

# EL CAOS MATEMÁTICO EN LA INGENIERÍA ACTUAL

GERMÁN POVEDA JARAMILLO

Universidad Nacional de Colombia

Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos

Medellín

**RESUMEN.** Se presentan algunas reflexiones sobre el estado de la enseñanza y la aplicación de las matemáticas en las Ingenierías de hoy en Colombia, señalando notables deficiencias y sus consecuencias. Para contribuir en un sentido constructivo se presentan algunas ideas de caos determinístico de baja dimensionalidad y su cuantificación en sistemas dinámicos no lineales y se aplican a la evolución del sistema de Lorenz (1963) y a la serie de lluvias mensuales de Medellín.

**ABSTRACT.** Some thoughts are presented concerning the current state of teaching and application of mathematics in the context of Engineering in Colombia, pointing out deficiencies and its consequences. To contribute in a constructive sense, some ideas are presented concerning tools to quantify deterministic low-dimensional chaos in non-linear dynamical systems, applied to the evolution of the Lorenz (1963) system and to monthly rainfall records at Medellín

## 1. INTRODUCCIÓN

Las ciencias básicas constituyen la fundación del edificio de la Ingeniería. La matemática ocupa allí un lugar de privilegio, "admirablemente adaptada a los objetos de la realidad", como decía Einstein. Los desarrollos más trascendentales de las matemáticas se han logrado en gran parte impulsados por las preguntas sobre el origen, la estructura y el destino del Universo, sobre las causas y la dinámica de los procesos naturales, sobre los desarrollos de la tecnología (incluyendo la de la guerra), y sobre la experiencia del mundo cotidiano. Desde esa perspectiva, la Ingeniería y la matemática han caminado inseparablemente desde las civilizaciones antiguas hasta hoy, porque aunque la Ingeniería es mucho más que sólo ciencia aplicada, está basada en principios científicos, y el rigor y la racionalidad son requisitos de la buena Ingeniería. La naturaleza de la Ingeniería, como la de la ciencia, es fundamentalmente buen pensamiento sobre las cosas y el universo en el cual están inmersas.

Hay actualmente en Colombia un panorama preocupante en la enseñanza y en la práctica de las Ingenierías. El terrible déficit de cubrimiento de la educación superior que existe en Colombia ha desembocado en el nacimiento de "Ingenierías" de todas las

denominaciones en "Universidades" que no desarrollan investigación pero que ofrecen títulos universitarios sin control de calidad, con pocos profesores que cuenten con estudios de posgrado, y sin laboratorios adecuados.

Otro elemento clave del deterioro de las Ingenierías en Colombia es que su vínculo riguroso con las ciencias básicas se ha ido relajando, entre otras razones por la existencia de paquetes de software que resuelven problemas de física, de matemáticas y estadística, de química, etc., y, obviamente, de diseño en todas las áreas de la Ingeniería. Reconocemos que tales herramientas son importantes y útiles, y por supuesto que deben ser usadas en los contextos adecuados. Sin embargo, su uso indiscriminado deteriora la capacidad de análisis, rebaja el pensamiento creativo y señala caminos erróneos a los futuros ingenieros. Es hora de que estos adelantos tecnológicos abran el espacio (tiempo) necesario en los currículos y en los cursos de ingeniería. Así, las horas de clase y los cursos que antes se dedicaban a tareas que implicaran desarrollar largos cálculos y al análisis de detalle de diseño (y que hoy se abrevian al máximo en el computador), hoy deberían ser empleados en ahondar los conocimientos en materias que brinden

*Palabras Claves.* Educación, Matemáticas, Ingeniería, Teoría del Caos, Predecibilidad.

Se agradecen las sugerencias hechas por los profesores Carlos Mejía y Jorge Alberto Naranjo.

herramientas de análisis más poderosas, en cursos de ciencias básicas que los estudiantes nuestros requieren con urgencia, en matemáticas, en física, en química, en biología, en geofísica, y en muchísimos campos de la ingeniería del siglo 21.

