

Determinación de las rigideces rotacionales y de los momentos de empotramiento de elementos rectos no prismáticos con articulaciones en los extremos

Elkín A. Castrillón Oberndorfer

I. C., Dr. - Ing.
Profesor Asociado
Facultad de Minas
Universidad Nacional



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDILLÍN

DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA "FEE" C

RESUMEN

Con el fin de simplificar la determinación de las rigideces por rotaciones nodales y axiales, y de los momentos de empotramiento en elementos rectos no prismáticos, con o sin articulaciones elásticas en sus extremos, se propone, desarrolla y aplica un algoritmo basado únicamente en el Método de las Fuerzas.

Los resultados que se obtienen son correctos y, por lo tanto, se recomienda este procedimiento en lugar de otros mucho más elaborados.

1. INTRODUCCION

El Método del Pórtico Equivalente especificado en el código norteamericano ACI 318-89 (1) para el análisis de sistemas estructurales en hormigón reforzado con losas en dos direcciones, específicas para los elementos del pórtico -vigas y columnas- variaciones es sus momentos de inercia, a fin de considerar mejor la geometría del sistema, especialmente en los nudos.

Como uno de los objetivos de este método es conservar, para el análisis de los pórticos resultantes por el método de los desplazamientos, el mismo número de grados de libertad presentes en pórticos de elementos prismáticos, se requiere la determinación de las rigideces y los momentos se empotramiento en los elementos.

El autor de este artículo desde hace años considera difíciles o desactualizadas las formas sugeridas en la literatura para la determinación de estas características. Precisamente en la preparación del curso INTRODUCCION AL ANALISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS ESTRUCTURALES CON LOSAS EN DOS DIRECCIONES (3) el autor encuentra un método elemental y simple, que se presenta en este trabajo.

La consideración de articulaciones elásticas o conexiones semirígidas en los extremos de los elementos, tal como indican por ejemplo, Wang y Salmon (17) para el análisis más general de estos sistemas sometidos a cargas verticales y horizontales, es elemental y, como se indica más adelante, de impresionante sencillez en comparación con el método propuesto por estos autores.

Las aplicaciones del algoritmo, no se limitan a elementos en pórticos de hormigón, sino también a otros casos del análisis estructural como elementos apoyados elásticamente y elementos entre vigas pared.

2. ANTECEDENTES

Para la determinación de rigideces y momentos de empotramientos en elementos de inercia variable entre intervalos, se proponen en la literatura los siguientes métodos:

- tablas,
- solución de la elástica,
- matrices de transferencia
- analogía de la columna,
- viga conjugada,
- el método de los desplazamientos,
- la condensación estática y, aquí,
- el método de las fuerzas.

Para establecer una base común de comparación se debe aclarar aquí que las tablas consideran únicamente la rigidez a flexión de los elementos, o sea, su deformación a flexión. En esta forma el elemento empotrado - empotrado, básico en el método de los desplazamientos presenta sólo una doble indeterminación estática.

La deformación axial se puede considerar independientemente en la forma usual, que es muy simple.

Las tablas son seguramente las herramientas más simples, pero están limitadas a algunas geometrías y, en algunos casos, se basan en aproximaciones adicionales. Aunque en esta época de los microcomputadores definitivamente ya no son los medios más apropiados, algunos autores como Ghosh y Rabht (12) las siguen utilizando.

La solución de la elástica, tal como se presenta en la Resistencia de Materiales, es elemental pero de difícil ejecución en este caso. Más apropiada sería la utilización de las matrices de transferencia, basadas precisamente en la solución de la elástica, pero se requiere un número de multiplicaciones

de matrices igual al número de intervalos del elemento, lo que implica un respetable trabajo numérico.

Wang y Salmon (17) insisten en que, tal vez el mejor método para la determinación de las características buscadas es la analogía de la columna. Aunque la referencia sugerida por estos autores no es localizable en nuestro medio, Wang (18) presenta más detalladamente las bases de este método, desarrollado, según Mac Gregor (15) por Cross.

En esta forma probablemente se reduce el trabajo, especialmente manual, que implica la doble indeterminación estática, pero se requiere habilidad para comprender y aplicar la analogía. Según se desprende de sus ejemplos numéricos el trabajo manual sigue siendo respetable.

Precisamente en este sentido Cross y Morgan (5) anotan sobre la analogía de la columna lo siguiente: "Porque ella es una herramienta mecánica -una fórmula, una analogía- ella no es especialmente iluminante".

El método de los desplazamientos es también aplicable en un elemento recto de inercia variable de intervalo en intervalo. Para ello se divide el elemento en subelementos prismáticos limitados por nudos en sus extremos. De esta manera los cuatro grados de libertad del elemento se incrementan en el doble del número de intervalos, n , menos uno, para un total de $4+2(n-1) = 2(1+n)$.

Para tres intervalos, por ejemplo, el sistema global tiene ocho grados de libertad, que se reducen a cinco, cuando se descuentan las tres restricciones, consideradas al determinar las rigideces del elemento. Aún así, la solución de un sistema de cinco ecuaciones lineales sólo es práctica en forma sistematizada y, aunque, con los medios actuales no implica mayor dificultad tampoco hay que recurrir a este procedimiento, cuando existen otros más simples.

A fin de no aumentar innecesariamente el número de grados de libertad de todo un sistema estructural se recurre a la condensación estática, tal como es presentada, por ejemplo, por Gallagher (8).

Según este método, mediante una serie de operaciones matriciales, se reducen los grados de libertad del elemento a los cuatro grados de libertad en sus extremos y se determinan los correspondientes elementos de la matriz de rigidez.

Después de prácticamente tres décadas de generalización y aplicación del método de los desplazamientos, para aprovechar las cada vez mayores posibilidades de los medios de computación, ya sea, por ejemplo, considerando solamente elementos prismáticos y, por lo tanto, un mayor número de grados de libertad, es conveniente revisar las ventajas de las otras alternativas que conservan los cuatro grados de libertad del elemento recto.

Una interesante aplicación del método de los desplazamientos, pero ya con la utilización de elementos finitos, es presentada por El - Mezaini, Balkaya y Citipitioglu (6). Ellos además de calcular y comparar rigideces y momentos de empotramiento, llaman la atención sobre la importancia de considerar adecuadamente el eje centroidal del elemento, ya que en algunos casos se considera recto aunque no lo sea.

Los teoremas publicados según Hirschfeld (14) por Mohr en 1868, conocidos en norteamérica también como método de la viga conjugada, se aplican para el cálculo de rotaciones y desplazamientos en un elemento recto. Aristizábal (2) presenta este método para la determinación de las rigideces y momentos de empotramiento de un elemento prismático con conexiones rígidas y para ello utiliza los conceptos de «índices de rigidez» y «factores de fijeza».

Aunque interesante, especialmente para la cuantificación del efecto de diferentes relaciones de rigideces, estos conceptos no son indispensables y, por lo tanto, es discutible su introducción.

Limitado en su análisis al elemento prismático, Aristizábal (2) se ve obligado a convertir el elemento de inercia variable especificado a un elemento prismático equivalente, que como se observa en las tablas, por ejemplo, en general no es completamente equivalente.

En esta breve relación se anota finalmente el método de las fuerzas, que además de ser el más elemental para el análisis de sistemas estáticamente

indeterminadas, permite en algunos casos, tal como se indica más adelante, una solución bastante simple. Independientemente de cualquier variación de inercia en el elemento, esto solo tiene una doble indeterminación estática, cuando se considera solamente la deformación por flexión.

La solución de un sistema simétrico de dos ecuaciones con dos incógnitas no presenta -aún manualmente- mayor dificultad. Por esta razón se considera que la aplicación del método de las fuerzas es en este caso muy apropiado.

Posteriormente a la presentación del método desarrollado aquí en el evento en referencia (3) se encuentra en la literatura un método semejante propuesto por Funk y Wang K. (7). El método presentado a continuación es, sin embargo, más simple, ya que al menos no requiere la analogía de Mohr y utiliza características propias de estos elementos al considerar también la rotación del eje.

3. EL METODO DE LAS FUERZAS

Las bases de este método se presentan en los cursos y textos elementales para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas (por ejemplo Castrillón (4)), y, por lo tanto, se omite aquí su desarrollo.

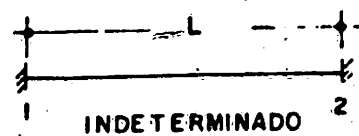
Además, el elemento recto considerado es tan simple, que a pesar de su doble indeterminación estática, su análisis no presenta mayor dificultad.

