ERRORES TÍPICOS EN MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE DE UNIVERSIDAD

JORGE COSSIO B. Y DÉBORA MARÍA TEJADA J.
Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Medellín

RESUMEN. El objetivo principal de este trabajo es presentar algunas deficiencias en la formación matemática en los niveles de primaria y secundaria, las cuales se hacen visibles a través de los errores matemáticos más frecuentes que cometen los estudiantes que comienzan su carrera universitaria. La conclusión principal nos señala la urgencia de hacer algunas modificaciones en la enseñanza de la matemática a nivel de la primaria y de la secundaria. Con este fin, damos unas recomendaciones sencillas cuya implementación posibilitaría, en principio, mejorar algunos aspectos de dicha enseñanza.

ABSTRACT. In this paper we present some deficiencies made in the mathematical formation of students at elementary and high school levels. These deficiencies are visible through the most common mathematical mistakes made by College freshman students in our university. The principal conclusion emphasizes that is necessary to implement important modifications in our mathematical programs for elementary and high school levels. With this purpose in mind, we give some simple recommendations that should improve the teaching at those levels.

1. INTRODUCCIÓN

El porcentaje de estudiantes que reprueba los primeros cursos de Matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia, Sede de Medellín oscila entre el 45% y el 60%. Éste es un porcentaje alto teniendo en cuenta que los estudiantes ya han pasado por el filtro del examen de admisión. La situación se vuelve aún más preocupante cuando se revisa el contenido de los cursos y se encuentra que gran parte de éste debió ser estudiado en el bachillerato.

Con esta preocupación en mente, en el mes de mayo de 1997 realizamos una encuesta entre 40 profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional, Sede Medellín, en la cual solicitábamos que se identificaran los errores típicos que comete un estudiante de primer semestre y, además, que se tratara de encontrar una explicación a ellos. El 80% de los profesores a los cuales se les dirigió la encuesta nos respondió y hemos utilizado sus respuestas para la realización de este trabajo. En la Sección 2 hacemos un resumen de ellas.

En el mismo mes de mayo, con la colaboración de los profesores Jorge Mejía Laverde y Celia Villegas de Arias se efectuó, también en la Universidad Nacional de Medellín, una prueba a 339 estudiantes de primer semestre (45% del total de estudiantes nuevos admitidos para ese período). La muestra incluía 240 estudiantes de la Facultad de Minas, 75 estudiantes de la Facultad de Ciencias Agrícolas y 24 estudiantes de la Facultad de Ciencias Humanas. La prueba se realizó el primer día de clases y su objetivo era detectar el nivel matemático con el cual llegaban estos estudiantes a la universidad. Presentaremos en la Sección 3 un resumen de los resultados obtenidos por los estudiantes.

Debemos anotar que si bien hemos sido profesores de la Universidad por más de veinte años, nuestro objeto de estudio no es la investigación en la enseñanza de las matemáticas, sino la investigación en áreas específicas de las matemáticas como las Ecuaciones

Palabras Claves. Educación, Matemáticas.

Manifestamos nuestro agradecimiento a los profesores de la Universidad Nacional que respondieron la encuesta, quienes con sus opiniones nos ayudaron en la elaboración del presente trabajo. Los comentarios y preguntas del Profesor Miguel Monsalve, del Departamento de Física, y de los árbitros de este trabajo enriquecieron enormemente las conclusiones y recomendaciones que hemos dado. Agradecemos especialmente al Profesor Jorge Mejía y a la Profesora Celia Villegas la colaboración en la elaboración y en la administración de la prueba hecha a los estudiantes en mayo de 1997.

Diferenciales no Lineales y la Topología. Nuestra experiencia como profesores nos sirve de apoyo para presentar algunas conclusiones y recomendaciones, las cuales consignamos en la Sección 4.

2. RESUMEN DE LAS RESPUESTAS DADAS A LA ENCUESTA

A continuación resumiremos las respuestas dadas a cada pregunta.

