

# **DETERMINACION GENERAL DE LOS MOMENTOS DE INERCIA DE SECCIONES T - Y RECTANGULARES - EN HORMIGON REFORZADO**

**ELKIN A. CASTRILLÓN OBERNDORFER**

*I.C., Dr.-Ing.  
Profesor Asociado  
Tecnología*

## **RESUMEN**

Se presentan solamente dos expresiones generales para la determinación de los momentos de inercia de las secciones brutas, transformadas no fisuradas y transformadas fisuradas de secciones T - y rectangulares - simple o doblemente reforzadas. Utilizadas apropiadamente se obtienen resultados en todos los casos.

## **PALABRAS CLAVES**

Eje neutro. Momentos de inercia. Secciones transformadas de hormigón reforzado. Forma de la superficie comprimida. Factores de forma adimensionales.

## **ABSTRACT**

Presented are only two general expressions for the determination of the inertia moments of gross, transformed uncracked and transformed cracked, single or double reinforced concrete T -and rectangular-sections. Properly used they deliver results for all cases.

## **KEY WORDS**

Neutral axis. Inertia moments. Transformed reinforced concrete sections. Compression area form. Dimensionless form factors.

## **1. INTRODUCCION**

En la época del análisis dinámico no lineal de estructuras espaciales, puede parecer poco interesante

la determinación de los momentos de inercia de secciones T en hormigón reforzado y pretensado.

La utilización de los computadores en buena parte se ha destinado a la solución de problemas, cuya solución no era posible sin ellos.

Para la solución de los conocidos problemas tradicionales se ha hecho poco esfuerzo para determinar algoritmos más apropiados para esta herramienta. Simplemente se han sistematizado los algoritmos tradicionales utilizados también para el cálculo manual.

Las nuevas perspectivas que representan los computadores y la misma docencia, no solamente hacen conveniente, sino también necesario, el desarrollo de algoritmos generales más adecuados para la sistematización.

Por ejemplo Nawy [2] en uno de los textos más recientes sobre el diseño del hormigón reforzado presenta ya programas, tanto para calculadora de bolsillo como para microcomputador, basados prácticamente en los mismos algoritmos tradicionales, sin el propósito anotado antes.

Una de las actividades más tediosas en el diseño del hormigón reforzado, al menos manualmente, es la determinación de los momentos de inercia de una sección.

Al determinar los desplazamientos en una viga, por ejemplo, se utilizan los momentos de inercia equivalentes, o efectivos, de las secciones y para

determinarlos es necesario calcular antes los momentos de inercia de las secciones fisuradas y no fisuradas.

Precisamente para descartar el apreciable cálculo numérico que implica la determinación del momento de inercia de la sección no fisurada, se permite, en su lugar, la utilización del momento de inercia de la sección bruta.

O en las secciones T con refuerzo a compresión, tal como se determina según algunas especificaciones para el diseño sísmico, este generalmente no se considera, aunque Nawy [2, p. 269] insiste en que se debe considerar.

El propósito de este trabajo, entonces, es presentar dos algoritmos generales que permiten determinar para una sección los momentos de inercia de la sección bruta, de las secciones transformadas no fisurada y fisurada. Los algoritmos están desarrollados para la sección T y permiten considerar la sección rectangular como un caso particular de la anterior. Las secciones pueden ser, además, simple o doblemente reforzadas.

## 2. PRESENTACION DE LOS PROBLEMAS

En la Figura 1 se presentan para la sección rectangular las diferentes casos que se deben considerar al analizarla. En las Figuras 1a y 1b se representan respectivamente las secciones simple y doblemente reforzadas y para cada una de ellas las secciones transformadas no fisuradas y fisuradas.

Las secciones transformadas se determinan en la forma usual, a partir de las condición de compatibilidad de deformaciones, mediante la relación entre los módulos de elasticidad del acero y del hormigón,  $n$ , para obtener el área equivalente del acero en hormigón.

El hormigón desplazado por el acero rigurosamente se debe considerar cuando la sección no está fisurada o, en la sección fisurada, únicamente para el refuerzo comprimido,  $A_s'$ . Este efecto se considera mediante la variable  $n' = n-1$ .

El caso de la sección bruta no se destaca especialmente, ya que más adelante se presenta como caso particular de la sección transformada no fisurada.

En la Figura 2 se representa la sección T doblemente reforzada y las áreas transformadas de las secciones no fisurada y fisurada con las correspondientes equivalencias de los aceros en hormigón. En ambos casos se asume aquí que el refuerzo superior está a compresión, lo que en general siempre se debe comprobar.

Por su misma forma la sección T presenta una situación un poco más compleja que la sección rectangular, determinada por la ubicación de su eje neutro, que hace que la forma de la superficie comprimida pueda ser rectangular o no rectangular, tal como se indica en la Figura 3. A diferencia de muchos textos, en adelante se sigue considerando la sección T como tal y se discrimina entre superficie comprimida rectangular y no rectangular según sea el caso.

El análisis de la sección T implica, entonces, precisar la forma de la superficie comprimida.

## 3. PROCEDIMIENTO GENERAL

A continuación se presentan los algoritmos generales determinados al seguir el procedimiento clásico para la determinación de los momentos de inercia, a saber:

- determinación del área de la sección transformada,
- evaluación del momento estático respecto al lado superior,
- ubicación del eje neutro y, finalmente,
- cálculo del momento de inercia.

Para la ubicación del eje neutro de la sección no fisurada solo se requiere resolver una ecuación algebraica lineal, para la sección fisurada, en cambio, se debe resolver una ecuación cuadrática.

Aquí solamente se presentan los algoritmos resultantes del procedimiento anotado antes y no se especifican todos los pasos intermedios necesarios para llegar a ellos. En el caso de la sección T el

desarrollo es un poco complicado y requiere, entonces, especial cuidado.

Al presentar los algoritmos se hace un esfuerzo para hacerlo en forma adimensional por las obvias ventajas que representa. Entre los diferentes textos norteamericanos de amplia difusión en nuestro medio, uno de los pocos intentos para trabajar en este sentido lo presentan Wang y Salmon [3,p. 619], para determinar el momento de inercia de la sección bruta de la sección T. Los factores de forma utilizados por ellos, aunque sin definirlos, son iguales a los utilizados en este trabajo.

Ghosh y Rabbat [1, p. 8-8], en cambio, al presentar el algoritmo más general conservan el tradicional esquema dimensional.