A fin de indicar el procedimiento fundamental a seguir en este caso, en la Figura 1 se presentan:

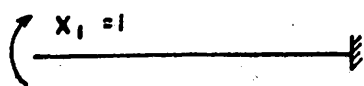
- los sistemas estáticamente indeterminado y determinado,
- las hiperestáticas y los diagramas de momentos correspondientes a sus valores unitarios y
- como acciones externas, la rotación en el apoyo 2 y la carga distribuida sobre la luz.

En elementos prismáticos los coeficientes de flexibilidad se pueden determinar fácilmente mediante integrales de Mohr.

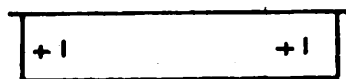
Cuando hay variación de inercias, se divide la longitud del elemento en intervalos de inercia constante, tal como se indica en la figura 2, donde el



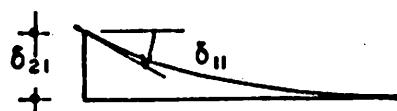
a) SISTEMAS ESTATICOS



SISTEMA

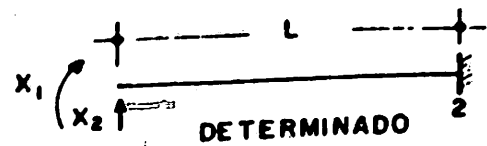


MOMENTO

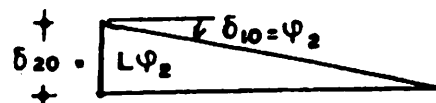
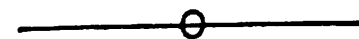


ELASTICA

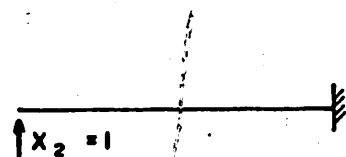
HIPERESTATICA $X_1 = 1$



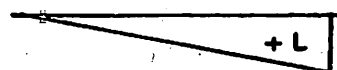
DETERMINADO



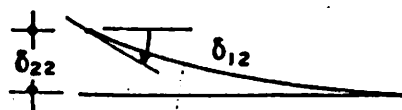
ROTACION DEL APOYO 2



SISTEMA

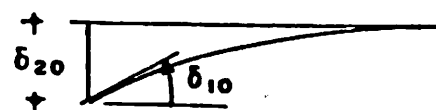
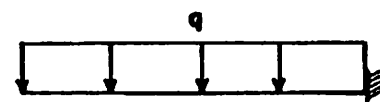


MOMENTO



ELASTICA

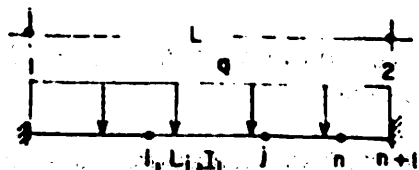
HIPERESTATICA $X_2 = 1$



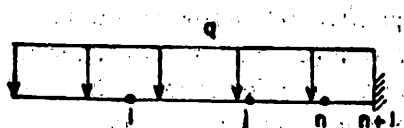
CARGA TRANSVERSAL q

b) HIPERESTATICAS Y ACCIONES EXTERNAS

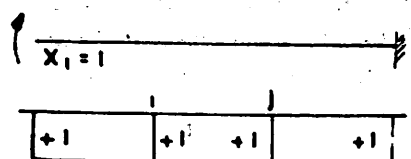
FIGURA 1. Desplazamientos debidos a hiperestáticas y a acciones externas



a) SISTEMA



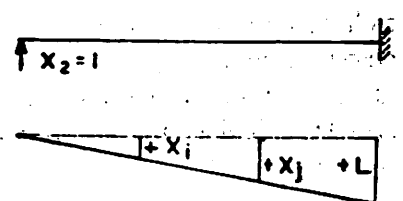
b) SISTEMA ESTATICAMENTE DETERMINADO



SISTEMA

MOMENTO

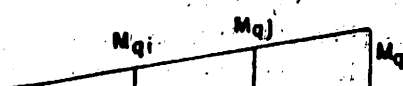
c) HIPERESTATICA $X_1 = 1$



SISTEMA

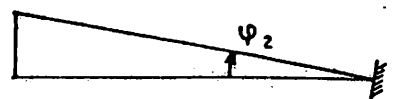
MOMENTO

d) HIPERESTATICA $X_2 = 1$



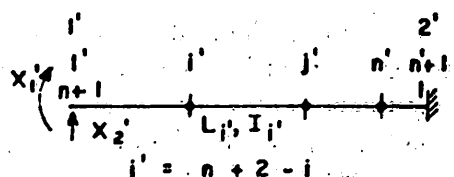
$$M_1^o = X_1 ; M_2^o = -M_q - X_1 - X_2 L$$

e) MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO DEBIDOS A UNA CARGA q



$$k_{12} = X_1 ; k_{22} = -X_1 - L X_2$$

SISTEMA ORIGINAL



$$k_{21} = X_1' ; k_{11} = -X_1' - L X_2'$$

SISTEMA REBATIDO (')

f) RIGIDEZES

FIGURA 2. Momentos en un intervalo i y algoritmos para determinar momentos de empotramiento y rigideces

intervalo i - j tiene una longitud L_i , un momento de inercia I_i y abscisas en sus extremos X_i y X_j .

La distribución y magnitud de los momentos en los extremos del intervalo se anotan, tanto para las hiperestáticas como para la carga distribuida.

En la Figura 2e se indica como se puede determinar los momentos de empotramiento, M_1 y M_2 , en función de las hiperestáticas.

Para la determinación de las rigideces se indica en la Figura 2f el procedimiento seguido, a saber las rigideces k_{12} y k_{22} se determinan sobre el sistema original y las rigideces k_{21} y k_{11} sobre el sistema rebatido.

Este procedimiento naturalmente implica la solución de dos sistemas de ecuaciones, lo que no representa ninguna dificultad cuando se programa el procedimiento, ya que el mismo algoritmo permite la solución elegantemente.

Aunque, como consecuencia del teorema de Betti-Maxwell, las rigideces k_{12} y k_{21} son iguales, se pueden calcular independientemente para comprobar el algoritmo.

Este procedimiento formal estrictamente solo se requiere cuando el elemento no presenta simetría respecto al centro de la luz. Cuando el elemento no presenta simetría, todas las rigideces se pueden determinar a partir del sistema original mediante condiciones de simetría.

Los incrementos de los coeficientes de flexibilidad de un intervalo i , en el que la inercia es constante, se determinan mediante el método de las fuerzas virtuales, de manera muy simple cuando los diagramas de momento son lineales, utilizando las integrales de Mohr y evaluando, cuando la carga es distribuida, las integrales del trabajo interno de deformación.

En la Figura 3 se ilustra el procedimiento y se anotan las expresiones para evaluar los incrementos de todos los coeficientes de flexibilidad en el intervalo.

En esta misma Figura se representan las distribuciones de momentos, tanto para las solicitaciones

reales como virtuales. Estas últimas se identifican con el subíndice v .

La consideración en los extremos del elemento de las aquí llamadas «articulaciones elásticas», o por Aristizábal (2) «conexiones semirígidas» se hace fácilmente en la forma indicada en la Figura 4. En ella se anotan los correspondientes incrementos de los coeficientes de flexibilidad debidos a las dos articulaciones elásticas en los extremos. Como se observa, su consideración no representa dificultad alguna.

Las expresiones finales para la determinación de los coeficientes de flexibilidad en el elemento recto con variaciones de inercia de tramo en tramo y con articulaciones elásticas en los extremos se anotan en la Tabla 1. A fin de considerar las rigideces como base común las expresiones están en función de las rigideces de los tramos, K_1 , y de las rigideces de las articulaciones elásticas en los extremos, K_1 y K_2 .

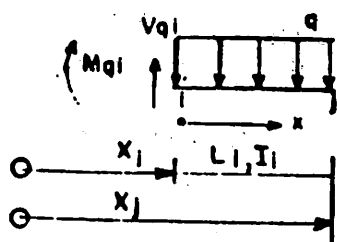
En la Tabla 2 se anotan, además de las condiciones de compatibilidad, los algoritmos para la determinación de las hiperestáticas (8 a 10), de los momentos de empotramiento (11 y 12) y de las rigideces (13 a 16). Estas expresiones permiten, entonces, efectuar el análisis completo para el elemento cuyo eje no rota.

Cuando el eje del elemento rota, basta con descomponer las rotaciones del elemento en sus extremos en:

- las rotaciones respecto al eje de referencia y
- la rotación del eje de referencia.

Este procedimiento está indicado en la Figura 5, donde, además, se anotan las convenciones positivas. Las expresiones 17 y 18 anotadas son entonces, las expresiones generalizadas del método de las rotaciones -«slope deflection»- para elementos no prismáticos, tal como las representan Guldán (13) y Timoshenko (16).

