

El diseño de los Pilares de Hormigón armado bajo solicitudación uniaxial y su sistematización

Gabriel García Moreno*

INTRODUCCION

El diseño de las piezas de Hormigón Armado (H.A.) sometidos a flexo-compresión uniaxial, es la base fundamental del diseño de las columnas de H.A., incluyendo las sometidas a solicitudación biaxial, ya que la mayor parte de los métodos para resolver el caso biaxial, lo hacen por reducción de este caso, al de un pilar equivalente sometido a solicitudación uniaxial. Casos de Bresler, P.C.A., etc (1,2,3). La razón es muy clara. Existen abundantes diagramas de interacción, o gráficos de diseño para la solicitudación biaxial. El caso se complica cuando se trata de sistematizar el diseño, lo cual se hace necesario para agilizarlo en el diseño de varios pilares; en estos casos la consulta de los gráficos, se convierte en un lastre muy pesado, que consume mucho tiempo.

A pesar de que el procedimiento matemático está muy bien definido (1,2), los métodos usuales de sistematización (4), se basan en el socorrido método de ensayo y error, seguido de procesos de iteración. Usualmente se asume la cuantía total (ρ), se itera luego la posición del eje neutro (c), corrigiendo por separado el valor de ambos parámetros las veces necesarias para optimizar la solución. Este método puede dar resultados satisfactorios en algunos casos, en los cuales los parámetros restantes, f'_c , f_y , b, h , E_s , E_c , d' , conforman junto con ρ y c una solución consistente (5) de las dos ecuaciones paramétricas P_n y M_n . Cuando esto no es así, el método descrito no da resultados. En vano se esfuerza el ordenador en encontrar una solución. Sin embargo el análisis matemático nos puede dar una solución adecuada para resolver el problema, aún para los casos de ecuaciones paramétricas que se satisfagan con resultados negativos, permitiendo la variación simultánea de los parámetros ρ , y c, hasta encontrar una solución con la aproximación requerida por el programa.

*Profesor Emerito - Maestro Universitario, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

ANALISIS

Sean P_n y M_n las ecuaciones paramétricas nominales para parámetros constantes : f_c , b , h , E_s , E_c , f_y , d :

$$P_n = P_n(\text{AST}, c) \quad (1)$$

$$M_n = M_n(\text{AST}, c) \quad (2)$$

en las cuales hemos reemplazado la cuantía total ρ_t del pilar por :

$$\text{AST} = \rho_t b h \quad (3)$$

siendo AST el acero total de una pieza con refuerzo simétrico.

Sean así mismo P_r y M_r las solicitudes externas de la pieza, o resistencias requeridas. Se trata, entonces, de establecer el equilibrio entre estas y las nominales (1) y (2) :

$$f = f(\text{AST}, c) = P_n(\text{AST}, c) - P_r = 0 \quad (4)$$

$$g = g(\text{AST}, c) = M_n(\text{AST}, c) - M_r = 0$$

Las ecuaciones (4) son ecuaciones simultáneas no lineales. Su solución resuelve el problema propuesto. Desde el punto de vista del análisis funcional (6), los elementos diferenciales dAST y dc de la solución, deben ser tales que anulen las derivadas totales df y dg, para que se satisfagan las ecuaciones (4) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial c} dc + \frac{\partial f}{\partial \text{AST}} d\text{AST} \quad (5)$$

$$dg = \frac{\partial g}{\partial c} + \frac{\partial g}{\partial \text{AST}} d\text{AST}$$

o sea :

$$\begin{bmatrix} df \\ dg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_c & f_{\text{AST}} \\ g_c & g_{\text{AST}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dc \\ d\text{AST} \end{bmatrix}$$

donde,

$$f_c = \frac{\partial f}{\partial c}, f_{\text{AST}} = \frac{\partial f}{\partial \text{AST}}$$

$$g_c = \frac{\partial g}{\partial c}, g_{\text{AST}} = \frac{\partial g}{\partial \text{AST}}$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para dc, dAST, se obtiene :

$$\begin{bmatrix} dc \\ d\text{AST} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_c & f_{\text{AST}} \\ g_c & g_{\text{AST}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} df \\ dg \end{bmatrix} \quad (6)$$

Como se trata de anular fy g, se pueden reemplazar df y dg por los valores f y g, de las ecuaciones (4).