#### 4. FACTORES DE FORMA ADIMENSIONALES

En la Tabla 1 las expresiones 1 a 6 definen los factores de forma adimensionales definidos en este trabajo. Son los seis factores  $F_1$  a  $F_6$ , que corresponden a relaciones entre las dimensiones de la sección. Aquí se introducen dos variables auxiliares, mediante cuya definición se pueden resolver todos los casos considerados aquí.

La variable auxiliar  $b_A$  se refiere a la anchura mínima de la superficie comprimida y según sea esta rectangular o no rectangular toma respectivamente los valores  $b$  o  $b_o$ . En los literales  $b$  y  $c$  de la misma tabla se anotan los valores que en cada caso toman los factores de forma  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_4$ .

Unicamente para considerar el caso de la sección bruta, se introduce la variable auxiliar  $dA$ , cuyo valor en secciones reforzadas es  $d$  y al considerar la sección bruta es  $h$ , tal como lo indican las expresiones (9) y (10).

Rigurosamente se debe considerar otra variable auxiliar  $h_{oA}$  para poder cubrir completamente el caso de la sección rectangular, pero se ha observado que con las dos variables anteriores se logra el mismo objetivo. Entonces, para no introducir innecesariamente más variables, se omite esta definición. Al desarrollar un

sistema general se debe, sin embargo, definir esta variable en el caso de la sección rectangular y, por lo tanto, se le debe dar en este caso el valor  $d$ .

#### 5. SECCION NO FISURADA

En la Tabla 2 se presenta el algoritmo general para la determinación del área, el eje neutro y el momento de inercia de la sección transformada no fisurada y, como caso particular, el de la sección bruta.

El algoritmo requiere, además, de los factores adimensionales anotados antes, las cuantías del refuerzo definidas en las expresiones (13) a (16). A fin de simplificar los algoritmos aún más, se introducen a manera de las cuantías mecánicas utilizadas por este autor en el diseño último, las cuantías  $\mu$  y  $\mu'$ , en general iguales al producto de las relaciones apropiadas entre los módulos de elasticidad,  $n$  o  $n'$ , y las cuantías geométricas,  $\rho$  y  $\rho'$ .

Mediante las expresiones (17) a (19) se determinan las variables adimensionales  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . En los corchetes a la derecha del igual se observa, que cada uno de ellos tiene solo tres sumandos, que presentan una estructura de formación bastante regular, que, precisamente, se puede aprovechar ventajosamente en la sistematización.

Estas tres variables adimensionales se utilizan, entonces, para evaluar el área,  $A_i$ , ubicar el eje neutro,  $X_i$ , y calcular el momento de inercia,  $I_i$ , tal como se indica con las expresiones (20) a (22).

Para calcular las características de la sección bruta se deben hacer las sustituciones indicadas en el literal d de la Tabla. En primer lugar asignar a la variable auxiliar  $dA$  el valor  $h$  y hacer nulas las cuantías, ya que no se considera refuerzo alguno.

Al seguir el mismo procedimiento anotado antes, se determinan las características buscadas de la sección, que mediante las expresiones (25) a (27) se hacen iguales a las de la sección bruta.

En las Tablas 3 y 4 se anotan las expresiones que se obtienen al sustituir en el algoritmo general anterior

los factores de forma adimensionales correspondientes a la sección T y a la sección rectangular. Es conveniente insistir que estos algoritmos particulares solo se anotan aquí a manera de comprobación, a menos que solo se desee utilizar uno de ellos, por ejemplo, el de la sección rectangular.

Este algoritmo solo requiere, entonces, las expresiones anotadas en las Tablas 1 y 2 para su aplicación general.

## 6. SECCION FISURADA

En la Tabla 5 se anotan las expresiones, que con las de la Tabla 1, permiten el análisis general de la sección fisurada.

Aquí solamente se presenta un cambio en las cuantías definidas en el literal a respecto a las definidas en la Tabla 2 a fin de no considerar el efecto del hormigón desplazado por el refuerzo a tracción, ya que la sección está fisurada. Esto se hace mediante la cuantía  $\mu_c$  definida mediante la expresión (28).

La ubicación del eje neutro se logra como solución de la ecuación cuadrática indicada por la expresión (31). Para determinar el momento de inercia,  $I_c$ , se define antes la variable  $\beta_c$  mediante la expresión (32). Las expresiones (33) y (34) del literal d permiten, finalmente, determinar la ubicación del eje neutro y el momento de inercia de la sección.

Las expresiones resultantes al sustituir los factores de forma adimensionales para la sección T y para la sección rectangular se anotan respectivamente, también a manera de comprobación, en las Tablas 6 y 7.

En este caso la solución general solo requiere las expresiones anotadas en las Tablas 1 y 5.

Como se anota antes el análisis de la sección T implica la determinación de la forma de la superficie comprimida. El procedimiento correspondiente se indica en la Tabla 8.

Inicialmente se asume que la superficie comprimida es rectangular y se ejecuta todo el procedimiento indicado

en la Tabla 5. Se comprueba que la superficie comprimida es rectangular si se cumple la condición (35).

Si esta condición no se cumple la superficie comprimida es no rectangular y se debe repetir todo el procedimiento con la definición de la variable indicada por la expresión (7).

En el literal c de la Tabla 8 se indica también el procedimiento para establecer si el refuerzo superior está a compresión.

## 7. APPLICACION, ANALISIS Y CONCLUSIONES

Como aplicación de los algoritmos anteriores se determinan en el Anexo para la sección T cuyas características están anotadas en la Tabla 9a:

- área, eje neutro y momento de inercia de la sección bruta,
- área, eje neutro y momento de inercia de la sección transformada no fisurada y
- eje neutro y momento de inercia de la sección transformada fisurada.

Para los cálculos correspondientes a estos tres casos solo se utilizan los algoritmos anotados en las Tablas 1, 2 y 5 y, en el caso de la sección fisurada, se sigue el procedimiento indicado en la Tabla 8 a fin de establecer la forma de la superficie comprimida.

Los resultados de los cálculos están anotados en la Tabla 9b.

Allí se observa, que en este caso, la diferencia entre los momentos de inercia de la sección bruta y de la sección transformada no fisurada es apreciable, lo que justificaría en general la determinación de esta última. La evaluación se hace considerando y sin considerar el refuerzo comprimido. Como se observa en este caso, sección T con una generosa superficie sometida a compresión, el refuerzo comprimido en este caso no es significativo. En secciones rectangulares, sin embargo, si puede ser de mayor importancia.