PREGUNTA 1. ¿Cuáles son los errores más frecuentes que usted detecta en los estudiantes de los primeros semestres?

Las respuestas a esta pregunta las resumimos así:

A) *Errores de tipo aritmético:*

Es usual encontrar errores en la manipulación de operaciones básicas de la Aritmética como la suma, la resta, la multiplicación y la división. En particular, se equivocan cuando se trabaja con quebrados. No se tiene claro el concepto de número.

Por ejemplo:

1) Desconocimiento de las particularidades del número cero: No se dan cuenta que algunas operaciones no están definidas, o estando definidas usan resultados incorrectos, concluyendo errores como los siguientes:

$$\frac{5}{0}=0 \quad , \quad \frac{5}{0}=5 \quad , \quad 3\times 0=3 \quad ó \quad \frac{0}{5}=5.$$

2) En operaciones con quebrados: Es común que hagan simplificaciones no permitidas como la siguiente:

$$\frac{2+3}{2}=\frac{1+3}{1}=3$$

o efectúen la suma de quebrados así:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{6}=\frac{2}{6}+\frac{4}{6}=\frac{6}{6} \qquad ó \qquad \frac{2}{3}+\frac{4}{6}=\frac{6}{9}.$$

En división de quebrados se encuentran errores como el siguiente:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2\times 5}{3\times 7}.$$

3) En operaciones sencillas con calculadora: Al hacer la división $\frac{3}{0}$, la calculadora da como resultado **E** (error). El estudiante no entiende que la calculadora le informa que la operación no está definida y puede ocurrir que el estudiante concluya que es el número e la respuesta que está mostrando la calculadora o que concluya que su calculadora no trabaja bien. Se les pide que sumen $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$, el estudiante que no utiliza la calculadora probablemente encuentre la respuesta exacta que es 1, sin embargo, el que usa calculadora entregará, casi seguramente, 0.99 como respuesta, sin caer en cuenta que su resultado no es exacto.

B) *Errores de tipo algebraico:*

Los estudiantes presentan dificultades en la búsqueda de soluciones de ecuaciones de primero y segundo grado y en la factorización de polinomios elementales. Cuando no recuerdan una fórmula no son capaces de ingeniárselas para deducirla, así sea una fórmula sencilla.

Por ejemplo: Si $3x = 0$ concluyen que $x = -3$. Cuando $x^2 = 9$ es típico que el estudiante piense que únicamente x es 3 y olvide que x puede ser -3. Consideran que las siguientes expresiones son identidades:

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+y,$$
$$(a+b)^2=a^2+b^2,$$
$$(a+b)^n=a^n+b^n.$$

Si se les pide buscar la solución de la ecuación $x^2 = x$ no es raro que den alguna de las siguientes respuestas: no existe solución, la solución es solamente $x = 1$ ó la solución es solamente 0. Aunque la mayoría de alumnos conoce de memoria la fórmula para encontrar la solución de una ecuación cuadrática, no se da cuenta que la ecuación anterior es de este tipo. No se les ocurre tampoco reescribir la ecuación como $x^2 - x = x(x-1) = 0$, es decir, no saben que al factorizar polinomios se puede llegar a la solución de la ecuación.

C) *Errores de tipo geométrico:*

Existe confusión en conceptos elementales de la Geometría plana tales como mediana, altura y mediatriz de un triángulo e incapacidad para deducir fórmulas de áreas. Así conozcan muy bien las fórmulas del área de un triángulo y de un paralelogramo no saben deducir el área de un trapecio. Teniendo dos triángulos semejantes, no recuerdan como establecer proporciones con sus lados.

En general se desconocen los conceptos básicos de Geometría del espacio, tales como el volúmen de un paralelepípedo.