Pero también hay otros graves síntomas. Hay deficiencias fundamentales en la enseñanza y sobre todo en el aprendizaje de las matemáticas en la secundaria. Tales deficiencias son, en mucho, consecuencia del enfoque Bourbakiano que ha usado la pedagogía matemática de las últimas décadas: lemas, hipótesis, corolarios que poco dicen a los estudiantes sobre la conexión de las matemáticas con problemas del mundo real. Para corroborar esta hipótesis me refiero al diagnóstico hecho por profesores de matemáticas de los primeros semestres universitarios, que se incluye en el trabajo de Cossio y Tejada (1999). Muchas de tales consecuencias habían sido previstas y alertadas por Poveda-Ramos (1984). A mi manera de ver, esta es una de las razones que explican los paupérrimos resultados del desempeño en matemáticas de los estudiantes Colombianos a nivel mundial, así como de los estudiantes de Antioquia en relación con sus pares Colombianos (reportados en trabajos del profesor Miguel Monsalve del Departamento de Física de la Universidad Nacional, sede Medellín). El rigor detallado en la creación y en la escritura de la matemática es absolutamente necesario en su condición de ciencia exacta. Ese altísimo rigor logra reducir nociones muy complicadas a una esencia que proporciona los fundamentos para desarrollos posteriores enriquecedores e iluminantes. Lo que pensamos es que la pedagogía de las matemáticas desde el enfoque formal Bourbakiano es poco adecuada e insuficiente para las mentes infantiles y juveniles, y particularmente para estudiantes de ingeniería, debido a su incapacidad para conectar las ideas matemáticas con las preguntas de la naturaleza y de la tecnología. Los estudiantes necesitan un contexto motivante, y también estar conscientes de las razones por las cuales están aprendiendo lo que aprenden.

Hay también deficiencias fundamentales en la enseñanza de las matemáticas en las ingenierías nuestras, que comparten el mismo origen señalado en el párrafo anterior. Pero aquí aparecen otros elementos muy preocupantes. Con brillantes y notables excepciones, muchos de los profesores de matemáticas y de ingeniería no conocen o no mencionan los problemas a los cuales se conecta el conocimiento matemático con la Ingeniería, la Geofísica, la Biología o aún en la Industria. Esto es lamentable pues la matemática provee conocimientos muy potentes, pero también

proporciona recursos mentales, paradigmas, maneras demostrativas y aproximaciones metodológicas que más adelante se usan en la solución de problemas prácticos. Por ello es que es una herramienta indispensable para la innovación, la creación científica en ingeniería y para la construcción del desarrollo tecnológico. Esto lo sabía Arquímedes y lo sabían Newton, Euler, Gauss, Lagrange, Laplace, Jacobi, Kolmogorov, y todos los grandes de la matemática.

Otra deficiencia de fondo que se aprecia es que se está enseñando la geometría (si acaso), el cálculo, la estadística y las probabilidades, y las ecuaciones diferenciales de los siglos 18 y 19, atraso que también se aplica a las llamadas "materias profesionales", sobre el cual comentaremos en próxima oportunidad. Poco o nada se enseña sobre recientes desarrollos de las matemáticas, y mucho menos de su posible aplicación en la solución de problemas ingenieriles. Para la muestra un botón. En la tabla de contenido del último número de "Qué está pasando en las Ciencias Matemáticas 1998-1999" (Cipra, 1999), podemos leer artículos sobre:

- El triunfo en ajedrez del computador llamado "Deep Blue" de IBM sobre Kasparov, desde la perspectiva de la optimización de algoritmos de búsqueda, y su aplicación en diversos juegos combinatorios.
- Los vínculos existentes entre uno de los problemas más profundos existentes en la teoría de números (la llamada Hipótesis de Riemann), con uno de los temas más complicados de la física actual (caos cuántico).
- Un ensayo sobre la obra de Paul Erdos, muchos de cuyos resultados y teoremas tienen hoy aplicación en ciencias de la computación.
- La Geometría Algebráica y las posibilidades de los métodos computacionales para solución de tales problemas.
- La prueba computacional de la Conjetura de Robbins (un famoso problema no resuelto en lógica simbólica que había permanecido sin solución desde la década de 1930), mediante lo que podría llamarse "razonamiento propio" de un computador, programado por el mismo equipo de trabajo que ya había demostrado el Teorema de los Cuatro Colores.
- La primera evidencia experimental de la existencia de caos matemático en una población de escarabajos.
- Investigación que se está realizando en una nueva clase de computación, basada en principios de la mecánica cuántica.

- Un adelanto fundamental en la teoría de la complejidad computacional que tiene implicaciones en sistemas criptográficos con seguridad "garantizada".
- Los vínculos existentes entre arte y matemáticas ejemplificados en las obras de M.C. Escher y de Marcel Duchamp.
- La reedición del trabajo titulado "El Descubrimiento Matemático" de Henri Poincaré.