Aquí se presenta un algoritmo general y simple de fácil aplicación, que si bien da la conocida solución de los problemas, lo hace en una forma muy sistemática, adecuada para la programación. Esta presentación puede, además, ser de gran beneficio para todos aquellos que se inician en el diseño del hormigón reforzado.

Aunque aquí no se hace, la ampliación de los algoritmos para incluir también secciones de hormigón pretensado es muy simple.

## 8. BIBLIOGRAFIA

[1] GHOSH S.K. y RABBAT Basile G.:

Notes on ACI 318-89 with Design Applications.

Portland Cement Association , Skokie, Illinois, USA, 1990.

[2] NAWY Edward G.:

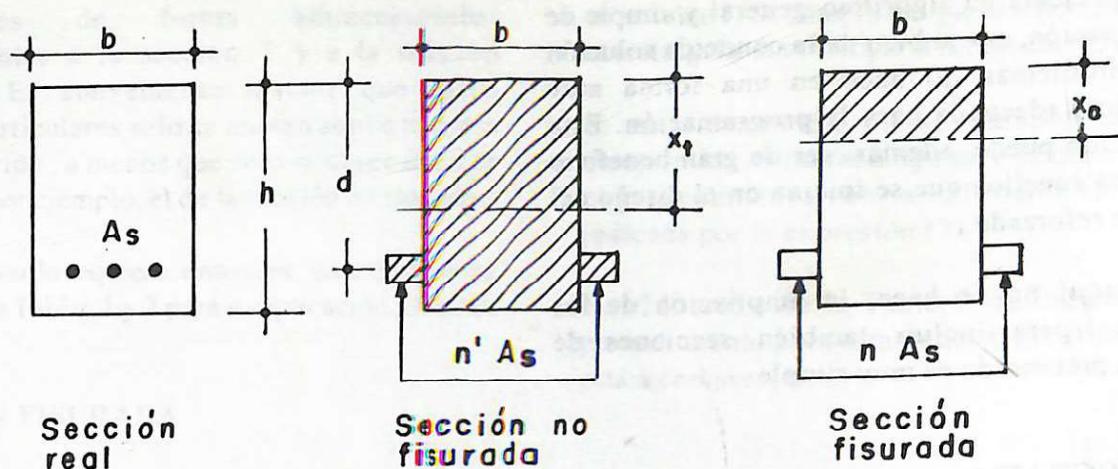
Reinforced Concrete. A Fundamental Approach.

Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1985.

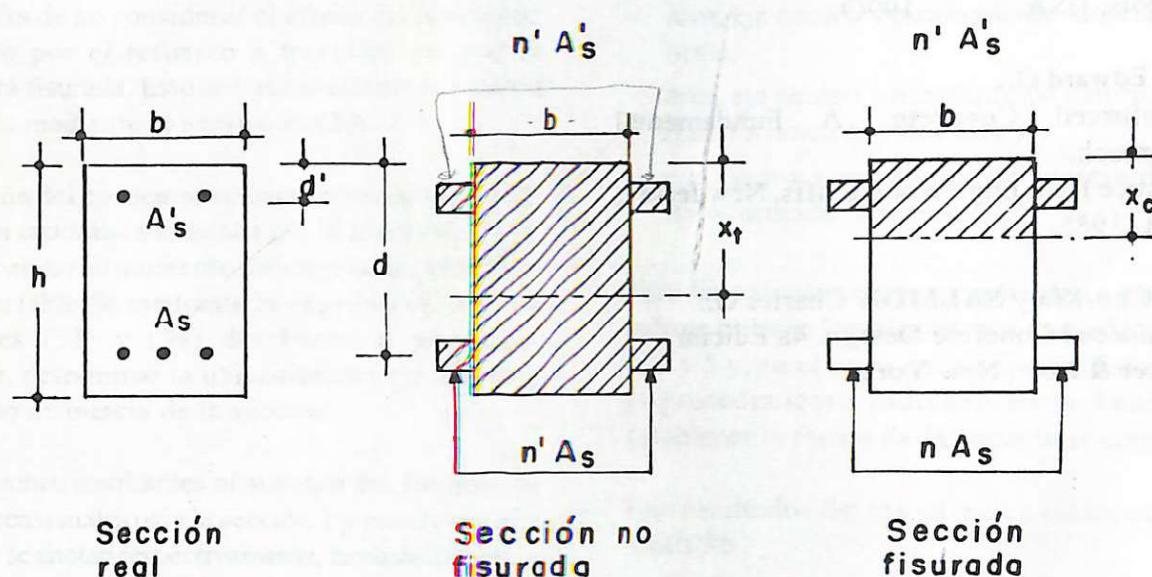
[3] WANG Chu-Kia y SALMON Charles G.:

Reinforced Concrete Design. 4a Edición.

Harper & Row, New York

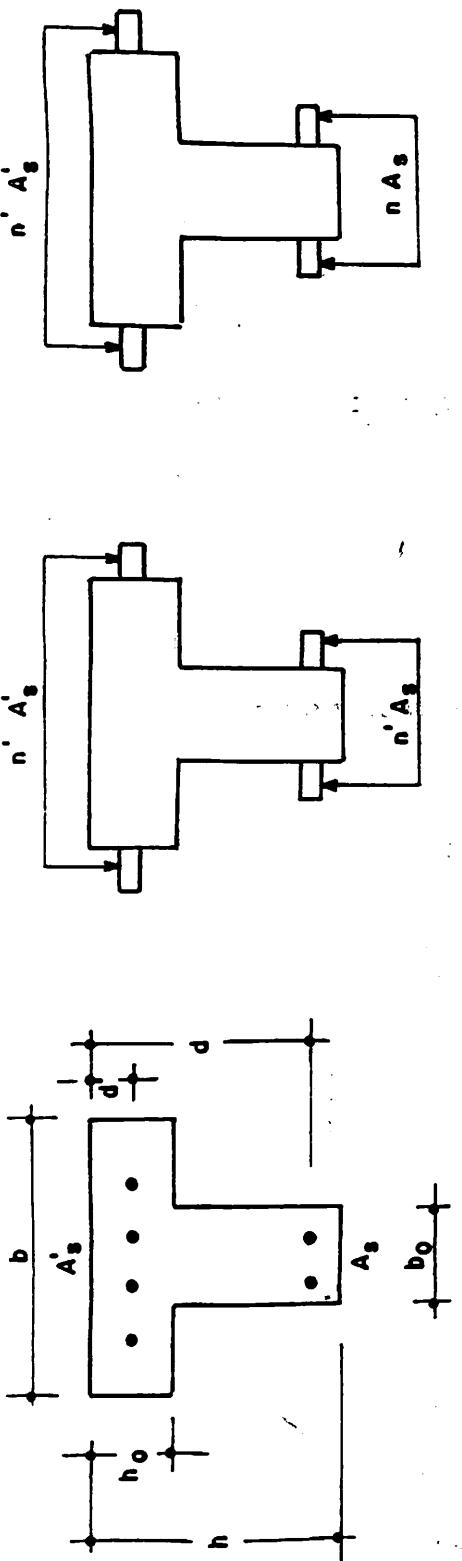


a) Sección rectangular simplemente reforzada



b) Sección rectangular doblemente reforzada

Figura 1. Área transformada de secciones rectangulares.