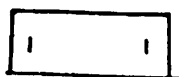
Mediante las condiciones de equilibrio se pueden determinar los elementos de la matriz de rigidez, cuando solo se considera la deformación por flexión. Estos elementos están anotados en la Tabla 3.



$$V_{qx} = V_{qi} - qx$$

$$M_{qx} = M_{qi} + x V_{qi} - \frac{q x^2}{2}$$

a) SISTEMA Y EXPRESIONES PARA LAS RESULTANTES

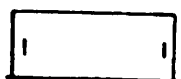


$$X_i = 1$$

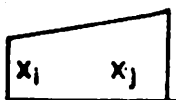


$$X_{iv} = 1$$

$$E\Delta\delta_{11} = \frac{L_i}{I_i}$$

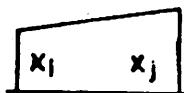


$$X_{iv} = 1$$

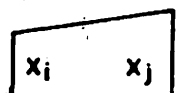


$$X_j = 1$$

$$E\Delta\delta_{12} = \frac{L_i}{2I_i} (X_i + X_j)$$



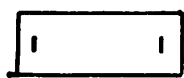
$$X_i = 1$$



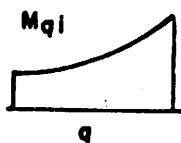
$$X_{iv} = 1$$

$$E\Delta\delta_{22} = \frac{L_i}{3I_i} (X_i^2 + X_i X_j + X_j^2)$$

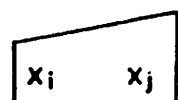
b) INCREMENTOS DEBIDOS A LAS HIPERESTATICAS



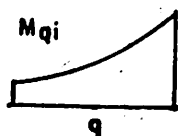
$$X_{iv} = 1$$



$$E\Delta\delta_{10} = \frac{L_i}{6I_i} (+6M_{qi} + 3L_i V_{qi} - L_i^2 q)$$



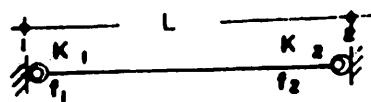
$$X_{2v} = 1$$



$$E\Delta\delta_{20} = \frac{L_i}{24I_i} \left[+24 X_i M_{qi} + 12 L_i (X_i V_{qi} + M_{qi}) + 8 L_i^2 (V_{qi} - 0,5 q X_i) - 3 q L_i^3 \right]$$

c) INCREMENTOS DEBIDOS A LA CARGA TRANSVERSAL q

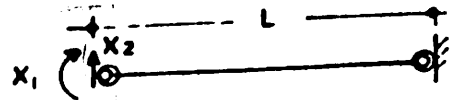
FIGURA 3. Incrementos de los desplazamientos en un intervalo i debidos a las hiperestáticas y a la carga transversal q



INDETERMINADO

$$M = K \delta$$

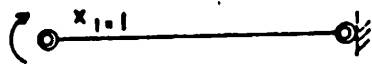
$$f = K^{-1}$$



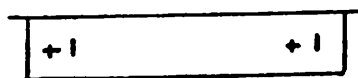
DETERMINADO

$$\delta = f M$$

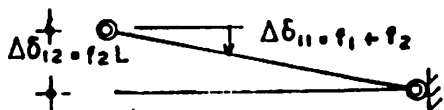
a) SISTEMAS ESTATICOS



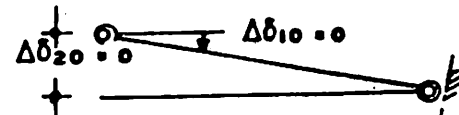
SISTEMA



MOMENTO

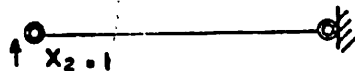


ELASTICA

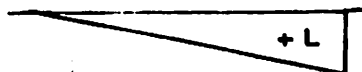
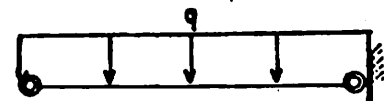


HIPERESTATICA $X_1 = 1$

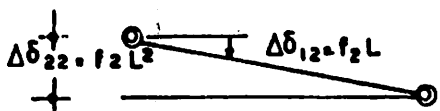
ROTACION DEL APOYO 2, Ψ_2



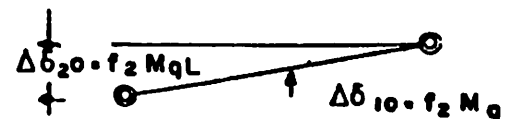
SISTEMA



MOMENTO



ELASTICA



HIPERESTATICA $X_2 = 1$

CARGA TRANSVERSAL q

b) HIPERESTATICAS Y ACCIONES EXTERNAS

FIGURA 4. Incrementos de los desplazamientos debidos a articulaciones "rígidas" al considerar la barra indeformable

TABLA 1. Expresiones para el cálculo de los coeficientes de flexibilidad

RIGIDEZ DEL INTERVALO i : $k_i = \frac{EI_i}{L_i}$

a) DEBIDOS A LAS HIPERESTATICAS

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} + \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{X_i + X_j}{k_i} + \frac{L}{K_2} \quad (2)$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2 + X_i X_j + X_j^2}{k_i} + \frac{L^2}{K_2} \quad (3)$$

b) ROTACION DEL APOYO 2, φ_2 ($\varphi_2=1$)

$$\delta_{10} = \varphi_2 \quad (4)$$

$$\delta_{20} = L\varphi_2 \quad (5)$$

c) CARGA DISTRIBUIDA, q

$$\delta_{10} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \frac{6 M_{qi} + 3 L_i V_{qi} - L_i^2 q}{k_i} + \frac{M_q}{K_2} \quad (6)$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^n \frac{24 X_i M_{qi} + 12 L_i (X_i V_{qi} + M_{qi}) + 8 L_i^2 (V_{qi} - 0,5 X_i q) - 3 L_i^3 q}{k_i} - \frac{LM_q}{K_2} \quad (7)$$

$$M_q = - \frac{L^2 q}{2}$$

TABLA 2. Expresiones para la determinación de hiperestáticas, momentos de empotramiento y rigideces.

a) CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = -\delta_{10} \quad \delta_{12} = \delta_{21}$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = -\delta_{20}$$

b) DETERMINACION DE HIPERESTATICAS

$$D = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2 \quad (8)$$

$$X_1 = - \frac{\delta_{22} \delta_{10} - \delta_{12} \delta_{20}}{D} \quad (9)$$

$$X_2 = - \frac{-\delta_{12} \delta_{10} + \delta_{11} \delta_{20}}{D} \quad (10)$$

c) MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO DE CARGA DISTRIBUIDA q

$$M_1^o = X_1 \quad (11)$$

$$M_2^o = - (X_1 + L X_2) - M_q \quad (12)$$

d) RIGIDECES

SISTEMA ORIGINAL

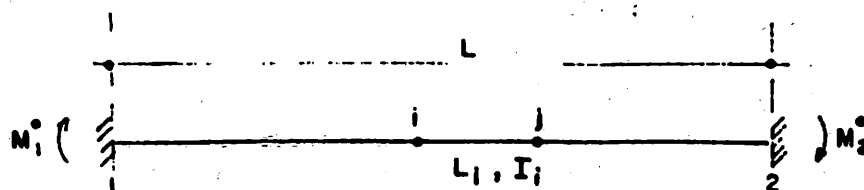
$$k_{12} = X_1 \quad (13)$$

$$k_{22} = - (X_1 + L X_2) \quad (14)$$

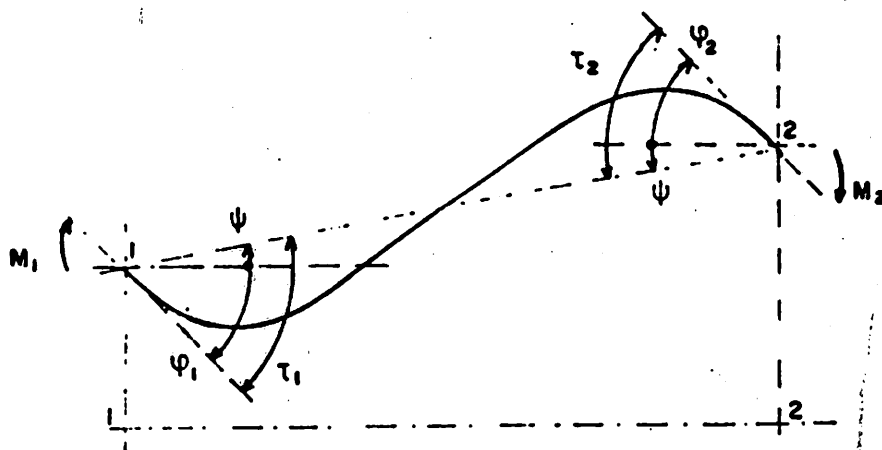
SISTEMA REBATIDO (/)

$$k_{21} = X_1' \quad (15)$$

$$k_{11} = - (X_1' + L X_2') \quad (16)$$



a) ELEMENTO ORIGINAL Y MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO



b) ELEMENTO DEFORMADO Y MOMENTOS FINALES

$$\tau_1 = \phi_1 + \psi$$

$$\tau_2 = \phi_2 + \psi$$

c) ROTACIONES DE LOS NUDOS RESPECTO A LA CUERDA SECANTE

$$M_1 = M_1^0 + k_{11}\tau_1 + k_{12}\tau_2 = M_1^0 + k_{11}\phi_1 + k_{12}\phi_2 + (k_{11} + k_{12})\psi \quad (17)$$

$$M_2 = M_2^0 + k_{21}\tau_1 + k_{22}\tau_2 = M_2^0 + k_{21}\phi_1 + k_{22}\phi_2 + (k_{21} + k_{22})\psi \quad (18)$$

d) EXPRESIONES GENERALES DE LOS MOMENTOS

FIGURA 5. Elemento, convenciones y momentos.