D) *Errores de tipo trigonométrico.*

Se desconocen las definiciones de las funciones seno, coseno y tangente. Tampoco se sabe su interpretación geométrica. No se distingue entre un ángulo y el seno del ángulo, es decir, no se comprende la noción de función. Por ejemplo, se cometen los siguientes errores:

$$\frac{\mathrm{sen}(3\alpha)}{3\,\mathrm{sen}\,\alpha} = 1 \quad \text{o peor aún:}$$

$$\frac{\mathrm{sen}(3x)}{\mathrm{sen}(6x)} = \frac{3x}{6x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

E) *Errores de tipo lógico:*
Aunque los estudiantes conocen las tablas de verdad de la lógica proposicional, no saben aplicarlas correctamente. Por ejemplo, si en un enunciado se tiene una afirmación del tipo: "P implica Q" y si esta afirmación no está "matematizada", no es raro verlos concluir que "Q implica P".
En Cálculo, cuando hay problemas de desigualdades en los que hay que analizar la solución por disyunción de casos, generalmente, olvidan casos y creen que con resolver solamente uno de los casos ya se encontró la solución.

¿y por qué cree que los estudiantes cometen estos errores?
Recogemos a continuación algunas posibles causas mencionadas por los profesores que respondieron la encuesta.
i) Se hace una práctica operacional deficiente, lo que produce falta de destrezas básicas para efectuar cálculos de forma natural. **Esta falta la confunden con la incapacidad de entender matemáticas** y por tanto no se esfuerzan por aprenderlas.
ii) Se tiene un mal manejo del lenguaje; algunos estudiantes no saben hablar, no saben leer ni escribir. Este mal manejo separa la matemática del lenguaje. El estudiante es incapaz de "matematizar" enunciados que están dados en el lenguaje ordinario.
iii) Se promociona casi automáticamente en el bachillerato; y así se certifica que el estudiante sabe cuando realmente no sabe.
iv) Se aprenden las matemáticas de memoria sin tener claridad conceptual. Todo se reduce a "recordar" fórmulas. Como generalmente en los colegios no se hace un trabajo previo acerca de la razón de ser de las fórmulas, el estudiante carece de la posibilidad de reconstruirlas por sí mismo. Parece que los estudiantes han llegado a la conclusión de que se puede hacer matemáticas sin pensar; es sólo cuestión de seguir recetas y ya está.
v) Se tienen malos hábitos de estudio. No tienen disciplina. Se destina menos tiempo del que se necesita. Se cree que las notas de clase son suficientes y no acostumbran ni siquiera mirar el texto guía. No consultan sus dudas. Se mira con recelo a los buenos estudiantes.

PREGUNTA 2. ¿Cuáles son los ejercicios y/o problemas que el estudiante tiene más dificultad de enfrentar? ¿Cuál cree que es la razón?
La mayoría de los profesores expresó que los problemas que involucran una traducción del lenguaje ordinario al lenguaje matemático, o sea la matematización de un enunciado es un "dolor de cabeza" para los estudiantes. En general problemas donde deben pensar un poco (problemas de "aplicación" y problemas donde no existe una rutina o algoritmo fijo a seguir) les causan serias dificultades. La razón de esto radica, principalmente, en la poca comprensión de lectura que se tiene; el estudiante no distingue entre lo que se da por conocido (hipótesis) y lo que debe buscar o probar (tesis). El haberles enseñado la matemática como una colección de símbolos y reglas que nada tienen que ver con el lenguaje común, hace que el estudiante no se dé cuenta de que los hechos matemáticos se pueden expresar también en el lenguaje cotidiano.

También se señala la ineptitud para hacer demostraciones. Se desconoce el significado de lo que es una demostración. Se piensa que esto es debido, en gran parte, a la misma incomprensión de los profesores de primaria y de bachillerato. Se anota que como la Geometría Euclideana ha pasado a un segundo plano y hoy en día se enseña poco, no se tiene la posibilidad de adquirir el concepto de demostración.