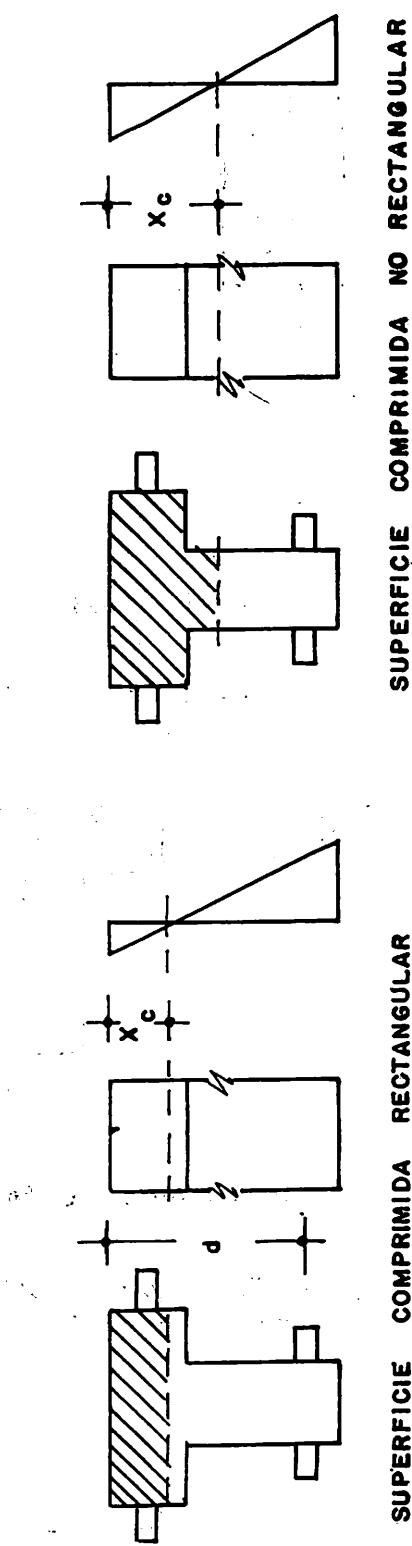


*Figura 2. Características de las secciones transformadas de secciones T doblemente reforzadas.*

### SECCION REAL

### SECCION NO FISURADA

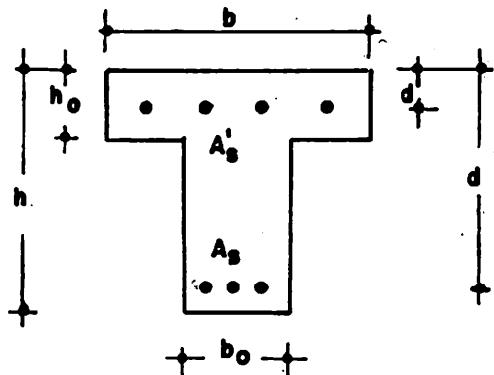
### SECCION FISURADA



*Figura 3. Formas de la superficie comprimida en secciones T fisuradas.*

Tabla 1. Factores de forma generales y condiciones particulares.

a) Factores generales



$$F_1 = \frac{b}{b_A} \quad (1)$$

$$F_2 = \frac{b}{b_A} - 1 = F_1 - 1 \quad (2)$$

$$F_3 = \frac{h_0}{d_A} \quad (3)$$

$$F_4 = \left( \frac{b}{b_A} - 1 \right) \frac{h_0}{d_A} = F_2 F_3 \quad (4)$$

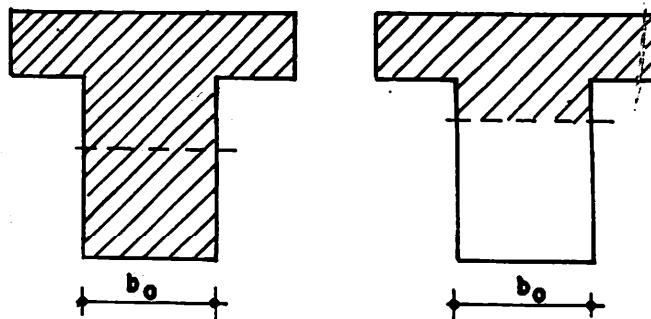
$$F_5 = \frac{d'}{d} \quad (5)$$

$$F_6 = \frac{h}{d_A} \quad (6)$$

$$\text{Sección reforzada } d_A = d \quad (9)$$

$$\text{Sección bruta } d_A = h \quad (10)$$

b) Sección no fisurada y superficie comprimida no rectangular



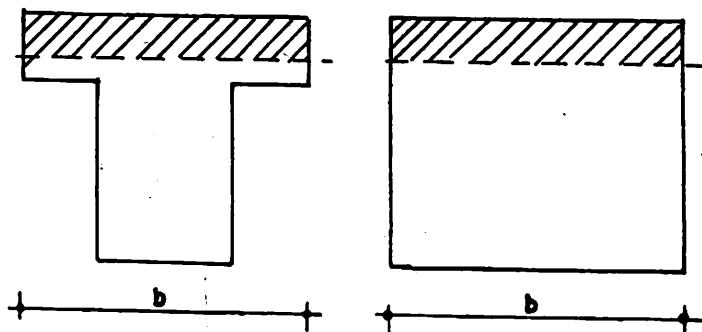
$$b_A = b_0 \quad (7)$$

$$F_1 = \frac{b}{b_0}$$

$$F_2 = \frac{b}{b_0} - 1$$

$$F_4 = \left( \frac{b}{b_0} - 1 \right) \frac{h_0}{d}$$

c) Superficies comprimidas rectangulares



$$b_A = b \quad (8)$$

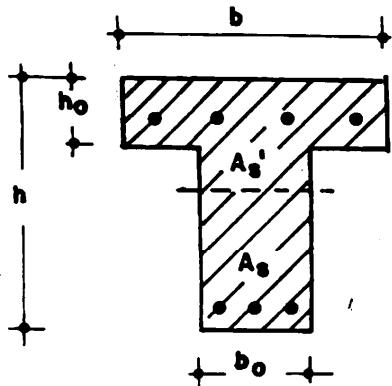
$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 0$$

$$F_4 = 0$$

Tabla 2. Expresiones generales para determinar el área  $A_t$ , la ubicación del eje neutro,  $X_t$ , y el momento de Inercia,  $I_t$ , de la sección transformada no fisurada.