4. ANALISIS A PARTIR DEL ELEMENTO SIN ARTICULACIONES

Wang y Salmon (17) y Aristizábal (2) al analizar el elemento con articulaciones elásticas parten de las rigideces y momentos de empotramiento del elemento sin articulaciones y mediante procedimientos bastante elaborados determinan las correspondientes propiedades del elemento con las articulaciones elásticas.

Sus procedimientos resultan elaborados, ya que optan para un sistema de dos grados de libertad por una representación matricial.

Aunque, gracias al algoritmo presentado aquí, es posible determinar directamente estas propiedades sin conocer antes las del elemento sin articulaciones, se presenta a continuación, más bien como aplicación de los métodos del análisis estructural y del mismo algoritmo, la determinación de las rigideces.

En la Figura 6 se indica el procedimiento a partir de las rigideces correspondientes a las rotaciones nodales del elemento hasta determinar los coeficientes de flexibilidad necesarios para la aplicación del algoritmo.

Los elementos con y sin articulaciones, así como las hiperestáticas y desplazamientos correspondientes, están indicados en la Figura 6a.

Las expresiones para determinar las rigideces del elemento en el sentido de los desplazamientos en el extremo 1, tomadas de la Tabla 3, están anotadas en la Figura 6b.

En la Figura 6c están anotadas las condiciones de equilibrio en su forma canónica, que se pueden transformar para determinar los desplazamientos a partir de las rigideces y las hiperestáticas.

Tal como se anota en la Figura 6d, se determinan estos desplazamientos y sus respectivas componentes en el sentido de las hiperestáticas.

Los coeficientes de flexibilidad definitivos, correspondientes a las expresiones 1 a 3 del algoritmo, están anotados finalmente en la Figura 6e. De-

terminados estos coeficientes se sigue el resto del algoritmo.

No ha sido posible encontrar un procedimiento análogo para la determinación de los momentos de empotramiento. Esto se debe, aparentemente, a la influencia de la variación de los momentos de inercia a lo largo de la luz en los desplazamientos en el sentido de las hiperestáticas.

Wang y Salmon (17) presentan dos algoritmos para la determinación de los momentos de empotramiento, de los cuales el segundo, el que permite su determinación sin conocimiento de las rigideces de la barra con articulaciones, se considera el más simple y directo. Este método, sin embargo, no se presenta aquí, porque, como se anota antes, realmente no se requiere.

Estos autores, a manera de síntesis, anotan las expresiones -no matriciales- realmente requeridas para la determinación de los momentos de empotramiento y de las rigideces correspondientes a las rotaciones nodales.

5. SISTEMATIZACION

La sistematización del algoritmo presentado no presenta dificultad alguna, ya que las operaciones más complicadas son las sumatorias sobre los intervalos.

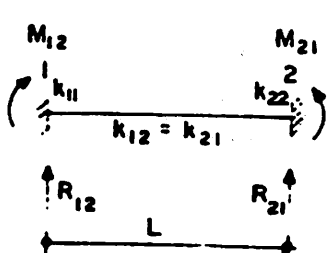
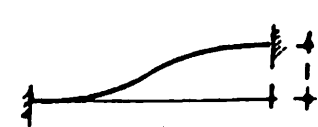
Sin embargo se presentan algunos casos particulares que deben ser considerados.

El código ACI 318-89 (1), por ejemplo, especifica que en los extremos de las columnas se deben considerar inercias infinitas sobre intervalos especificados.

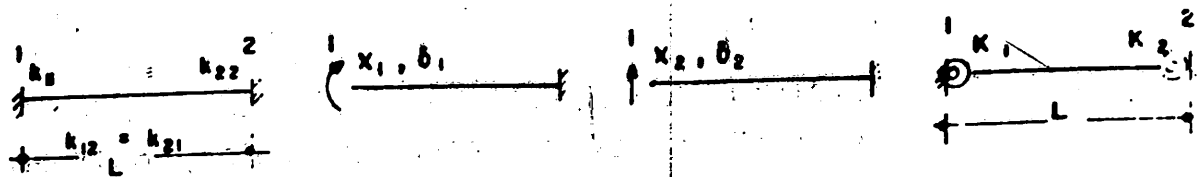
En este caso, al sistematizar, la inercia infinita se hace igual a cero y se establece la condición para no considerar los respectivos sumandos de la sumatoria, cuando la inercia es nula. De esta manera los coeficientes de flexibilidad quedan sin las componentes de los intervalos con inercia infinita.

Si el algoritmo pretende, además, incluir las articulaciones elásticas en los extremos, se debe considerar la posibilidad de que estas, en algunos casos, no existan.

TABLA 3. Reacciones en la viga empotrada - empotrada debidas a rotaciones y desplazamientos transversales unitarios. Elementos de la matriz de rigidez

SISTEMA	REACCIONES			
	M_{12}	R_{12}	M_{21}	R_{21}
	$K_{11} = +k_{11}$	$K_{12} = -A$	$K_{13} = +k_{12}$	$K_{14} = +A$
	$K_{21} = -A$	$K_{22} = +C$	$K_{23} = -B$	$K_{24} = -C$
	$K_{31} = +k_{21}$	$K_{32} = -B$	$K_{33} = +k_{22}$	$K_{34} = +B$
	$K_{41} = +A$	$K_{42} = -C$	$K_{43} = +B$	$K_{44} = +C$

$$k_{12} = k_{21}, \quad A = \frac{k_{11} + k_{12}}{L}, \quad B = \frac{k_{21} + k_{22}}{L}, \quad C = \frac{A + B}{L}$$



a) SISTEMAS, HIPERESTATICAS Y DESPLAZAMIENTOS

$$K_{11} = k_{11}$$

$$K_{12} = -A = -(k_{11} + k_{12})L^{-1}$$

$$K_{22} = +C = (k_{11} + 2k_{12} + k_{22})L^{-2}$$

b) RIGIDECES EN EL SENTIDO DE LAS HIPERESTATICAS

$$K_{11}\delta_1 + K_{12}\delta_2 = X_1$$

$$K_{21}\delta_1 + K_{22}\delta_2 = X_2$$

c) CONDICIONES DE EQUILIBRIO

$$D_K = K_{11}K_{22} - K_{12}^2$$

$$\delta_1 = (+K_{22}X_1 - K_{12}X_2)D_K^{-1}$$

$$\delta_2 = (-K_{21}X_1 + K_{11}X_2)D_K^{-1}$$

$$\Delta\delta_{11} = +K_{22}D_K^{-1}$$

$$\Delta\delta_{12} = -K_{12}D_K^{-1}$$

$$\Delta\delta_{22} = +K_{11}D_K^{-1}$$

d) COMPONENTES DE LOS COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD

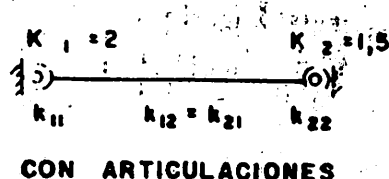
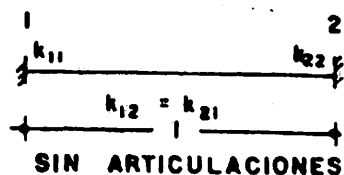
$$\delta_{11} = \Delta\delta_{11} + K_{11}^{-1} + K_{22}^{-1}$$

$$\delta_{12} = \Delta\delta_{12} + LK_{12}^{-1}$$

$$\delta_{22} = \Delta\delta_{22} + L^2K_{22}^{-1}$$

e) COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD

FIGURA 6. Determinación de los coeficientes de flexibilidad a partir de las rigideces de la barra sin articulaciones elásticas



a) SISTEMAS

SISTEMA ORIGINAL

SISTEMA REBATIDO (')