PREGUNTA 3. ¿Cree que las nociones de lógica y teoría de conjuntos que reciben los estudiantes en primaria y bachillerato los están preparando realmente mejor? si o no y por qué?
En esta pregunta, con respecto a las nociones de Lógica, la respuesta casi general fue NO, no los están preparando mejor. Se considera que las nociones de Lógica, tal y como se enseñan, no mejoran la comprensión matemática, debido principalmente a que éstas se enseñan de modo mecánico, con demasiadas definiciones y separadas de las otras áreas de la matemática.

Se piensa que lo que se está creando es una gran confusión. Aunque las nociones de lógica se consideran esenciales, es preferible no darlas a enseñarlas mal. Se sugiere que una forma natural de enseñar los conceptos de lógica, sin tener que darles nombres específicos y sin que los estudiantes sepan siquiera que están aprendiendo lógica, es estudiar de una forma más intensa la Geometría Euclideana. ¡En la Geometría, el estudiante tiene la oportunidad de ver de cerca demostraciones en un contexto natural, lo cual le permite dejar a un lado muchos de sus temores.

Con respecto a la Teoría de Conjuntos, se piensa que de enseñarse debería ser después de la Aritmética; una vez se tengan ejemplos de conjuntos matemáticos con los cuales trabajar. Y en el caso de enseñarla no se debe ser muy ambicioso en el alcance; es suficiente que se aprenda lo que es un conjunto, un elemento, la noción de pertenencia y las operaciones básicas entre conjuntos. La noción de función se debe reservar para después de que el estudiante haya trabajado con ecuaciones en Álgebra, o al comienzo de la Trigonometría, sin pretender enseñar más de lo necesario.

Se observa que los estudiantes, por tratar de aprender la Lógica y la Teoría de Conjuntos, terminan sin aprender Álgebra, Geometría y Trigonometría. Por otro lado, se cree que la preparación de los maestros, no es suficiente para enseñar estos tópicos, ya que tienen una visión muy desarticulada de la matemática.

PREGUNTA 4. ¿Cuáles cree que son las nociones mínimas que un estudiante debe saber para estar nivelado cuando llega a la Universidad?

La respuesta generalizada la resumimos así:

Además de tener la capacidad de análisis y de reflexión medianamente desarrollada, se debe saber leer y escribir (entendiendo por esto, tener las capacidades de comprender textos escritos y de expresarse por escrito) y se debe tener disciplina y disposición para el estudio. El estudiante deberá conocer las nociones básicas comprendidas en la Aritmética (operaciones con números naturales y enteros, fracciones, decimales y porcentajes), en el Álgebra (solución de ecuaciones lineales y cuadráticas, solución de sistemas de ecuaciones lineales, factorización y división de polinomios), en la Geometría Euclideana (semejanza y congruencia de triángulos, Teorema de Pitágoras, círculos), en la Trigonometría (funciones trigonométricas, manejo de identidades) y en la Geometría Analítica (gráficas elementales en el plano cartesiano, distintas formas de la ecuación de la recta, ecuaciones de las cónicas).

PREGUNTA 5. Si tiene conocimiento (por su hijo o sobrino) de las nociones que hoy en día se enseñan en primaria y secundaria, ha detectado nociones superfluas? Es decir, que usted considera no son importantes para que el estudiante esté nivelado en el momento de llegar a la universidad?

Se señala como superflua la lógica proposicional.

En otras áreas se dan demasiadas definiciones que no amplían el conocimiento sino que confunden y hacen que la matemática aparezca muy complicada.

Se menciona que la Estadística no es necesaria.

Varios profesores observan que el Cálculo no se debería enseñar en la secundaria, ya que lo enseñan en forma superficial, mecánica e irracional, lo cual hace del Cálculo una materia tediosa e incomprensible.

Se dice también, que el tiempo dedicado a la Lógica, la Teoría de Conjuntos y a la Estadística podría ser empleado en hacer más práctica con las nociones básicas, enseñarles un buen manejo de la calculadora y quizás unas primeras nociones de programación en computadores.