a) Convenciones para la sección transformada



$$d_A = d \quad (9)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (11), \quad n' = n - 1 \quad (12)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (13), \quad \rho' = \frac{A_s'}{bd} \quad (14)$$

$$\mu = n'\rho \quad (15), \quad \mu' = n'\rho' \quad (16)$$

b) Variables adimensionales

$$\alpha = F_1^{-1} [F_6 + F_4 + (\mu + \mu') F_1] \quad (17)$$

$$\beta = (2F_1)^{-1} [F_6^2 + F_4 F_3 + 2(\mu + \mu' F_5) F_1] \quad (18)$$

$$\gamma = (3F_1)^{-1} [F_6^3 + F_4 F_3^2 + 3(\mu + \mu' F_5^2) F_1] - \alpha^{-1} \beta^2 \quad (19)$$

c) Características geométricas de la sección transformada

$$A_t = \alpha b d_A \quad (20), \quad X_t = \alpha^{-1} \beta d_A \quad (21), \quad I_t = \gamma b d_A^3 \quad (22)$$

d) Convenciones para la sección bruta

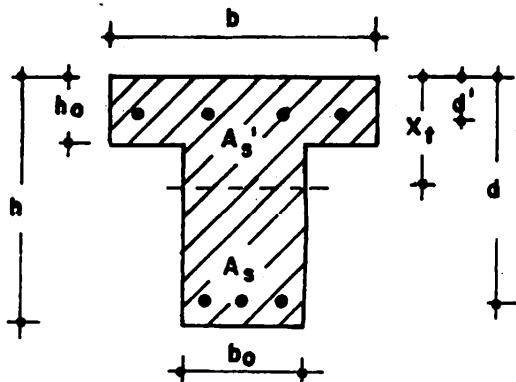
$$d_A = h \quad (10), \quad \mu = 0 \quad (23), \quad \mu' = 0 \quad (24)$$

Con estas variables se ejecuta el proceso indicado en los literales b y c. Así se obtiene:

$$A_g = A_t \quad (25), \quad X_g = X_t \quad (26), \quad I_g = I_t \quad (27)$$

Tabla 3. Determinación del área,  $A_t$ , de la ubicación del eje neutro,  $X_t$ , y del momento de inercia,  $I_t$ , de la sección T transformada no fisurada.

a) Convenciones para la sección transformada



$$d_A = d \quad (9)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (11), \quad n' = n - 1 \quad (12)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (13), \quad \rho' = \frac{A_{s'}'}{bd} \quad (14)$$

$$\mu = n' \rho \quad (15), \quad \mu' = n' \rho' \quad (16)$$

b) Variables adimensionales

$$\alpha = \frac{b_0}{b} \left\{ \frac{h}{d} + \left( \frac{b}{b_0} - 1 \right) \frac{h_0}{d} + \left( \mu + \mu' \right) \frac{b}{b_0} \right\} \quad (17a)$$

$$\beta = \frac{b_0}{2b} \left\{ \left( \frac{h}{d} \right)^2 + \left( \frac{b}{b_0} - 1 \right) \left( \frac{h_0}{d} \right)^2 + 2 \left( \mu + \mu' \right) \frac{d'}{d} \frac{b}{b_0} \right\} \quad (18a)$$

$$\gamma = \frac{b_0}{3b} \left\{ \left( \frac{h}{d} \right)^3 + \left( \frac{b}{b_0} - 1 \right) \left( \frac{h_0}{d} \right)^3 + 3 \left[ \mu + \mu' \left( \frac{d'}{d} \right)^2 \right] \frac{b}{b_0} \right\} - \frac{\beta^2}{\alpha} \quad (19a)$$

c) Características geométricas de la sección transformada

$$A_t = \alpha b d_A \quad (20), \quad X_t = \alpha^{-1} \beta d_A \quad (21), \quad I_t = \gamma b d_A^3 \quad (22)$$

d) Convenciones para la sección bruta

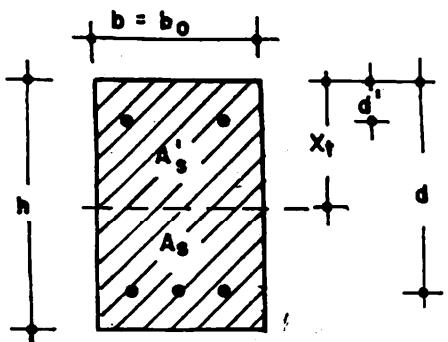
$$d_A = h \quad (10), \quad \mu = 0 \quad (23), \quad \mu' = 0 \quad (24)$$

Con estas variables se ejecuta el proceso indicado en los literales b y c. Así se obtiene:

$$A_g = A_t \quad (25), \quad X_g = X_t \quad (26), \quad I_g = I_t \quad (27)$$

Tabla 4. Determinación del área,  $A_t$ , de la ubicación del eje neutro,  $X_t$ , y del momento de inercia,  $I_t$ , de la sección rectangular transformada no fisurada.

a) Convenciones para la sección transformada.