$$k_{11} = 8, k_{12} = 5, k_{22} = 10$$

$$k'_{11} = 10, k'_{12} = 5, k'_{22} = 8$$

b) RIGIDECE POR ROTACIONES NODALES

$$K_{11} = 8, K_{12} = -13, K_{22} = 28, D_K = 55 \quad | \quad K'_{11} = 10, K'_{12} = 15, K'_{22} = 28, D'_K = 55$$

c) RIGIDECE POR DESPLAZAMIENTOS EN 1

$$\Delta \delta_{11} = 28 \times 55^{-1} = 0,5091$$

$$\Delta \delta'_{11} = 28 \times 55^{-1} = 0,5091$$

$$\Delta \delta_{12} = 13 \times 55^{-1} = 0,2364$$

$$\Delta \delta'_{12} = 15 \times 55^{-1} = 0,2727$$

$$\Delta \delta_{22} = 8 \times 55^{-1} = 0,1455$$

$$\Delta \delta'_{22} = 10 \times 55^{-1} = 0,1818$$

d) COMPONENTES DE LOS COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD

$$\delta_{11} = 0,5091 + 2^{-1} + 1,5^{-1} = 1,6758$$

$$\delta'_{11} = 0,5091 + 1,5^{-1} + 2^{-1} = 1,6758$$

$$\delta_{12} = 0,2364 + 1,5^{-1} = 0,9030$$

$$\delta'_{12} = 0,2727 + 2^{-1} = 0,7727$$

$$\delta_{22} = 0,1455 + 1,5^{-1} = 0,8121$$

$$\delta'_{22} = 0,1818 + 2^{-1} = 0,6818$$

e) COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD

$$x_1 = 0,1667, x_2 = -1,4167$$

$$x'_1 = 0,1667, x'_2 = -1,6556$$

$$k_{11} = 1,4889$$

$$k_{12} = k_{21} = 0,1667$$

$$k_{22} = 1,250$$

f) HIPERESTATICAS Y RIGIDECE - ELEMENTO ARTICULADO

FIGURA 10. Determinación de las rigideces relativas de la barra con articulaciones a partir de las de barra sin articulaciones. (Wang y Salmon (17), Ejemplo 17.6.2)

Esto se logra, cuando no hay articulación presente, haciendo su rigidez K igual a cero y al establecer la condición para no considerar en estos casos los correspondientes términos de la sumatoria.

Debe tenerse presente que en ambos casos la inercia nula establecida es precisamente lo contrario de la inercia infinita real, pero esta es una forma simple para considerarla.

En su versión más amplia el programa permite el análisis del elemento con articulaciones elásticas a partir del elemento sin las articulaciones. Como ya se ha anotado antes, gracias al algoritmo propuesto, este procedimiento realmente no se necesita.

6. APLICACIONES

6.1. Presentación

Como la aplicación y comprobación del algoritmo propuesto se consideran más adelante los siguientes casos:

- viga de inercia variable,
- elemento con inercia infinita en los extremos,
- análisis a partir del elemento sin articulaciones y
- elemento con articulaciones elásticas en los extremos.

Los resultados obtenidos en estos casos se pueden comparar con los calculados por otros autores. Aquí la evaluación se hace mediante el programa RIGIDLUZ.GEN -rigideces de la luz generalizada- elaborado en BASIC y en algunos casos también mediante las soluciones analíticas encontradas.

Obviamente las soluciones analíticas son más simples de utilizar y, por lo tanto, se deben preferir a las soluciones numéricas, especialmente cuando se procede de manera manual. Además, en este trabajo sirven para indicar la aplicación del algoritmo propuesto.

6.2. Viga de inercia variable

En la Figura 7a se presenta el sistema analizado por Wang y Salmon (17) con sus respectivos resultados. A fin de destacar la enorme diferencia respecto a las rigideces de elementos prismáticos

(p.e. 7,44 contra 4,00) se consideran valores relativos de las inercias y de las longitudes. La variación en los momentos de empotramiento no es, en este caso, tan apreciable. (p.e. 0,0983 contra 0,0833).

La relación entre las rigideces K_{12} y K_{11} , $4,820/7,443 = 0,648$, es diferente al valor constante 0,5 de los elementos prismáticos.

6.3. Elemento con inercia infinita en los extremos

Inicialmente se presenta en la Figura 7b el sistema analizado por Wang y Salmon (17). En este caso se observa también, que los resultados prácticamente coinciden y, además, que a pesar de las pequeñas longitudes relativas de los intervalos de inercia infinita, las rigideces pueden aumentar en más de un ciento por ciento respecto a las consideradas en elementos prismáticos.

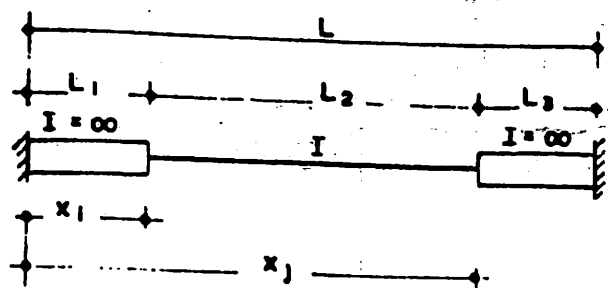
Este problema es análogo al que se presenta en pórticos conformados con muros en lugar de columnas, ya que por las mismas dimensiones del muro no es apropiado considerar vigas prismáticas entre los nudos de intersección de los elementos.

En este caso es posible determinar mediante el algoritmo propuesto una solución analítica, tal como se indica a continuación.

En la Figura 8a se representa el sistema con las longitudes de los intervalos de inercia infinita. Los coeficientes de flexibilidad según las definiciones de la Tabla 1 están evaluados en la Figura 8b. Las hiperestáticas y las rigideces están anotadas en las Figuras 8c y 8d. La determinación completa de las rigideces puede hacerse por simple inducción, en vez de considerar el sistema rebatido.

Estas expresiones analíticas son equivalentes a las anotadas por Ghali y Neville (10) para las rigideces correspondientes a las rotaciones nodales. Las rigideces correspondientes, tanto a las rotaciones nodales como axiales se pueden determinar como se indica en la Tabla 3.

De mucho interés práctico es la evaluación de la influencia de los intervalos de inercia infinita en



$$x_i = L_1$$

$$x_j = L_1 + L_2$$

$$k' = \frac{EI}{L_2}$$

a) SISTEMA

$$\delta_{11} = \frac{1}{k'}, \quad \delta_{12} = \frac{2L_1 + L_2}{2k'}, \quad \delta_{22} = \frac{3L_1^2 + 3L_1L_2 + L_2^2}{3k'}$$

$$D = \frac{L_2^2}{12k'^2}$$

b) COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD

$$x_1 = 2k' \left[1 + 3(L_1 + L_3)L_2^2 + 6L_1L_3L_2^2 \right]$$

$$x_2 = -6k'(L_2 + 2L_3)L_2^2$$

c) HIPERESTATICAS EN EL SISTEMA ORIGINAL

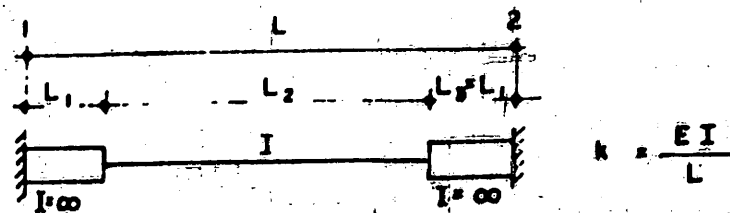
$$k_{11} = 4k' \left[1 + 3L_1(L_1 + L_2)L_2^2 \right]$$