Se anota que se está gastando demasiado tiempo en la preparación de los exámenes ICFES. Los institutos preicfes no le dan una formación sólida al estudiante, sino una formación mecánica, de reflejo condicionado que le permite acertar un buen porcentaje de preguntas sin saber realmente los conceptos. Desafortunadamente, muchos muchachos pasan hoy en día los exámenes ICFES y de admisión a la universidad, sin estar realmente preparados. Este éxito aparente, les esconde un fracaso altamente probable en la universidad.

PREGUNTA 6. ¿Tiene otros comentarios?

Se anota principalmente que una de las grandes fallas es la mala preparación que tienen los profesores de primaria y de secundaria en matemáticas. Profesores sin **conocimiento** tanto técnico como histórico, difícilmente pueden transmitir información y estimular la creatividad. Si no hay conocimiento de la materia que se quiere enseñar, no hay curso de pedagogía que supla esta deficiencia. Los colegios deberían tener entre su personal, docentes con título de matemático o aún de ingeniero que ayuden a mejorar el nivel conceptual del profesorado en matemáticas y ciencias naturales.

Se señala como error histórico haber impulsado la enseñanza de la Matemática "moderna" en los niveles de la primaria y de la secundaria, pues se creyó que ésta sería el remedio universal para todos los problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se observa que no se debe ser iluso al pensar que se encontrará la panacea que facilite la comprensión de las matemáticas, ellas de por sí son difíciles. Sin embargo, el comienzo del remedio estará en mejorar el nivel de los profesores.

Se debe recuperar el prestigio de ser buen estudiante. Hoy en día ser un "nerdo" es visto como un defecto por los compañeros. No se debe olvidar la formación humana y social del estudiante.

La gran libertad que hay, hoy en día, en la escogencia de los programas de las materias, hace que los estudiantes lleguen muy disparejos a la universidad. Es preocupante lo que va a ocurrir con la ley por la cual los estudiantes no repetirán años en bachillerato. Indudablemente el número de fracasos para entrar a la universidad aumentará. Se recomienda a los colegios estar alerta para que esta ley no baje su calidad académica.

Se señala como tarea primordial la simplificación de los programas de matemáticas y su concentración en los conceptos básicos. Al simplificar la enseñanza, se combate el miedo que se siente ante las matemáticas y éstas se harán más agradables y entendibles.

3. RESUMEN DE RESULTADOS DE LA PRUEBA REALIZADA A LOS ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE

La siguiente es la prueba efectuada en la primera clase de los estudiantes del curso de Matemáticas I, con el fin de detectar posibles debilidades en sus conocimientos matemáticos y proceder a ofrecer cursos de nivelación. Respondieron la prueba 339 alumnos. Después de cada pregunta se presenta el porcentaje de alumnos que acertaron la pregunta.

Pregunta 1. Cuántas horas de matemáticas por semana recibía en su colegio? Acierta el 90%

Pregunta 2. $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=$. Acierta el 90%

Pregunta 3. $(-6)(-3)+8(-1)=$. Acierta el 86%

Pregunta 4. $x^3.x^4=$. Acierta el 89%

Pregunta 5. Encontrar el valor de $\sqrt[3]{\frac{ab^4}{8x^3}}$ si $a=9, b=3, x=5$. Acierta el 49%

Pregunta 6. Multiplicar $(3x^2-5)$ por $(2x-5)$. Acierta el 79%

Pregunta 7. Dividir (x^4-2x^2+x+7) por $(x+3)$. Acierta el 18%

Pregunta 8. Factorizar x^3-x^2. Acierta el 57%

Pregunta 9. Factorizar $2x^2+15x-8$. Acierta el 31%

Pregunta 10. Un número excede a otro en 5 y su suma es 29. Encontrar los números. Acierta el 77%

Pregunta 11. Cuál es el máximo común divisor de $a(a-x)^2, a(a-x)^3$ y $2ax(a-x)^5$. Acierta el 22%

