_n = Y_n' + J_n\, Z_n \qquad (30A)$$

Ejemplo 1.

Trátase de resolver la ecuación en DD.FF. de segundo orden

$$y_{n+2} - n.y_n = 0\,,\ n \geqslant 0 \qquad (31)$$

Es posible resolverla por reiteración:

$$y_o = A\,,\ y_1 = B\,,\ y_2 = 0\,,\ y_3 = B\,,\ y_4 = 0,\ y_5 = 3 \times 1\ B$$

y en general, es fácil deducir que, salvo y_o (que es y_o = A) en general es

$$y_n = B\, \varepsilon_n\, (n-2)!! \quad \text{para } n \geqslant 1 \qquad (32)$$

donde B es un coeficiente arbitrario, equivalente a y_1.

Ejemplo 2.

Se tiene la ecuación homogénea

$$y_{n+2} = a\ (n+1)\ y_n\,,\ n \geqslant 0 \qquad (33)$$

con las condiciones iniciales $y_o = A,\ y_1 = B$

Por aplicación reiterada se encuentra

$$y_2 = 1.a.A\,,\ y_3 = 2\,a.B,\ y_4 = 3x1.a^2A,\ y_5 = 4x2.a^2B$$

y, en general

$$y_n = \varepsilon_{n+1} A + \varepsilon_n B\ (n-1)!!\ a^{[n/2]} \qquad (34)$$

Donde A y B son coeficientes constantes y arbitrarios.

Verifiquemos que, por ejemplo, $(n-1)!!\ a^{[n/2]} = j_n$ satisface a (31):

$$j_{n+2}-a(n+1)j_n = (n+1)!!\ a^{[(n/2)/2]} - a(n+1)\,(n-1)!!\ a^{[n/2]}=0$$

puesto que $a^{[n/2+1]} = a.a^{[n/2]}$, y $(n+1)!! = (n+1)\,(n-1)!!$

Ejemplo 3.

Resolver la ecuación no-homogénea

$$y_{n+2} - a\ (n+1)\ y_n = n+1,\ \ n \geqslant 0 \qquad (35)$$

con las condiciones $y_o = y_o$, $y_1 = y_1$.

Puesto que la ecuación (33) es la homogénea asociada de la ecuación (35), la solución (34) es la parte complementaria de la solución buscada. Para buscar una solución particular de (35), parto de la solución básica

$$j_n = (n-1)!!\ a^{[n/2]}$$

y admitimos una solución particular de la forma

$$W_n = w_n \cdot (n-1)\ a^{[n/2]} = w_n \cdot j_n$$

Tomando los incrementos finitos y sustituyendo en (35) se obtiene

$$w_n (j_{n+2} - j_n) + (2 \cdot \Delta w_n + \Delta^2 w_n)\, j_{n+2} = n + 1$$

El primer sumando de la izquierda es nulo; y poniendo $t_n = \Delta w_n$, se tiene

$$\Delta t_n + 2 \cdot t_n = (n+1) / j_{n+2}$$

o sea

$$t_{n+1} = - t_n + (n+1) / j_{n+2}$$

Poniendo $t_o = 0$ se deduce por aplicación repetida:

$$t_1 = 1/j_2\, ,\ t_2 = 1/j_2 + 2/j_3\, ,\ t_3 = 1/j_2 - 2/j_3 + 3/j_4$$

y, de manera general

$$t_n = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+k} k/j_{k+1}$$

$$w_n = \sum_{k=o}^{n-1} t_h = \sum_{h=o}^{n-1} \sum_{k=1}^{h+1} (-1)^{h+k} k/j_{k+1}$$

Entonces la solución general buscada es la suma de la expresión (34) y del producto $w_n j_n = w_n\ (n-1)!!\ a^{[n/2]}$

$$y_n = (\varepsilon_{n+1} A + \varepsilon_n B + \sum_{h=o}^{n-1} \sum_{k=1}^{h+1} (-1)^{h+k} k/j_{k+1})\ (n-1)!!\ a^{n/2} \qquad (36)$$

y con un poco de álgebra elemental se encuentra

$$y_n = (n-1)!!\ a^{[n/2]} \left[\varepsilon_{n+1} A + \varepsilon_n B - (n/j_{n+1} + (n-2)/j_{n-1} + \ldots + \varepsilon_n/j\ \varepsilon_{n+1}) \right]$$

Aplicando la solución (36) a $n = 1$ y $n = 2$ obtenemos

$$y_1 = (B - 1/j_2)$$

$$y_2 = (A - 2/j_3)\ a$$

de donde

$$A = y_2/a + 2/j_3 = y_2/a + 2/a = (y_2 + 2)/a$$

$$B = y_1 + 1/j_2 = y_1 + 1/a$$

Ejemplo 4.

Resolvamos la ecuación

$$y_{n+2} - a^2 y_n = 0 \qquad (37)$$

con las condiciones iniciales $y_o = A$, $y_1 = B$

En este caso tan sencillo es bien sabido que la solución general es

$$y_n = C_1 a^n + C_2 (-a)^n \qquad (38)$$

y que

$$C_1 = (aA + B)/2a \qquad C_2 = (aA - B)/2a$$

usando los métodos que son conocidos para EE.DD.FF. lineales con coeficientes constantes.

La expresión (22.2) que hemos deducido, y aplicada aquí, da:

$$y_n = (-1)^{[n/2]} \underbrace{(-a^2)(-a^2)\ldots(-a^2)}_{n/2\ \text{veces}} (C_1' + C_2' \varepsilon_n) \qquad (39)$$

de donde

$$y_o = C_1 = A$$

$$y_1 = C_1 + C_2 = B$$

o sea que la solución última es

$$y_n = a^{2[n/2]} A + (B - A)\, \varepsilon_n \qquad (39A)$$

que es la misma solución (38), como se puede comprobar con un poco de álgebra elemental (verificando que coinciden tanto para $n = 2k$, par, como para $n = 2k + 1$, impar).