Evaluando esta tabla de contenido se observa que nuestros estudiantes de ingeniería muy raramente han oído hablar de estos temas, sin mencionar su estudio y aplicación a problemas prácticos, a pesar de que todos ellos tienen aplicaciones de primer orden en las Ingenierías. Podríamos mencionar muchos otros temas de los desarrollos más recientes de la matemática, la física, la química y la biología que no se estudian en los currículos de las Ingenierías nuestras. Los riesgos a los que esto conduce son demasiado costosos: (i) débil nivel académico y poca preparación profesional de nuestros egresados en relación con sus pares de otros países, (ii) pocas posibilidades de desarrollar innovación, investigación y desarrollo tecnológico para actuar sobre nuestra realidad y mejorarla.

Nótese que en la tabla de contenido referida más arriba aparece varias veces la mención de Caos matemático. La coincidencia de este hecho con las anteriores reflexiones sobre el estado de la matemática en la Ingeniería de hoy, me inducen a exponer algunas ideas concernientes al Caos determinístico, muchos de cuyos desarrollos originales subyacen en los trabajos del también mencionado Henri Poincaré.

## 2. CAOS DETERMINÍSTICO EN INGENIERÍA

Temas como la geometría fractal y la dinámica caótica subyacen en un gran cambio que se ha dado recientemente en la manera en que científicos e ingenieros perciben y, por tanto, modelan el mundo real. Investigadores en temas como la química, la biología, la física, la geología, la economía, la fisiología, los ingenieros mecánicos, eléctricos, químicos, civiles, aeronáuticos han incorporado el bagaje de conocimientos de la geometría fractal y de los sistemas dinámicos no lineales que exhiben o no caos matemático para tratar de entender, explicar y predecir diversos fenómenos físicos: de los árboles a la turbulencia, de la organización espacial de las ciudades a las dinámica de las fracturas, de la música a los cráteres de la luna, de las redes de drenajes en cuencas hidrográficas a las fluctuaciones del clima, de las epidemias de enfermedades a la distribución

de la lluvia, de los precios de las acciones en la bolsa de valores a los procesos de extracción del petróleo, de las mezclas de gases a la convección térmica, del tráfico de las ciudades a la vibración de motores y estructuras. Algunas referencias básicas sobre Teoría de Caos son los trabajos de Addison (1997), Bergé et al. (1984), Hale y Kocak (1991), Lorenz (1993), Nicolis (1995), Ruelle (1991), Gleick (1987).

Muchas de las ideas matemáticas que hay detrás de los temas de la geometría fractal y de teoría de caos existían desde hace largo tiempo, desde los trabajos de Hadamard, Duhem, Fatou, Julia, Poincaré, Cantor, Weirstrass, Sierpinski y otros. El advenimiento del computador con su capacidad de efectuar gran cantidad de cálculos en muy poco tiempo, ha posibilitado la investigación y aplicación de las ideas de caos y fractales. En ingeniería estas ideas se han aplicado en las siguientes áreas:

1. Ingeniería sísmica El comportamiento dinámico caótico de los terremotos (Carlson y Langer, 1989; Huang y Turcotte, 1990).
2. Sistemas electrónicos (Ogorzalek, 1995; Chua y Hasler, 1993) y circuitos eléctricos (Madan, 1993).
3. Ingeniería Estructural (El Naschie, 1990; Moorthy et al., 1996).
4. Arquitectura naval (Choi y Lou, 1991).
5. Ingeniería Mecánica (Neilson y Goncalves, 1992; Zhao Y Hahn, 1993; Adiletta et al., 1996).
6. Ingeniería de Tránsito (Jarrett y Xiaoyan, 1992, Muller et al., 1994; Addison y Lou, 1996)
7. Ingeniería Química (Scott, 1994; Villermaux, 1993). En especial sobre la reacción química de Belousov-Zhabotinsky (Hudson et al., 1981; Roux y Sweney, 1981, Dolnik y Epstein, 1996).
8. Dinámica económica (Parker y Stacey, 1994; Leydesdorff y van den Besselaar, 1994; Lorenz, 1993).
9. Mecánica oscilatoria (Baker y Golub, 1990).
10. Reactores de tratamiento de aguas (Paladino, 1994).
11. Semiconductores no lineales (Allen et al., 1991).
12. Flujos Geostróficos (Ott y Tel, 1993).
13. Acústica (Lauterborn, 1996).
14. Óptica (Gibbs et al., 1981).
15. Procesos de corte mecánico (Grabec, 1986).
16. Lasers (Cloet y Braiman, 1996; Gioggia y Abraham, 1983).
17. Ondas y solitones (Nettel, 1995).