Pregunta 12. Resolver $8x^2+x=30$. Acierta el 19%

Pregunta 13. Resolver

$$3x+y=5$$
$$x-2y=-3. \qquad \text{Acierta el 50\%}$$

Pregunta 14. Simplificar $\left(\frac{16x^2}{y^{-2}}\right)^{-\frac{1}{4}}$. Acierta el 20%

Pregunta 15. Sumar y simplificar $\frac{(a-2b)}{2a}-\frac{(a-5b)}{4a}+\frac{(a+7b)}{8a}$. Acierta el 43%

Pregunta 16. ¿Cuál es la longitud de una circunferencia de radio r? Acierta el 35%

Pregunta 17. Simplificar $\frac{7a^2b^3}{9ax^2y}+\frac{15ac^4}{18x^2c}$. Acierta el 44%

Pregunta 18. Es cierto que $\mathrm{sen}(a+b)=\mathrm{sen}a+\mathrm{sen}b$? Acierta el 51%

Pregunta 19. Es cierto que $\sqrt{a^2+4x^2}=a+2x$? Acierta el 38%

Pregunta 20. Pasar 30° a radianes. Acierta el 41%

La siguiente tabla nos muestra cuántos estudiantes tuvieron un número dado de respuestas buenas.

Respuestas buenas	Estudiantes
20	4
19	3
18	12
17	11
16	14
15	13
14	23
13	30
12	23
11	29
10	23
9	36
8	33
7	21
6	23
5	12
4	18
3	8
2	2
1	1

El número de estudiantes que obtienen menos de 12 respuestas buenas es de 206, lo que representa un 61% del total de los 339 estudiantes que presentaron la prueba.

Se confirman las apreciaciones de los profesores encuestados, en cuanto a las deficiencias de los estudiantes en Lenguaje (ver Preguntas 1 y 10), en Aritmética (ver Preguntas 2 y 3), en Álgebra (ver Preguntas 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15 y 17), en Geometría (ver Pregunta 16) y en Trigonometría (ver Pregunta 18).

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A) Sobre la calidad de los docentes:
Es indudable que los estudiantes no están llegando bien preparados a la universidad. En este sentido, los colegios deben hacer un esfuerzo para mejorar la calidad de sus docentes, permitiéndoles la participación en congresos o seminarios y estimulándolos a que continúen sus estudios con el fin de obtener títulos de Posgrado. No se quiere decir con esto que los profesores aprendan más para que les enseñen más conceptos a los estudiantes, sino que los profesores adquieran una visión más amplia que les permita distinguir lo fundamental de lo superfluo, ya que esto último, lo único que ocasiona es confusión, miedo y odio a la matemática.

B) Sobre los programas de las materias:
Hemos observado que se confunde el conocimiento con el exceso de información, y se cree que enseñando más definiciones el estudiante aprenderá más. Lo ideal, antes de recargar los programas, es **simplificar** los programas actuales e intensificar la práctica de pocos conceptos.
La enseñanza de la Lógica por medio de tablas de verdad y de reglas debe ser eliminada. No por conocer las reglas formales se aprenderá a razonar. Enseñar la lógica de esta manera, es como pretender enseñarle a un bebé las reglas gramaticales antes que aprenda a hablar.
La mejor forma de enseñar a razonar lógicamente es volver a enseñar con más profundidad la Geometría plana. Este es el marco natural para entender, sin conocer el sofisticado vocabulario de la Lógica, conceptos como disyunción, conjunción, implicación, demostración, etc. Por supuesto, en la Aritmética y en el Álgebra es posible también adquirir estos conceptos.
Sobre la Teoría de Conjuntos, ésta debe ser enseñada de una forma que quede integrada con los conceptos de los conjuntos que se han trabajado en la Aritmética. Es increíble el tiempo que se malgasta enseñando la unión de un conjunto de 3 elementos con uno de 4 elementos y finalmente el estudiante no sabe lo que es $3 + 4$.
La Estadística que se está enseñando en algunos colegios no amplía el conocimiento matemático de los estudiantes, quizás sea más productivo enseñarle a los estudiantes a interpretar los diagramas estadísticos utilizando las separatas económicas de los periódicos como material de trabajo. No es necesario que el estudiante sepa términos como varianza, esperanza, distribución normal, etc.
Los programas de Cálculo se podrían suprimir del todo, ya que en la mayoría de las universidades se presupone que el alumno no sabe nada de Cálculo y se comienza desde los conceptos básicos. Por el contrario, sí se da por cierto que el estudiante sabe Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica. Es deseable, entonces, concentrar el esfuerzo en estas áreas.
A continuación damos una guía (no necesariamente exhaustiva) de las nociones **mínimas** de matemáticas, que un bachiller debe saber.

