CÁLCULO O

DONALD E. KNUTH
Universidad de Stanford
Estados Unidos

Estoy muy contento de ver toda la seriedad y atención que le están dando a la manera de mejorar la enseñanza tradicional del cálculo. Sin embargo, me sorprende que nadie ha discutido el tipo de cambios que personalmente creo serían más valiosos. Si fuera responsable de la enseñanza del cálculo para estudiantes universitarios de pregrado o para estudiantes avanzados de secundaria y si tuviera la oportunidad de alejarme de los libros tradicionales, ciertamente haría cambios importantes, dando énfasis a varias mejoras en la notación que los matemáticos avanzados han estado usando por más de cien años.

El cambio más importante sería la introducción, desde muy temprano, de la notación O y las ideas relacionadas. Esta notación, usada por primera vez por Bachman en 1894 y popularizada por Landau, tiene la virtud de simplificar cálculos, por lo tanto hace más fácil muchas partes de la materia, además de ser muy intuitiva y fácil de entender. La idea clave es ser capaces de tratar cantidades que sólo son especificadas parcialmente y poder emplearlas en ecuaciones y fórmulas.

Yo empezaría mi curso ideal de cálculo introduciendo la "notación A", que significa "cuando más en valor absoluto". Por ejemplo, $A(2)$ representa una cantidad cuyo valor absoluto es menor o igual a 2. Esta notación tiene una conexión natural con los números decimales: Decir que π es aproximadamente 3.14 equivale a decir $\pi = 3.14 + A(.005)$. Los estudiantes descubrirían fácilmente cómo calcular con A:

$$\begin{aligned}
&10^{A(2)} = A(100);\\
&(3.14 + A(.005))(1 + A(0.01))\\
&\quad = 3.14 + A(.005) + A(0.0314) + A(.00005)\\
&\quad = 3.14 + A(0.03645) = 3.14 + A(.04).
\end{aligned}$$

Por supuesto yo les explicaría que el signo igual no es simétrico con respecto a estas notaciones; se tiene $3 = A(5)$ y $4 = A(5)$ pero no $3 = 4$, tampoco se puede decir que $A(5) = 4$. Sin embargo es posible afirmar que $A(0) = 0$. Como dice de Bruijn en [1, §1.2], los matemáticos normalmente usan el signo $=$ como si fuera la palabra "es" en español: Aristóteles es un hombre, pero un hombre no es necesariamente Aristóteles.

La notación A se aplica tanto a cantidades variables como a constantes. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= A(1);\\
x &= A(x);\\
A(x) &= xA(1);\\
A(x) + A(y) &= A(x+y) \quad \text{si} \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0;\\
(1 + A(t))^2 &= 1 + 3A(t) \quad \text{si} \quad t = A(1).
\end{aligned}$$

Una vez los estudiantes se han acostumbrado a la notación A, están listos para la notación O, que se lee "del orden de" y es algo menos específica. En su forma más simple, $O(x)$ se aplica a algo que es $CA(x)$, para alguna constante C, pero sin decir cúal es el valor de C. Además, se definen condiciones colaterales para las variables que aparecen en las fórmulas. Por ejemplo, si n es un entero positivo, se puede afirmar que cualquier polinomio cuadrático en n es $O(n^2)$. Si n es suficientemente grande, se puede deducir que

$$\begin{aligned}
&(n + O(\sqrt{n}))(\ln n + \gamma + O(1/n))\\
&\quad = n \ln n + \gamma n + O(1)\\
&\qquad + O(\sqrt{n} \ln n) + O(\sqrt{n}) + O(1/\sqrt{n})\\
&\quad = n \ln n + \gamma n + O(\sqrt{n} \ln n).
\end{aligned}$$

Definiría la derivada introduciendo un concepto que podemos llamar la "derivada fuerte": La función f

Palabras Claves. Educación, Matemáticas.
Carta enviada al profesor Anthony W. Knapp, editor del Boletín de la Sociedad Americana de Matemáticas.