$$k_{12} = k_{21} = 2k' \left[1 + 3(L_1 + L_3)L_2^2 + 6L_1L_3L_2^2 \right]$$

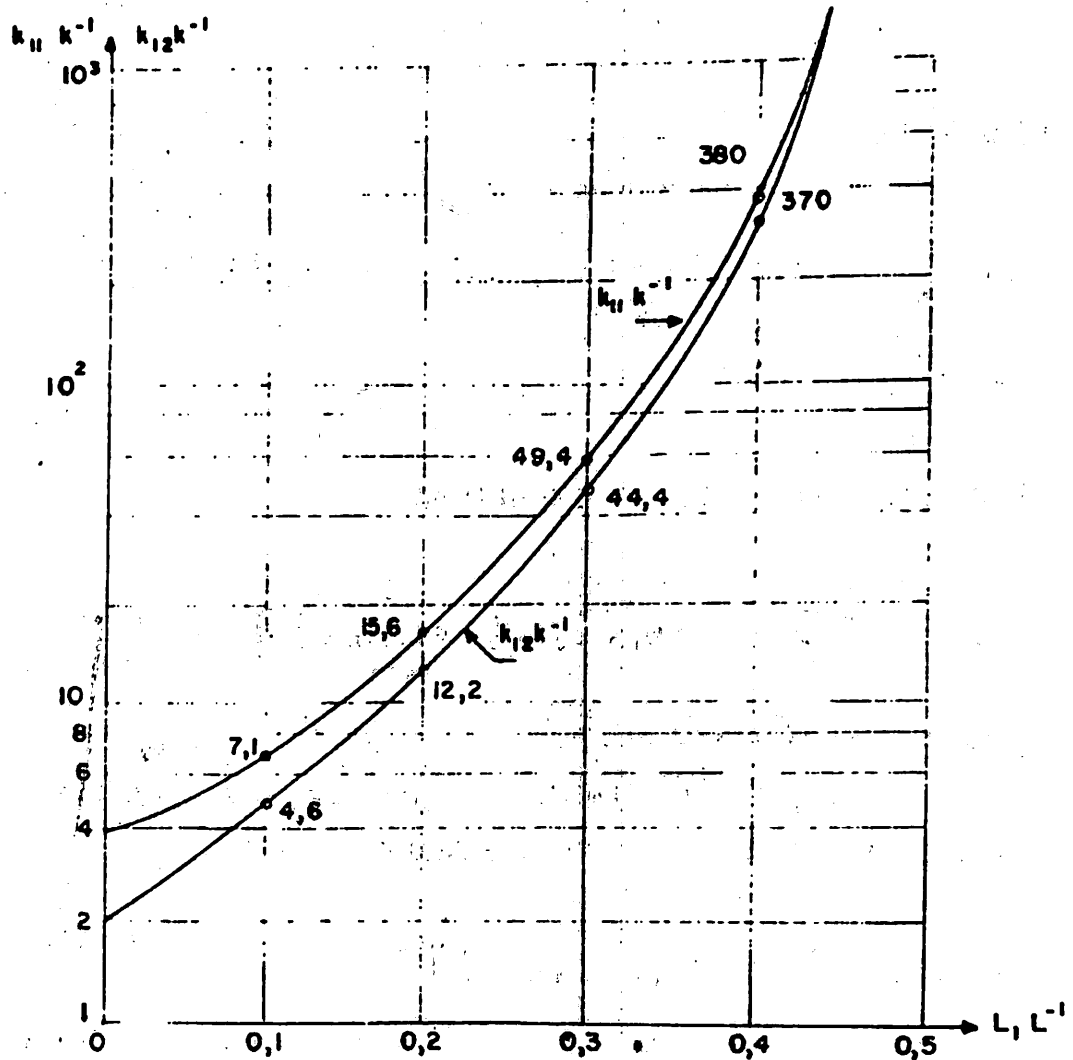
$$k_{22} = 4k' \left[1 + 3L_3(L_2 + L_3)L_2^2 \right]$$

d) RIGIDECES

FIGURA 8. Determinación de las rigideces en un elemento recto con intervalos de inercia infinita en los extremos



a) SISTEMA



b) REPRESENTACION GRAFICA

$$k_{11} k^{-1} = \frac{3 + (L_2 L^{-1})^2}{(L_2 L^{-1})^3} ; k_{12} k^{-1} = \frac{3 - (L_2 L^{-1})^2}{(L_2 L^{-1})^3}$$

c) EXPRESIONES ANALITICAS

FIGURA 9. Variación de rigideces en un elemento simétrico con intervalos de inercia infinita en los extremos

las rigideces. Precisamente para cuantificarla se considera en la Figura 9a un elemento con intervalos iguales de inercia infinita en los extremos. Las expresiones simplificadas para el cálculo de las rigideces en este elemento simétrico están anotadas en la Figura 9c.

La representación gráfica de la evaluación está indicada en la Figura 9b, en la que el eje de ordenadas está en escala logarítmica. Es interesante observar, por ejemplo, que cuando la longitud de cada uno de los intervalos de inercia infinita es una quinta parte de la luz del elemento $-L_1/L = 0,2$ las rigideces son de cuatro (15,6) a seis (12,2) veces las determinadas en el elemento prismático (4 y 2).

Finalmente conviene resaltar que las rigideces del elemento de la Figura 7b se pueden evaluar directamente mediante las expresiones de la figura 8d como se puede comprobar fácilmente.

6.4. Análisis a partir del elemento sin articulaciones

Como aplicación del algoritmo anotado en la Figura 6 y, como se anota antes, más bien como aplicación de los métodos clásicos del análisis estructural, se determinan en la Figura 10 las rigideces relativas de un elemento sin articulaciones elásticas.

En esta Figura se ilustra el procedimiento completo, tanto par el sistema original, como para el sistema rebatido, hasta la determinación de las rigideces relativas en el sistema con articulaciones elásticas en los extremos.

Los resultados coinciden con los determinados por Wang y Salmon (17). Es apreciable la reducción ocasionada por las articulaciones elásticas en la magnitud de las rigideces.

6.5. Elementos prismáticos con articulaciones elásticas en los extremos

En los elementos prismáticos con una o dos articulaciones elásticas en los extremos, al algoritmo propuesto también permite determinar soluciones analíticas del problema.

Inicialmente se analiza el elemento con una articulación elástica. En la Figura 11 está indicado

todo el procedimiento. Como el elemento no es simétrico deben considerarse los sistemas original y rebatido.

En la evaluación se sigue el procedimiento indicado en las Tablas 1 y 2.

Para utilizar el concepto de grado de empotramiento difundido en el medio por García (9), basta, por ejemplo, con dividir la expresión de la rigidez k_{11} por la rigidez del elemento prismático, $4k$, y se obtiene aquí la misma expresión determinada por este autor.

Aquí se considera de especial interés la variación de las rigideces con la relación entre la rigidez del elemento prismático y la rigidez de la articulación, k/K . Estas variaciones están representadas en las Figuras 12b y 12c en formas gráfica y numérica.

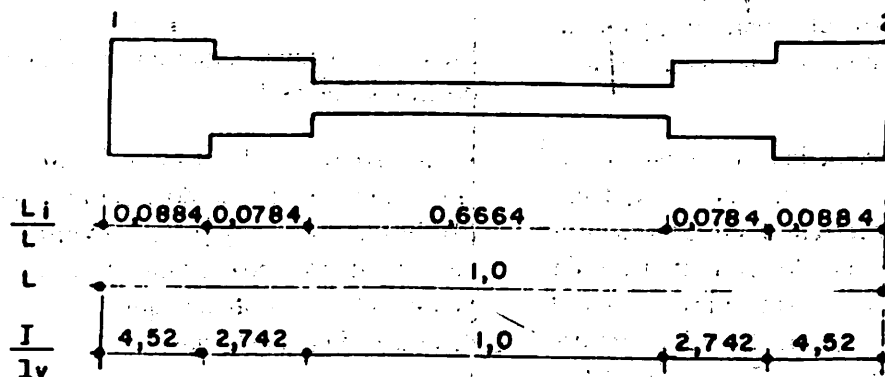
En ambas Figuras se observa cómo las rigideces rotacionales tienden hacia los conocidos valores límites correspondientes a la articulación rígida de rigidez K infinita, y a la articulación perfecta de rigidez K nula. Fácilmente se pueden determinar estas rigideces rotacionales en ambos límites.

Al observar la representación gráfica, se puede concluir, que en la práctica:

- se puede asumir un empotramiento perfecto en 1, cuando la relación de rigideces k/K es menor o igual que 0,01,
- se puede asumir una articulación perfecta en 1, cuando la relación de rigideces k/K es mayor o igual que 10 y
- se deben calcular las rigideces rotacionales cuando la relación está entre los límites anteriores.

En la práctica el caso de la columna empotrada elásticamente es de bastante interés y los anteriores son algoritmos que permiten determinar sus rigideces para un análisis de pórticos por el método de los desplazamientos.

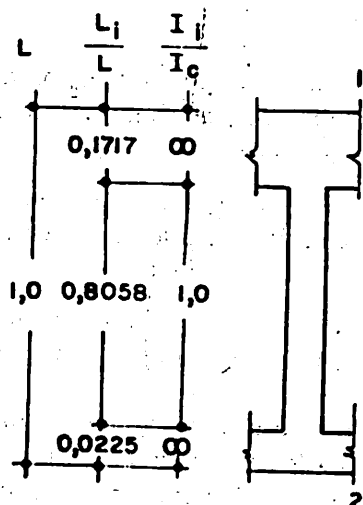
En el caso del elemento prismático con dos articulaciones elásticas diferentes en los extremos, las rigideces también se pueden determinar analíticamente, tal como se indica en la Figura 13.