i) En Aritmética:
Número natural, entero y racional. Suma, resta, multiplicación y división. Expresiones decimales, porcentajes. Manejo correcto de paréntesis. Regla de tres simple. Razones y Proporciones. Unidades de medida. Aplicación a problemas.

ii) En Álgebra:
Productos notables, factorización de polinomios elementales. Multiplicación y división de polinomios. Solución de ecuaciones de primero y segundo grado, solución de sistemas de ecuaciones lineales. Noción introductoria de función. Aplicación a problemas.

iii) En Geometría:
Triángulos congruentes y semejantes. Proporciones de lados en triángulos semejantes. Propiedades de paralelogramos. Áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios. Teorema de Pitágoras. Área de un círculo, longitud de la circunferencia. Sólidos simples en el espacio: pirámides, cubos, prismas, icosaedro y dodecaedro. Volúmenes de pirámides y prismas. Práctica manual de construcción de figuras planas con regla y compás. Construcción de maquetas de figuras en el espacio.

iv) En Trigonometría:
Funciones seno, coseno y tangente. Funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente, aclarando el dominio de definición. Identidades básicas como $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y práctica para resolver identidades más complicadas. Resolución de triángulos por medio de las leyes de senos y de cosenos.

v) En Geometría Analítica:
Recta real y plano cartesiano. Gráficas en el plano cartesiano. Distintas formas de la ecuación de una recta. Ecuaciones de cónicas. Interpretación geométrica de la solución de sistemas de dos ecuaciones lineales o cuadráticas con dos incógnitas.

C) Sobre la práctica operacional y la creación en Matemáticas:
La parte operativa es absolutamente indispensable. Se debe superar el miedo a la práctica repetitiva y monótona de ejercicios en matemáticas, pues ésta es la única manera de abstraer nuevos conceptos y

de adquirir herramientas que permitirán la creación. Esta práctica es indispensable en el entrenamiento del cerebro para un pensamiento racional y creador. Cualquier disciplina artística o científica necesita de mucha práctica para dominarla y así poder crear.

Sólo con la práctica se pueden desarrollar ciertas habilidades hasta convertirlas en algo natural para el estudiante. Esto hará el proceso de abstracción más fácil y permitirá que el estudiante pueda enfrentar problemas más complejos. Sin embargo, no debemos confundir la falta de destrezas computacionales con la incapacidad para comprender los procesos matemáticos. Por ejemplo, estamos seguros que los estudiantes que fallaron las preguntas 2 ó 3 de la prueba, entienden lo que es la suma, lo que es un quebrado o un número negativo, pero lo que sí les falta es la práctica con estas operaciones. No es raro que los estudiantes que han fallado esta preguntas concluyan que no sirven para las matemáticas.

D) Sobre el papel del maestro y tipos de mentes diferentes:

El profesor debe tener claro su papel de director (es sólo una guía que señala caminos) en el proceso del aprendizaje. Y por supuesto, el estudiante también tendrá que tener claro que su papel es el de ejecutor, sin su trabajo y esfuerzo no se logrará nada en dicho proceso.

Siendo el proceso del conocimiento una construcción individual, ejecutada sólo por el alumno y apenas dirigida por el maestro, es de fundamental importancia que el maestro entienda la forma de pensar del alumno. Un buen maestro se distinguirá por su habilidad de ejemplificar un concepto desde distintos puntos de vista, pues de esta manera podrá garantizar que el concepto sea aprendido por diferentes tipos de mentes ya sean analíticas o geométricas.