$$d_A = d \quad (9)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c}, \quad n' = n - 1 \quad (12)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (13), \quad \rho' = \frac{A'_s}{bd} \quad (14)$$

$$\mu = n' \rho \quad (15), \quad \mu' = n' \rho' \quad (16)$$

b) Variables adimensionales

$$\alpha = \frac{h}{d} + \mu + \mu' \quad (17a)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{h}{d} \right)^2 + 2 \left( \mu + \mu' \frac{d'}{d} \right) \right\} \quad (18a)$$

$$\gamma = \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{h}{d} \right)^3 + 3 \left[ \mu + \mu' \left( \frac{d'}{d} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\beta^2}{\alpha} \quad (19a)$$

c) Características geométricas de la sección transformada

$$A_t = \alpha b d_A \quad (20), \quad X_t = \alpha^{-1} \beta d_A \quad (21), \quad I_t = \gamma b d_A^3 \quad (22)$$

d) Convenciones para la sección bruta

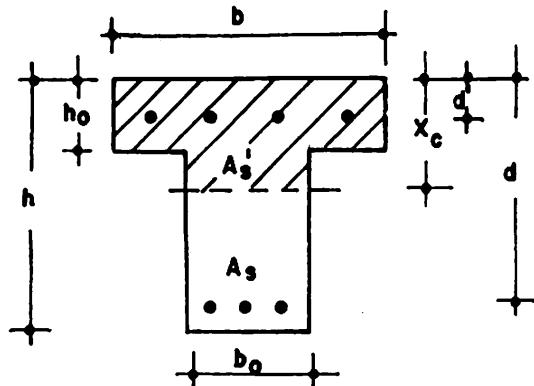
$$d_A = h \quad (10), \quad \mu = 0 \quad (23), \quad \mu' = 0 \quad (24)$$

Con estas variables se ejecuta el proceso indicado en los literales b y c. Así se obtiene:

$$A_g = A_t \quad (25), \quad X_g = X_t \quad (26), \quad I_g = I_t \quad (27)$$

Tabla 5. Expresiones generales para determinar el eje neutro,  $X_c$ , y el momento de Inercia,  $I_c$ , de la sección transformada fisurada.

a) Convenciones



$$d_A = d \quad (9)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (II), \quad n' = n - 1 \quad (12)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (13), \quad \rho' = \frac{A'_s}{bd} \quad (14)$$

$$\mu_c = n\rho \quad (28), \quad \mu' = n'\rho' \quad (16)$$

b) Coeficientes y soluciones de la ecuación  $\alpha_c^2 + 2B\alpha_c + C = 0$

$$B = F_4 + (\mu_c + \mu') F_1 \quad (29)$$

$$C = -F_4 F_3 - 2(\mu_c + \mu' F_5) F_1 \quad (30)$$

$$\alpha_c = -B \pm \sqrt{B^2 - C} \quad (31)$$

c) Variable adimensional para determinar el momento de inercia

$$\beta_c = (3F_1)^{-1} \left\{ \alpha_c^3 + F_4 \left[ 3(\alpha_c - F_3)\alpha_c + F_3^2 \right] + 3 \left[ \mu_c (\alpha_c - 1)^2 + \mu' (\alpha_c - F_5)^2 \right] F_1 \right\} \quad (32)$$

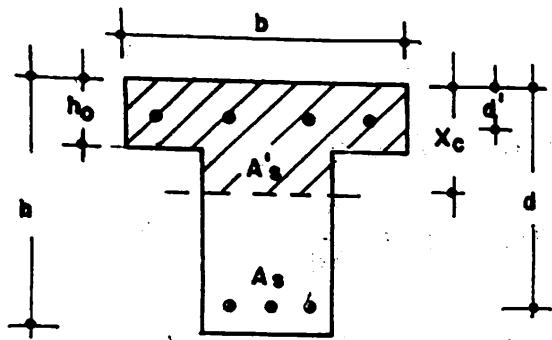
d) Eje neutro y momento de inercia

$$x_c = \alpha_c d \quad (33)$$

$$I_c = \beta_c b d^3 \quad (34)$$

Tabla 6. Determinación de la ubicación del eje neutro  $X_c$ , y del momento de inercia,  $I_c$ , de la sección T transformada fisurada.

a) Convenciones



$$d_A = d \quad (9)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (11), \quad n' = n - 1 \quad (12)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (13), \quad \rho' = \frac{A_s'}{bd} \quad (14)$$

$$\mu_c = n \rho \quad (28), \quad \mu' = n' \rho' \quad (16)$$

b) Coeficientes y solución de la ecuación  $\alpha_c^2 + 2B\alpha_c + C = 0$

$$B = \left( \frac{b}{b_0} - 1 \right) \frac{h_0}{d} + (\mu_c + \mu') \frac{b}{b_0} \quad (29a)$$

$$C = - \left( \frac{b}{b_0} - 1 \right) \left( \frac{h_0}{d} \right)^2 - 2 \left( \mu_c + \mu' \frac{d'}{d} \right) \frac{b}{b_0} \quad (30a)$$

$$\alpha_c = -B + \sqrt{B^2 - C} \quad (31a)$$

c) Variable adimensional para determinar el momento de inercia

$$\beta_c = \frac{b_0}{3b} \left\{ \alpha_c^3 + \left( \frac{b}{b_0} - 1 \right) \frac{h_0}{d} \left[ 3\left(\alpha_c - \frac{h_0}{d}\right) \alpha_c + \left(\frac{h_0}{d}\right)^2 \right] + 3 \left[ \mu_c \left( \alpha_c - 1 \right)^2 + \mu' \left( \alpha_c - \frac{d'}{d} \right)^2 \right] \frac{b}{b_0} \right\} \quad (32a)$$

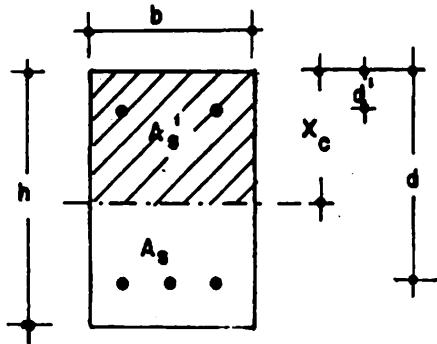
d) Eje neutro y momento de inercia

$$x_c = d_C d \quad (33)$$

$$I_c = \beta b d^3 \quad (34)$$

Tabla 7. Determinación de la ubicación del eje neutro  $X_c$ , y del momento de inercia,  $I_c$  de la sección rectangular transformada fisurada.

a) Convenciones



$$d_A = d \quad (9)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (11), \quad n' = n - 1 \quad (12)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (13), \quad \rho' = \frac{A_s'}{bd} \quad (14)$$

$$\mu = n\rho \quad (28), \quad \mu' = n'\rho' \quad (16)$$

b) Coeficientes y solución de la ecuación  $\alpha_c^2 + 2B\alpha_c + C = 0$

$$B = \mu_c + \mu' \quad (29b)$$

$$C = -2 \left( \mu_c + \mu' \frac{d'}{d} \right) \quad (30b)$$

$$\alpha_c = -B \pm \sqrt{B^2 - C} \quad (31b)$$

c) Variable adimensional para determinar el momento de inercia

$$\beta_c = \frac{1}{3} \left\{ \alpha_c^3 + 3 \left[ \mu_c (\alpha_c - 1)^2 + \mu' (\alpha_c - \frac{d'}{d})^2 \right] \right\} \quad (32b)$$