Ejemplo 5.

Resolveremos la ecuación

$$v_{n+2} - 2v_{n+1} - av_n = 0 \qquad (a > 0 \ , \ n \geqslant 0)$$

que tiene forma análoga a la ecuación (09), pero con coeficientes contantes.

Los métodos clásicos conocidos cuando los coeficientes son constantes llevan a formar la ecuación característica

$$m^2 - 2m - a = 0$$

cuyas dos raíces características

$$m_1 = 2 + \sqrt{1 + a} \ , \qquad m_2 = 2 - \sqrt{1 + a}$$

permiten formar la solución general

$$y_n = C_1 m_1^n + C_2 m_2^n$$

Es muy fácil deducir que

$$C_1 = (y_o m_2 - y_1) / 2\sqrt{1+a} \ , C_2 = (y_1 - y_o m_1) / 2\sqrt{1+a}$$

si se quiere dar la solución en términos de las condiciones iniciales.

Por el método de nuestro numeral 5 (ver arriba Nº 5), encontramos la solución general

$$v_n = CF_n + BG_n$$

donde F_n y G_n están dados por las expresiones (13) y (14), respectivamente.

En el caso de este problema tenemos $N_n = a$. Los coeficientes K (n, 4), K (n, 6), etc., son:

$K(n, 4) = N_2+N_3+ \ldots + N_{n-2}$(n-3 sumandos todos iguales a a) $= (n-3)\ a$

$K(n, 6) = ((n-5)(n-4)/2$ sumandos de forma $N_i N_j$, siendo $N_i N_j = a^2) = (n - 5)(n - 4)\, a^2/2 = (n - 4)^{(2)} a^2/2$

y sucesivamente

$$K(n, 8) = a^2 (n-7)(n-6)(n - 5) / 3! = a^3 (n - 5)^{(3)} / 3!$$

$$K(n, 10) = a^4 (n - 6)^{(4)} / 4!$$

etc.

Por lo tanto, en nuestro caso se tiene

$$F_n = 2^{n-2} + 2^{n-4} a (n-3) + 2^{n-6} a^2 (n-4)^{(2)} / 2!$$

$$+ 2^{n-8} a^3(n-5)^{(3)} / 3! + \ldots + 2^{k_n} a^{1/2(n-k_n)} \ 1$$

$$\frac{(n/2 + kn/2 - 1)^{(n/2-k_n/2-1)}}{(n/2 - k_n/2 - 1)!}$$

donde $k_n = \varepsilon_n$

y

$$G_n = 2^{n-1} + 2^{n-3} a (n-3) + 2^{n-5} a^2 (n-4)^{(2)} / 2!$$

$$+ 2^{n-7} a^3(n-5)^{(3)} /3! + \ldots\ldots + 2^{1-k_n} a^{n/2+k_n/2-3/2} \ \times$$

$$\frac{x\,(n/2 - 1/2 - kn/2)^{(n/2 + kn/2-3/2}}{(n/2 + k_n/2 - 3/2!}$$

y la solución general es

$$v_n = CF_n + BG_n$$

Ejemplo 6.

Podemos resolver la ecuación homogénea

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} + ncv_n$$

con las condiciones iniciales $v_o = A$, $v_1 = B$. Por aplicación reiterada de la ecuación encontramos los primeros términos

$$v_2 = 2B \ , \ v_3 = B(4 + c) \ , \ v_4 = B(2^3 + 6c)$$

$$v_5 = B(2^4 + 24c + 3c^2) \ , \ v_6 = B(2^5 + 80c + 30c^2)$$

$$v_7 = B(2^6 + 240c + 180c^2 + 15c^3)$$

$$v_8 = B(2^7 + 672c + 840c^2 + 210c^3)$$

En general, puede deducirse que la solución general es de la forma

$$v_n = B\,[2^{n-1} + 2^{n-3}\,c\,(n-1)\,(n-2)/2 + 2^{n-5}\,c^2\,(n-3)\,(n^3 - 19n^2 + 38)/8 + \ldots]$$

o bien, de otra manera:

$$v_n = B\,[2^{n-1} + 2^{n-4}\,c.p_2\,(n) + 2^{n-8}\,c^2.p_3\,(n) + 2^{n-12}c^3.p_4\,(n) + \ldots + 2^{\varepsilon_n}c^{(n-\varepsilon n)/4}.p_{1+(n-\varepsilon n)/4}\,(n)\,]$$

BIBLIOGRAFIA

BATCHELDER, Paul M. An Introduction to Linear Difference Equations. New York. Dover Publications Inc., 1967.

BOOLE, George. A Treatise on the Calculus of Finite Differences. New York. Dover Publications Inc., 1960.

GODOUNOV, S. y V. Riabenki. Schémas aux Différénces. Moscú. Editorial Mir. 1977.

GOLDBERG, Samuel. Introduction to Difference Equations. New York. John Wiley and Sons. 1958.

JORDAN, Charles. Calculus of Finite Differences. New York. Chelsea Publishing Company. 1965.

LEVY, H. and F. Lessman. Finite Difference Equations. New York. The Macmillan Company. 1961.

MILLER, Kenneth S. An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations. New York. Dover Publications Inc. 1967.

SPIEGEL, Murray S. Finite Differences and Difference Equations. New York. Mc Graw-Hill Book Company. 1970.