Las ecuaciones (6) en forma explícita equivalen entonces a las ecuaciones (7) :

$$dc = \frac{\begin{vmatrix} f_{\text{AST}} & f \\ g_{\text{AST}} & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{\text{AST}} & f_c \\ g_{\text{AST}} & g_c \end{vmatrix}} = \Delta c \quad (7)$$

$$d\text{AST} = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_c \\ -g & g_c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{\text{AST}} & f_c \\ g_{\text{AST}} & g_c \end{vmatrix}} = \Delta \text{AST}$$

La existencia de Δc y ΔAST exige que el determinante funcional común de los denominadores sea distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} f_{\text{AST}} & f_c \\ g_{\text{AST}} & g_c \end{vmatrix} \neq 0 \quad (8)$$

O lo que es lo mismo, este determinante, llamado JACOBIANO, no debe anularse para ecuaciones consistentes (7,8).

PROCEDIMIENTO

El procedimiento, luego, es muy simple: Se conocen las características de los materiales y

dimensiones de la sección:

1. f_c , f_y , b , h , d'

Las solicitudes del pilar:

2. P_r , M_r

Para iniciar la iteración de las variables AST y se suponen los valores iniciales de éstas.

3. $AST = 0,01 \cdot bh$

$c = 0,5 h$

Se calculan las funciones f , g de las expresiones (4), y sus derivadas parciales: f_c , g_c , f_{AST} , g_{AST} .

Se calculan, a continuación, con estas funciones, los incrementos diferenciales Δc y ΔAST dados por las expresiones (7). Si estos incrementos son menores o iguales a la tolerancia requerida se imprimen los resultados de c y AST , si no, se incrementan los valores iniciales de c , AST y se regresa al cálculo de f , g , f_c , g_c , f_{AST} , g_{AST} , Δc y ΔAST y se repite el ciclo.

Siguiendo este esquema se elaboró un programa en Quick Basic, que calculó los siguientes pilares, con las solicitudes y características de sus respectivos materiales constituyentes tal como se dan en las siguientes tablas, a continuación, en solo fracciones de segundo:

DATOS INICIALES					RESULTADOS				
M_n (ton-m)	P_n (ton)	f_y (kgf/cm ²)	$f'c$ (kgf/cm ²)	d' (cm)	b (cm)	h (cm)	A_{st} (cm ²)	c (cm)	
19,3	69,11	4200	250	5	30	40	14,91	12,97	
(1) 10,42	86,62	4200	250	5	30	40	-1,62(1)	15,59	
(1) 18,73	105,80	4200	250	5	30	40	10,07(1)	19,05	
(2) 130,0	35,0	4230	210	6	40	70	94,13	11,24	
(3) 48,77	130,66	4200	280	6,25	30	50	35,63	22,35	
(4) 48,77	90,83	4200	280	6,25	30	50	41,42	16,27	

(1) La solución de estos dos ejemplos no satisface a la cuantía mínima del 1%, $AST_{mínimo} = 0,01 \times 1200 = 12 \text{ cm}^2$, lo cual es tenido en cuenta en el diagrama de flujo.

(2) Obsérvese que este ejemplo, a diferencia de los tres primeros está situado en la parte de control del acero, en la parte inferior de la curva de interacción. Los anteriores se encuentran en la parte superior: control del hormigón. Como consecuencia, en el caso (2), se tiene una distancia c más pequeña.