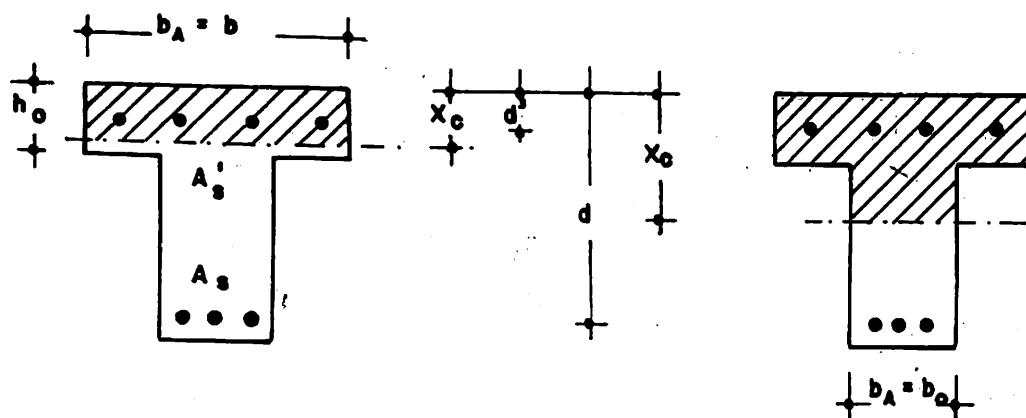
d) Eje neutro y momento de inercia

$$x_c = \alpha_c d \quad (33)$$

$$I_c = \beta_c bd^3 \quad (34)$$

*Tabla 8. Forma de la superficie comprimida en secciones T y tipo de solicitaciones en el refuerzo superior de secciones fisuradas.*

a) Convenciones



b) Forma de la superficie comprimida

Hipótesis inicial:

Superficie comprimida rectangular

$$(8) \quad b_A = b$$

$$(9) \quad d_A = d$$

Comprobación:

$$\alpha_c < F_3 \quad (35)$$

Superficie comprimida no rectangular

$$\alpha_c > F_3 \quad (36)$$

$$(7) \quad b_A = b_0$$

c) Tipo de solicitudes en el refuerzo superior

Hipótesis inicial:

Refuerzo superior a compresión

$$(16) \quad \mu' = n' \rho'$$

Comprobación:

$$\alpha_c > F_5 \quad (37)$$

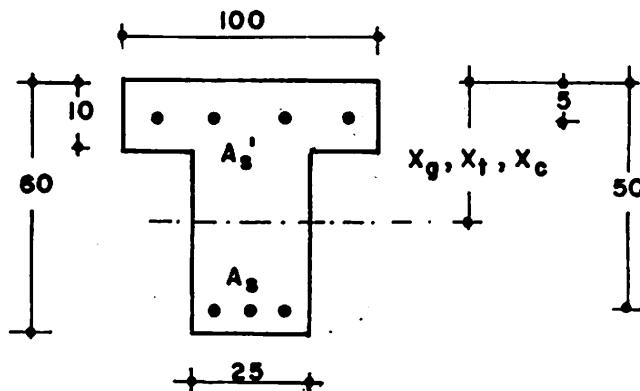
Refuerzo superior a tracción

$$\alpha_c < F_5 \quad (38)$$

$$\mu' = n \rho' \quad (39)$$

Tabla 9. Datos y resultados del ejemplo de aplicación.

a) Geometría y otras características



$$\begin{aligned} b &= 100, \quad b_0 = 25 \\ h &= 60, \quad h_0 = 10 \\ d &= 50, \quad d' = 5 \\ A_s &= 40 \text{ cm}^2, \quad A_s^l = 10 \text{ cm}^2 \\ n &= 10, \quad n' = 9 \end{aligned}$$

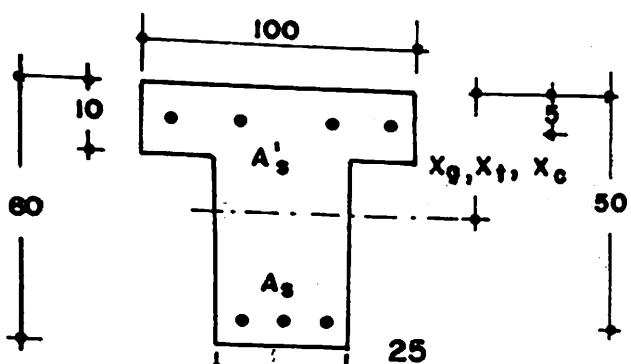
Todas las dimensiones en cm

b) Áreas, ubicación de los ejes neutros y momentos de inercia de la sección

SECCION					
BRUTA	TRANSFORMADA				
	NO FISURADA		FISURADA		
A (cm <sup>2</sup> )	A <sub>s</sub> <sup>l</sup> = 10 cm <sup>2</sup>	A <sub>s</sub> <sup>l</sup> = 0	A <sub>s</sub> <sup>l</sup> = 10 cm <sup>2</sup>	A <sub>s</sub> <sup>l</sup> = 0	
X (cm)	X <sub>g</sub> = 21,66	X <sub>t</sub> = 24,89	X <sub>t</sub> = 25,57	X <sub>c</sub> = 16,71	X <sub>c</sub> = 17,37
I (10 <sup>3</sup> cm <sup>4</sup> )	I <sub>g</sub> = 769	I <sub>t</sub> = 1055	I <sub>t</sub> = 1018	I <sub>c</sub> = 604	I <sub>c</sub> = 591

*ANEXO: Ejemplo de aplicación*

**I. GEOMETRÍA Y OTRAS CARACTERISTICAS**



Todas las dimensiones están en cm.