tiene derivada fuerte $f'(x)$ en un punto x, si

$$f(x+\epsilon) = f(x) + f'(x)\epsilon + O(\epsilon^2)$$

cuando ϵ es suficientemente pequeño. La gran mayoría de funciones que se emplean en el trabajo práctico, tienen derivada fuerte. En estos casos la derivada fuerte coincide con la derivada. Pienso que esta definición captura muy bien la intuición que yo quiero que los estudiantes tengan acerca de la derivada. Se ve inmediatamente, por ejemplo, que si $f(x) = x^2$ entonces

$$(x+\epsilon)^2 = x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2,$$

por lo tanto la derivada de x^2 es $2x$. Y si la derivada de x^n es $d_n(x)$, se tiene

$$\begin{aligned}(x+\epsilon)^{n+1} &= (x+\epsilon)(x^n + d_n(x)\epsilon + O(\epsilon^2)) \\ &= x^{n+1} + (xd_n(x) + x^n)\epsilon + O(\epsilon^2);\end{aligned}$$

por lo tanto la derivada de x^{n+1} es $xd_n(x) + x^n$ y por inducción $d_n(x) = nx^{n-1}$. De manera similar si f y g tienen derivadas fuertes $f'(x)$ y $g'(x)$, se ve fácilmente que

$$\begin{aligned}f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) &= f(x)g(x) \\ &\quad + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\epsilon + O(\epsilon^2),\end{aligned}$$

que es la derivada fuerte de un producto. La regla de la cadena

$$f(g(x+\epsilon)) = f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)\epsilon + O(\epsilon^2)$$

también se obtiene directamente cuando f tiene derivada fuerte en el punto $g(x)$ y cuando g tiene derivada fuerte en x.

Una vez se enseñe que la integración es la operación inversa a la diferenciación y que está relacionada con el área bajo una curva, se puede observar, por ejemplo, que si f y f' tienen ambas derivadas fuertes, entonces

$$\begin{aligned}f(x+\epsilon) - f(x) &= \int_0^\epsilon f'(x+t)\,dt \\ &= \int_0^\epsilon (f'(x) + f''(x)t + O(t^2))\,dt \\ &= f'(x)\epsilon + f''(x)\epsilon^2/2 + O(\epsilon^3).\end{aligned}$$

Estoy seguro que sería un placer tanto para los estudiantes y los profesores si el cálculo fuera enseñado de de esta manera. El tiempo extra invertido para introducir la notación O será recuperado ampliamente por las simplificaciones que se presentan más adelante. De hecho, habrá tiempo suficiente para introducir la notación o, que se lee "de menor orden que"y equivale a la operación de límite, y que se puede incluir en la definición de la derivada (no necesariamente fuerte):

$$f(x+\epsilon) = f(x) + f'(x)\epsilon + o(\epsilon).$$

y en otras definiciones: una función f es continua en x si

$$f(x+\epsilon) = f(x) + o(1);$$

y así sucesivamente. Pero tampoco habría problema si se deja este último tema para un curso más avanzado, donde se comprendería fácilmente por cualquiera que haya manejado lo básico de O. En realidad, no necesité usar la notación o en más de 2200 páginas de *The Art of Computer Programming*, aunque se emplearon muchas técnicas del cálculo avanzado para tratar una gran variedad de problemas a lo largo del libro.

Con seguridad los estudiantes tendrán una muy buena motivación para usar la notación O por dos razones. En primer lugar, simplifica significativamente los cálculos pues nos permite ser "descuidados" de una manera controlada y satisfactoria. En segundo lugar, aparece en los cálculos en series de potencias en sistemas algebraicos como *Maple* y *Mathematica*, que los estudiantes de hoy usarán con certeza.

Por más de 20 años he soñado con escribir un libro de cálculo con el título de *O Calculus*, en el cual los temas se desarrollen según la línea esbozada aquí. Proyectos más urgentes, tales como el desarrollo del procesador científico de textos TEX me han impedido realizar este sueño, aunque sí traté de escribir una buena introducción a la notación O para estudiantes que ya habían cursado cálculo en [2, Chapter 9]. Tal vez mis ideas puedan ser equivocadas, pero espero que esta carta despierte la atención de gente con mayor posibilidad de escribir textos de cálculo para el nuevo milenio. Espero que algunas de estas ideas, ya clásicas, demuestren ser tan fructíferas para los estudiantes de las próximas generaciones como lo han sido para mí.

[1] N. G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis* (Amsterdam: North-Holland, 1958).

[2] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics* (Reading, Mass.: Addison–Wesley, 1989).

STANFORD UNIVERSITY, CALIFORNIA, ESTADOS UNIDOS
E-mail address: knuth@stanford.edu