RIGIDECES DIVIDIDAS POR EI_v/L y MOMENTO DE EMPOTRAMIENTO DIVIDIDO POR qL^2

	k_{11}	$k_{12} = k_{21}$	k_{22}	$-M_1^o = M_2^o$
WANG, SALMON	7,45	4,83	—	0,0985
RIGIDLIZ . GEN	7,443	4,820	7,443	0,0983

a) VIGA DE INERCIA VARIABLE

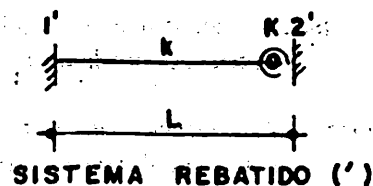
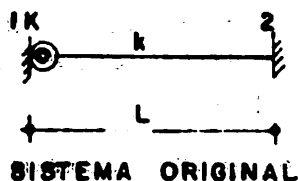


RIGIDECES DIVIDIDAS POR EI_c/L

	k_{11}	$k_{12} = k_{21}$	k_{22}
WANG, SALMON	8,84	4,36	5,39
RIGIDLIZ . GEN	8,813	4,365	5,391

b) COLUMNA DE INERCIA VARIABLE

FIGURA 7. Rigideces y momentos de empotramiento calculados por Wang y Salmon (17) comparados con los calculados con el programa RIGIDLIZ. GEN



a) SISTEMAS

$$\delta_{11} = \frac{K + k}{Kk}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{L}{2k}$$

$$\delta_{22} = \frac{L^2}{3k}$$

$$\delta'_{11} = \frac{K + k}{K'k}$$

$$\delta'_{12} = \delta'_{21} = \frac{L(K + 2k)}{2Kk}$$

$$\delta'_{22} = \frac{L^2(K + 3k)}{3Kk}$$

b) COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD

$$D = \frac{L^2(K + 4k)}{12Kk^2}$$

$$X_1 = \frac{2Kk}{K + 4k}$$

$$X_2 = -\frac{6k(K + 2k)}{L(K + 4k)}$$

$$D' = \frac{L^2(K + 4k)}{12K'k^2}$$

$$X'_1 = \frac{2K'k}{K + 4k}$$

$$X'_2 = -\frac{6K'k}{L(K + 4k)}$$

c) HIPERESTATICAS

$$k_{11} = +\frac{4k}{1 + \frac{4k}{K}}, \quad k_{12} = k_{21} = +\frac{2k}{1 + \frac{4k}{K}}, \quad k_{22} = +\frac{4k(1 + \frac{3k}{K})}{1 + \frac{4k}{K}}$$

d) RIGIDECES

FIGURA II. Determinación de las rigideces de un elemento prismático empotrado elásticamente en un extremo

El procedimiento indicado corresponde al sistema original y, para la determinación de las rigideces faltante se puede proceder por la inducción.

La variación de las rigideces en el elemento con articulaciones elásticas iguales en los extremos está representada para diferentes relaciones de rigidez en la Figura 14. Las expresiones para evaluar las rigideces anotadas en la Figura 14c son equivalentes a las presentadas por Gere y Weaver (11).

Es interesante observar que en este caso los comportamientos característicos corresponden a los mismos límites del caso anterior, aunque en este caso, para articulaciones de rigidez nula, todas las rigideces también lo son.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Al algoritmo propuesto utiliza solamente el método más simple para el análisis de sistemas estáticamente indeterminadas y no requiere analogías u otros artificios para el análisis de elementos rectos.

Precisamente en su simpleza radica su elegancia.

Aunque inicialmente el algoritmo es elaborado para su aplicación en el Método del Pórtico Equivalente, se puede utilizar en muchos otros casos, tal como se presenta en las aplicaciones.

De todas maneras se considera que este algoritmo atiende parcialmente a la solicitud de Mac Gregor (15) por una presentación más clara y más adecuada a la sistematización del Método del Pórtico Equivalente.

La sistematización requiere aún de un algoritmo más general que permita el análisis de pórticos conformados por elementos rectos no prismáticos, que considere, por lo tanto, rigideces diferentes a las del elemento prismático.

El algoritmo se puede generalizar aún más, por ejemplo, para considerar cargas variables en los intervalos, cargas concentradas, vigas acarteladas, etc. Estas posibilidades no se consideran aquí, a fin de no complicarlo innecesariamente.

En general, se debe llamar la atención sobre la sensibilidad de las rigideces al considerar modelos más reales, ya sea con inercias infinitas o con articulaciones elásticas.

El autor definitivamente cree, que el algoritmo propuesto aquí, no solo supera a la analogía de la columna por lo simple y elemental, sino también al propuesto por Funk y Wang (17), por las mismas razones, y porque también permite considerar articulaciones elásticas en los extremos.

8. CONVENCIONES

8.1. Generales

- E : Módulo de Elasticidad
- I, I_i : Momentos de inercia de la sección del elemento o de las secciones en los intervalos
- L, L_i : Longitudes del elemento y del intervalo i
- L_1, L_2, L_3 : Longitudes de los intervalos 1, 2 y 3
- n : Número de intervalos en el elemento
- X_i, X_j : Abscisas en los extremos del intervalo i
- x : Abscisa local en el intervalo $i - j$

8.2. Rigideces

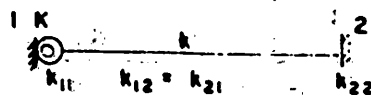
- k, k_i : Rigidez EI/L ó EI/L_i
- K, K_1, K_2 : Rigideces de las articulaciones elásticas
- k_{ij} : Rigideces correspondientes a las rotaciones nodales ($i, j = 1, 2$)
- K_{ij} : Rigideces correspondientes a las rotaciones nodales y axiales ($i, j = 1, 4$)
- A, B, C, F : Factores para la determinación de rigideces

8.3. Acciones y solicitaciones

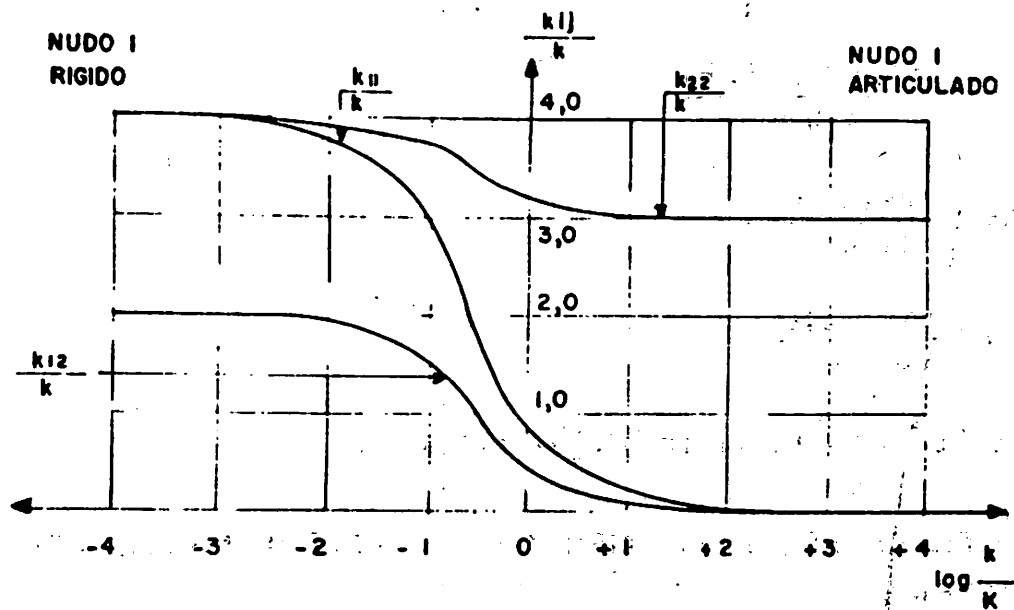
- q : Carga distribuida sobre el elemento
- M_q : Momento en el voladizo
- M_1, M_2 : Momentos de empotramiento
- M_1, M_2 : Momentos finales
- V_{qi} : Cortante en i debida a la carga q
- M_{qi} : Momento en i debido a la carga q