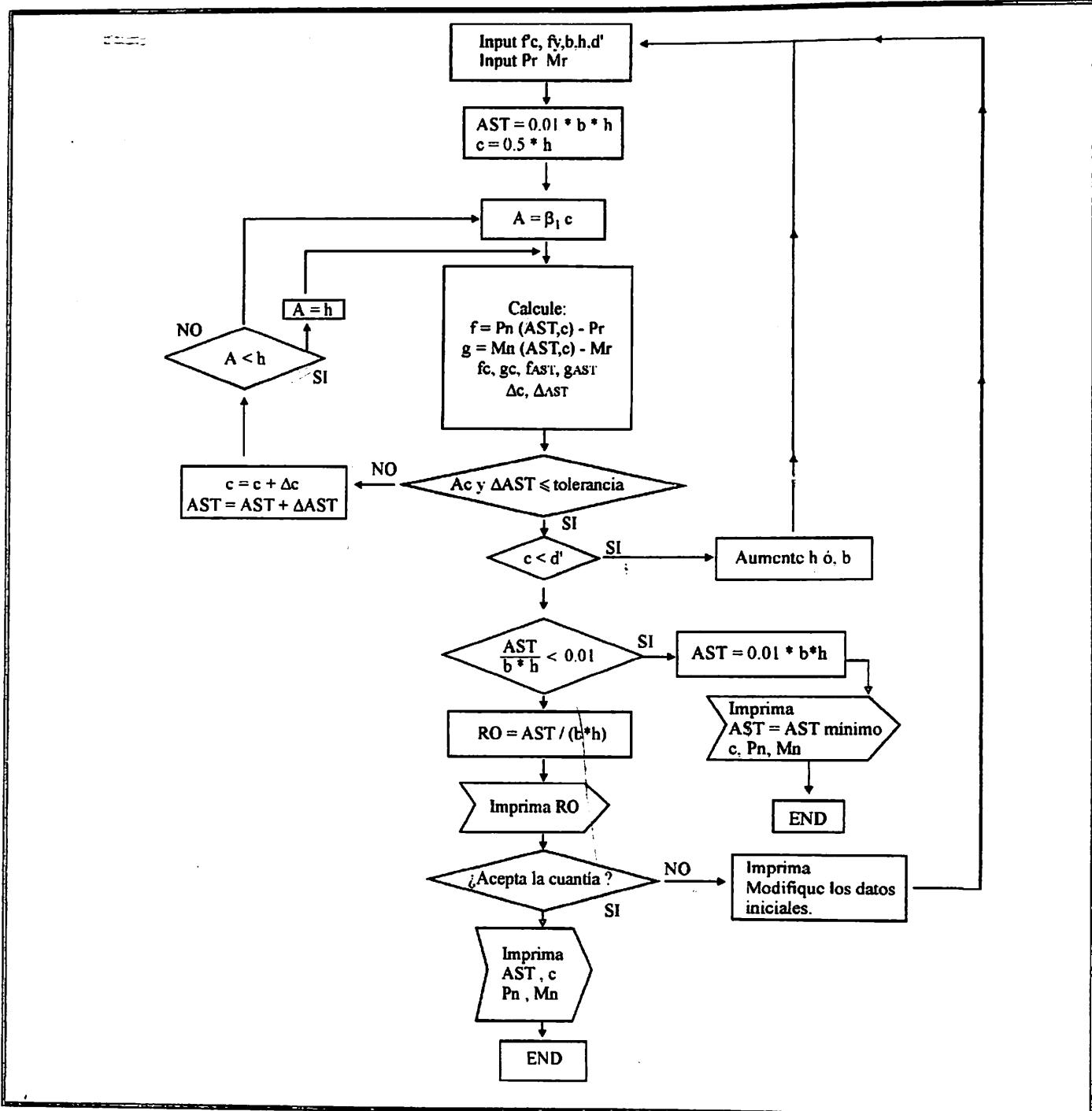
(3)-(4) Ejemplos dados por Winter, para demostrar que es más desfavorable un pilar con baja carga

axial, para momentos iguales.

REFERENCIAS

1. G. Winter, A.H. Nilson. "Proyecto de Estructuras de Hormigón". Editorial Reverté S.A. 1977.
2. R. Park and T. Paulay. "Reinforced Concrete Structures". Wiley & Sons 1975.
3. Notes on ACI 318-89. Portland Cement Association.

DIAGRAMA DE FLUJO



4. David A. Ross and J.Y.R. Yen. "Computer Aided Design of Reinforced Concrete Columns" Concrete International. March 1984 Vol. 6. No.3.

5. J.Y. Richard Yen. "Optimized Direct Design of Reinforced Concrete Columns with Uniaxial Loads. "ACI Structural Journal. May-june 1990, Vol. 87 No. 3.

6. J. Rey Pastor. "Elementos de la Teoría de Funciones". Editorial Iberoamericana 1953.

7. C. Mataix Aracil. "Análisis Algebraico e Infinitesimal". Editorial Dossat 1957.

8. F.B. Hildebrand. "Métodos de Cálculo para Ingenieros". Aguilar 1960.