$$b = 100, \quad b_0 = 25$$

$$h = 60, \quad h_0 = 10$$

$$d' = 50, \quad d' = 5$$

$$A_s = 40 \text{ cm}^2, \quad A'_s = 10 \text{ cm}^2$$

$$n = 10, \quad n' = 9$$

**2. SECCION BRUTA**

**2.1 SUSTITUCION DE VARIABLES**

$$(7) : b_A = b_0 = 25$$

$$(10) : d_A = h = 60$$

**2.2 FACTORES DE FORMA ADIMENSIONALES**

$$(1) : F_1 = 100 \times 25^{-1} = 4$$

$$(2) : F_2 = F_1 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$(3) : F_3 = 10 \times 60^{-1} = 6^{-1}$$

$$(4) : F_4 = F_2 F_3 = 3 \times 6^{-1} = 0,5$$

$$(6) : F_6 = 1$$

**2.3 CUANTIAS**

$$(23) : \mu = 0$$

$$(24) : \mu' = 0$$

**2.4 VARIABLES ADIMENSIONALES**

$$(17) : \alpha = 4^{-1}(1 + 0,5) = 0,375$$

$$(18) : \beta = 8^{-1}(1 + 0,5 \times 6^{-1}) = 0,1354$$

$$(19) : \gamma = 12^{-1}(1 + 0,5 \times 6^{-2}) - 0,375^{-1} \times 0,1354^2 = 0,0356$$

## 2.5 CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LA SECCION BRUTA

$$(20) : A_t = 0,375 \times 100 \times 60 \text{ cm}^2 = 2,25 \times 10^3 \text{ cm}^2$$

$$(21) : X_t = 0,375^{-1} \times 0,1354 \times 60 \text{ cm} = 21,66 \text{ cm}$$

$$(22) : I_t = 0,0356 \times 100 \times 60^3 \text{ cm}^3 = 769 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

$$(25) : A_g = A_t = 2,25 \times 10^3 \text{ cm}^2$$

$$(26) : X_g = X_t = 21,66 \text{ cm}$$

$$(27) : I_g = I_t = 769 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

## 3. SECCION TRANSFORMADA NO FISURADA

### 3.1 SUSTITUCION DE VARIABLES

$$(9) : d_A = d = 50$$

### 3.2 FACTORES DE FORMA ADIMENSIONALES

$$(3) : F_3 = 10 \times 50^{-1} = 5^{-1} = 0,2$$

$$(4) : F_4 = F_2 F_3 = 3 \times 0,2 = 0,6$$

$$(5) : F_5 = 5 \times 50^{-1} = 0,1$$

$$(6) : F_6 = 60 \times 50^{-1} = 1,2$$

### 3.3 CUANTIAS

$$(13) : \rho = 40 (100 \times 50)^{-1} = 0,008$$

$$(14) : \rho' = 10 (100 \times 50)^{-1} = 0,002$$

$$(15) : \mu = 9 \times 0,008 = 0,072$$

$$(16) : \mu' = 9 \times 0,002 = 0,018$$

### 3.4 VARIABLES ADIMENSIONALES

$$(17) : \alpha = 4^{-1} [1,2 + 0,6 + (0,072 + 0,018) 4] = 0,540$$

$$(18) : \beta = (2 \times 4)^{-1} [1,2^2 + 0,6 \times 0,2 + 2 (0,072 + 0,018 \times 0,1) 4] = 0,269$$

$$(19) : Y = (3 \times 4)^{-1} [1,2^3 + 0,6 \times 0,2^2 + 3 (0,072 + 0,018 \times 0,1^2) 4] - 0,540^{-1} \times 0,269^2 = 0,0844$$

### 3.5 CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LA SECCION TRANSFORMADA NO FISURADA

$$(20) : A_t = 0,540 \times 100 \times 50 \text{ cm}^2 = 2700 \text{ cm}^2$$

$$(21) : X_t = 0,540^{-1} \times 0,269 \times 50 \text{ cm} = 24,89 \text{ cm}$$

$$(22) : I_t = 0,0844 \times 100 \times 50^3 \text{ cm}^4 = 1,055 \times 10^8 \text{ cm}^4$$

#### 4. SECCION TRANSFORMADA FISURADA

##### 4.1 CUANTIA DEL REFUERZO A TRACCION

$$(28) : \mu_c = 10 \times 0,008 = 0,080$$

##### 4.2 HIPOTESIS INICIAL : SUPERFICIE COMPRIMIDA RECTANGULAR

###### 4.2.1 SUSTITUCION DE VARIABLES

$$(8) : b_A = b = 100$$

###### 4.2.2 FACTORES DE FORMA ADIMENSIONALES

$$(1) : F_1 = 1$$

$$(2) : F_2 = 0$$

$$(3) : F_3 = 10 \times 50^{-1} = 0,2$$

$$(4) : F_4 = 0$$

$$(5) : F_5 = 5 \times 50^{-1} = 0,1$$

###### 4.2.3 COEFICIENTES Y SOLUCION DE LA ECUACION

$$(29) : B = (0,080 + 0,018) = 0,098$$

$$(30) : C = 0 - 2(0,080 + 0,018 \times 0,100) = - 0,1636$$

$$(31) : \alpha_c = -0,098 + \sqrt{0,098^2 + 0,1636} = 0,3182$$

#### 4.3 COMPROBACION DE LA HIPOTESIS INICIAL

Como  $\alpha_c = 0,3182$  es mayor que  $F_3 = 0,2$  la hipótesis inicial no es correcta, ya que la superficie comprimida no es rectangular

#### 4.4 SUPERFICIE COMPRIMIDA NO RECTANGULAR

##### 4.4.1 SUSTITUCION DE VARIABLES

$$(7) : b_A = b_0 = 25$$

##### 4.4.2 FACTORES DE FORMA ADIMENSIONALES

Solo se anotan los que varían respecto al cálculo anterior

$$(1) : F_1 = 4$$

$$(2) : F_2 = 4 - 1 = 3$$

$$(4) : F_4 = F_2 F_3 = 3 \times 0,2 = 0,6$$

#### 4.4.3 COEFICIENTES Y SOLUCION DE LA ECUACION

$$(29) : B = 0,6 + (0,080 + 0,018) \times 4 = 0,9920$$

$$(30) : C = -0,6 \times 0,2 - 2(0,080 + 0,018 \times 0,100)4 = -0,7744$$

$$(31) : q_0 = -0,9920 + \sqrt{0,9920^2 + 0,7744} = 0,3341$$

$$(32) : \beta_c = (3 \times 4)^{-1} \left\{ 0,3341^3 + 0,6 \left[ 3(0,3341 - 0,2)0,3341 + 0,2^2 \right] + 3 \left[ 0,080(0,3341 - 1)^2 + 0,018(0,3341 - 0,100)^2 \right] 4 \right\} = 0,0483$$

$$(33) : x_c = -0,3341 \times 50 \text{ cm} = 16,71 \text{ cm}$$

$$(34) : I_c = 0,0483 \times 100 \times 50^3 \text{ cm}^4 = 604 \times 10^3 \text{ cm}^4$$