8.4. Desplazamientos e hiperestáticas

- $\bar{a}_{ij}$: Coeficientes de flexibilidad ($i, j = 1, 2$)
- $\bar{a}_{io}$: Desplazamientos debidos a las acciones externas ($i, j = 1, 2$)



a) SISTEMA

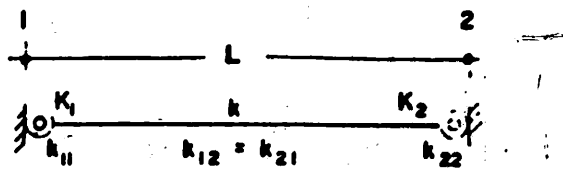


b) REPRESENTACION GRAFICA

	$\log \frac{k}{K}$				
	- 2	- 1	0	+ 1	+ 2
$\frac{k_{11}}{k} = \frac{4}{1 + \frac{4k}{K}}$	3,846	2,857	0,800	0,098	0,010
$\frac{k_{12}}{k} = \frac{2}{1 + \frac{4k}{K}}$	1,923	1,429	0,400	0,049	0,005
$\frac{k_{22}}{k} = \frac{4(1 + \frac{3k}{K})}{1 + \frac{4k}{K}}$	3,961	3,714	3,200	3,024	3,000

c) EVALUACION DE RIGIDECES

FIGURA 12. Representación gráfica y evaluación de las rigideces en el elemento prismático articulado en un extremo



a) SISTEMA

$$\delta_{11} = \frac{k K_1 + k K_2 + K_1 K_2}{k K_1 K_2}$$

$$\delta_{12} = \frac{(2k + K_2) L}{2k K_2}$$

$$\delta_{22} = \frac{(3k + K_2) L^2}{3k K_2}$$

$$12 D k^2 L^{-2} = F = 1 + 4k (K_1^{-1} + K_2^{-1}) + 12 k^2 (K_1 K_2)^{-1}$$

b) COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD Y DETERMINANTE DEL SISTEMA

$$X_1 = 2k F^{-1}$$

$$X_2 = -6k (1 + 2k K_1^{-1}) (LF)^{-1}$$

c) HIPERESTATICAS EN EL SISTEMA ORIGINAL

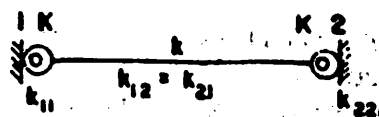
$$k_{11} = 4k (1 + 3k K_2^{-1}) F^{-1}$$

$$k_{12} = k_{21} = 2k F^{-1}$$

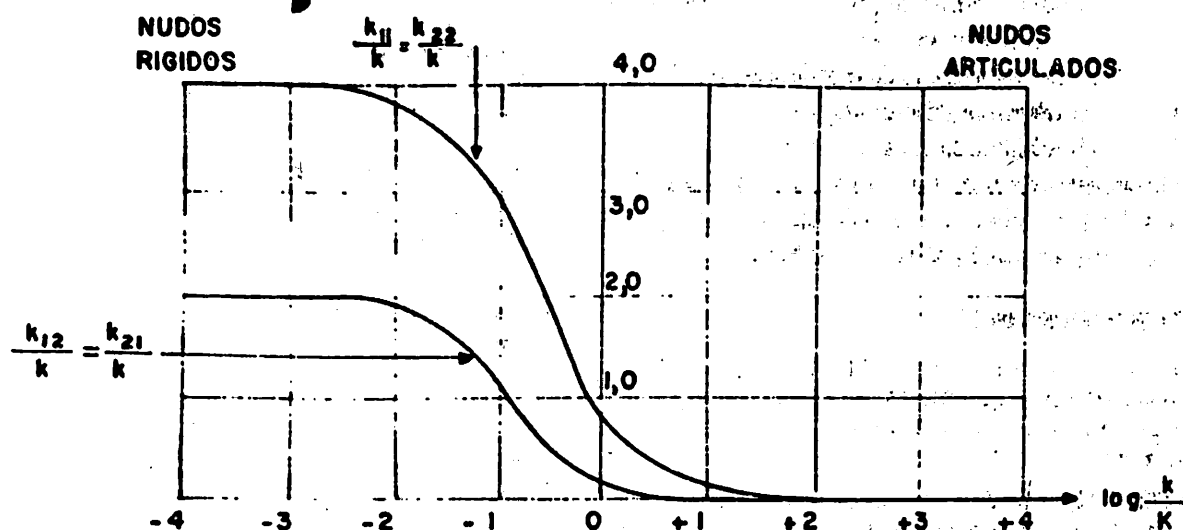
$$k_{22} = 4k (1 + 3k K_1^{-1}) F^{-1}$$

d) RIGIDECES

FIGURA 13. Determinación de las rigideces en un elemento prismático con articulaciones elásticas diferentes en sus extremos



a) SISTEMA



b) REPRESENTACION GRAFICA

	$\log \frac{k}{K}$				
	- 2	- 1	0	+ 1	+ 2
$\frac{k_{11}}{k} = \frac{k_{22}}{k} = \frac{4(1+3kK^{-1})}{(1+2kK^{-1})(1+8kK^{-1})}$	3,811	2,708	0,762	0,097	0,010
$\frac{k_{12}}{k} = \frac{k_{21}}{k} = \frac{2}{(1+2kK^{-1})(1+8kK^{-1})}$	1,850	1,042	0,095	0,002	0,000

c) EVALUACION DE RIGIDECES

FIGURA 14. Representación gráfica y evaluación de las rigideces en el elemento prismático articulado elásticamente en ambos extremos

- $\bar{a}_i$: Desplazamientos totales en el sentido de las hiperestáticas
- D : Determinante de la matriz de flexibilidad
- D_k : Determinante de la matriz de rigidez
- $\bar{a}_i$: Rotaciones de los voladizos o rotaciones de los nudos respecto al eje del elemento ($i = 1, 2$)
- $\bar{\theta}_i$: Rotaciones totales de los nudos ($i = 1, 2$)
- θ : Rotación del elemento
- X_i : Hiperestáticas ($i = 1, 2$)

Se puede presentar confusión entre la última convención y la de las abscisas. Para evitarla se pueden representar las hiperestáticas por S_i .

9. BIBLIOGRAFIA

1. ACIComite 318: Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-89) and Commentary (ACI 318R-89) American Concrete Institute, Detroit, Mich., USA, 1989
2. ARISTIZABAL O. José D.: Diseño Lateral de Edificios no Arriostrados con Sistemas de Losas en Dos Direcciones. Seminario American Concrete Institute, Miami, 1985
3. CASTRILLON O. Elkin: Introducción al Análisis y Diseño de Sistemas Estructurales con Losas en Dos Direcciones. AIDEMINAS, Medellín, Junio, 1991
4. CASTRILLON O. Tomás: Análisis estructural Intermedio AICUDEM, Medellín, 1978
5. CROSS Hardy y MORGAN Newlin Dolbey: Continuous Frames of Reinforced Concrete. 12a. Impresión Wiley, New York, USA, 1951
6. EL - MEZAINI Nasreddin, BALKAYA Can y CITIPITIO GLU Ergin: Analysis of Frames with Nonprismatic Members. ASCE Journal of Structural Engineering. Vol. 117, N° 6/p. 1573-1592, Junio, 1991
7. FUNK Raymond y WANG Kai-tih: Stiffnesses of Nonprismatic Member. ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 114, N°2, p. 489-494, Feb. 1988
8. GALLAGHER Richard H.: Finite Element Analysis Fundamentals Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1975
9. GARCIA Gabriel: La Distribución de Momentos por el Método del Grado de Empotramiento. Medellín, 1980
10. GHALI A. Y NEVILLE A.M.: Structural Analysis. 2ª Edición Chapman and Hall, Londres, GB, 1978
11. GERE James M. y WEAVER William: Analysis of Framed Structures. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, USA, 1965
12. GHOSH S.K. y RABBAT Basile G.: Notes on ACI 318-89 With Design Applications Portland Cement Association, Skokie, Illinois, USA, 1990
13. GULDAN Richard: Estructuras Aperticadas y Vigas Continuas. EL ATENEO, Buenos Aires, Argentina, 1956
14. HIRSCHFELD Kurt: Baustatik Springer, Berlín, Alemania, 1965
15. MAC GREGOR James M.: Reinforced Concrete Mechanics and Design Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1988
16. TIMOSHENKO S.P. y YOUNG D.H.: Theory of Structures. 2ª Edición Mc Graw Hill, Tokyo, Japón, 1965
17. WANG Chu-Kia y SALMON Charles G.: Reinforced Concrete Design. 4ª Edición Harper & Row, New York, USA, 1985
18. WANG Chu-Kia: Statically Indeterminate Structures. Mc Graw Hill-Kogakusha, Tokyo, Japón, 1953

¡50 AÑOS DE HISTORIA!

Queremos hacer un recordatorio especial en esta página de honor al registrar los 50 años del claustro de la Facultad de Minas en Robledo, cuyo diseño ingenieril y arquitectónico lo elaboró el maestro Pedro Nel Gómez.

Se presenta para ilustración del lector, dos fotografías que muestran la casona centenaria y colonial que ocupó la Escuela de Minas en la hoy Plazuela de María Auxiliadora (El Palo x Av. Echeverri) y el actual complejo de Robledo.



1944

Casona situada
en el Palo x Avenida Echeverri.



1994

Instalaciones actuales
en Robledo