El profesor debe tener la capacidad de distinguir los mejores estudiantes para estimularlos, ya sea retándolos con problemas más difíciles o, por ejemplo, dándoles responsabilidades de monitor. Esta labor se debe hacer de forma delicada, pues es importante buscar que los compañeros de un buen estudiante no lo menosprecien sino que, al contrario, sientan admiración por él.

E) Sobre el papel del computador.

Pensamos que es importante incorporar, de una manera decidida, el uso del computador en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Entendiendo que el computador es un instrumento poderoso, que permite realizar operaciones de una manera rápida y eficiente, pero que no sustituye la formación básica del estudiante. No se trata de convertir a los estudiantes en programadores, ni de infundirles la creencia equivocada, de que el dominio de un lenguaje de programación los capacita para enfrentar cualquier problema en matemáticas. Se trata de superar el estilo tradicional de "tiza y tablero" incorporando el computador como una herramienta. Programas como "Mathematica" abren una cantidad enorme de posibilidades. El aprender un lenguaje de programación, como por ejemplo el Basic, ayuda en la formación del estudiante.

F) Sobre el rendimiento en la Universidad.

Si se observan los resultados obtenidos por los estudiantes en preguntas tan simples como fueron la mayoría de las postuladas, se concluye que las deficiencias que traen consigo son muy profundas. Desafortunadamente, no es fácil recuperar el tiempo perdido en la primaria y el bachillerato en los primeros semestres de la Universidad y las consecuencias de estas deficiencias son obvias; lo más usual es que un estudiante mal preparado en matemáticas comience su universidad perdiendo repetidas veces las materias básicas y saliendo finalmente expulsado de la Universidad por bajo rendimiento académico o, en el mejor de los casos, graduándose con notas regulares que lo harán un profesional mediocre. Lo peor es que el peso de estos estudiantes regulares infiere en la calidad de los cursos que se imparten, ya que la tendencia natural de un profesor es la de nivelar por lo bajo.

Sería deseable que la Universidad instaurara un semestre nivelatorio, con el fin de ayudarles un poco a los estudiantes a cubrir las deficiencias que traen, aunque es muy probable que éste no sea suficiente para nivelar un estudiante muy mal preparado.

G) Sobre el examen de admisión y una ampliación de cupos.

Cabe preguntar: ¿Cómo pasan estudiantes tan mal preparados a la Universidad Nacional? ¿Porqué el examen de admisión no cumple su objetivo de escoger estudiantes con un mínimo nivel? ¿Se ha bajado la exigencia en su nivel? ¿Están los estudiantes siendo preparados sólo con el objetivo de pasar esta clase de exámenes y el objetivo de aprender realmente se ha olvidado? ¿Cómo afectaría el nivel de los estudiantes admitidos a la Universidad una ampliación de cupos? ¿Si se piensa en una ampliación de cupos, será imprescindible uno o dos semestres de nivelación?

H) Sobre otras encuestas.

En los semestres subsiguientes al comenzado en mayo de 1997, el grupo de profesores de los cursos magistrales de Matemáticas I siempre ha hecho una prueba similar a la mostrada en este trabajo. Los resultados son similares. Adicionalmente a la prueba, se le hacen al estudiante una serie de preguntas, con el fin de ubicar al estudiante en edad, sexo, resultado del ICFES, estrato socio-económico, gustos por diferentes ramas de la matemática, creencias en cuanto a la importancia de las matemáticas, cuánto cree que sabe en matemáticas. Los resultados de estas encuestas han sido compilados por un grupo de monitores financiados por Proantioquia, sinembargo el análisis de estos resultados está aún por hacerse.

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Apartado Aéreo 3840, Medellín, Colombia.
E-mail address: jcossio@perseus.unalmed.edu.co