18. Turbulencia (Frisch, 1995; Kadanoff, 1993; Barenblat et al., 1983; Sreenivasan y Ramanhakar, 1986; Ruelle, 1983, Guckenheimer, 1986, Desissler, 1986, Mandelbrot, 1984, Meineveau y Sreenivasan, 1987, Frisch y Orzag, 1990).
19. Turbulencia en la atmósfera (Lorenz, 1963, Poveda-Jaramillo y Puente, 1993; Nezlin, 1994).
20. Flujo de Couette-Taylor (Gollub y Swenney, 1975; Swenney, 1975; Brandstater y Swenney, 1987; Mullin y Pierce, 1989).
21. Rutas de la turbulencia hacia el caos (Landau, 1944; Ruelle y Takens, 1971, Feigenbaum, 1978, 1980; Berge et al., 1992).
22. Flujos de fluidos pulverulentos o granulares (Bideau et al., 1995).

### 3. GENERALIDADES ACERCA DE CAOS DETERMINÍSTICO

Desde los trabajos de Henri Poincaré sobre el problema de tres cuerpos en astronomía se sabe que hay sistemas de ecuaciones no lineales que presentan soluciones inestables. La lista del numeral anterior proporciona una idea de la existencia de "atractores extraños" en el comportamiento de muchos sistemas dinámicos no lineales. Un atractor extraño (Ruelle y Takens, 1971) de un sistema determinístico de ecuaciones diferenciales no lineales se caracteriza por ser una cuenca de atracción de las trayectorias que constituyen las soluciones en el espacio de fases que exhibe una altísima sensibilidad a las condiciones iniciales. Obviamente, esta sensibilidad a las condiciones iniciales influye de manera notable en el análisis de la dinámica del fenómeno, ya que exige mucha precisión en las condiciones iniciales, lo cual en términos prácticos impone fuertes restricciones a la predecibilidad de largo plazo. Este hecho se refleja en un rápido decaimiento en la función de autocorrelación y la existencia de un espectro de Fourier de banda ancha. Un atractor extraño tiene la propiedad de ser un objeto fractal, ya que su dimensión de Hausdorff-Besikovitch es mayor que su dimensión topológica (Mandelbrot, 1983).

Una condición para que un sistema sea caótico es que sea no lineal, que además posea pocos grados de libertad o que tenga un atractor de baja dimensionalidad que gobierne el comportamiento dinámico del sistema, y que exhiba una altísima sensibilidad a las condiciones iniciales. El trabajo ya clásico de Lorenz (1963) constituye la primera evidencia de caos en la dinámica del clima. Su modelo consiste en tres ecuaciones diferenciales no lineales acopladas para

describir de una manera muy sencilla el fenómeno de la convección atmosférica ocasionado por el calentamiento de la atmósfera desde la superficie del terreno. El sistema de ecuaciones de Lorenz es

$$(3.1) \quad \begin{aligned} X' &= -\sigma X + \sigma Y \\ Y' &= XZ + \gamma X - Y \\ Z' &= -XY - bZ \end{aligned}$$

en donde la comilla representa una derivada con respecto al tiempo. La variable  $X$  es proporcional a la velocidad del movimiento convectivo,  $Y$  es proporcional al gradiente de temperatura, y la variable  $Z$  es proporcional a la distorsión del perfil de temperatura vertical de la linealidad. Los parámetros  $\sigma$  y  $b$  son fijos ( $\sigma = 10$  y  $b = 8/3$ , típicamente), mientras que  $\gamma$  es un parámetro de control.

El sistema (3.1) se puede resolver numéricamente usando un algoritmo de Runge-Kutta, para diferentes valores de  $\gamma$ . Para valores de  $\gamma < 24$ , las series de tiempo en  $X$ ,  $Y$  o  $Z$  son estacionarias o periódicas, mientras que para  $\gamma \geq 24$ , la solución es irregular y caótica. En la Figura 1 se presenta la solución numérica del sistema de Lorenz, para  $\gamma = 45, 92$ . En la fila superior se muestran las proyecciones bidimensionales de las trayectorias de  $X$  vs.  $Z$ , de  $X$  vs.  $Y$  y de  $Y$  vs.  $Z$ , y en la fila inferior se muestra la evolución de las tres variables como función del tiempo,  $t$ . El atractor extraño encontrado por Lorenz se caracteriza por ser globalmente estable pero localmente impredecible, debido a su inherente extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Este hecho se deriva de un proceso de doblado y estirado de las trayectorias dentro del atractor, es decir que en unas direcciones el atractor se expande y en otras direcciones se contrae; se trata de un "atractor extraño". Por ello se ha recurrido a la metáfora del "aleteo de la mariposa" en la selva del Amazonas que es capaz de desatar un tornado en Japón a la semana siguiente.

### 4. HERRAMIENTAS PARA LA CUANTIFICACIÓN DE CAOS

**4.1. Exponentes de Lyapunov.** Los exponentes de Lyapunov proporcionan una medida de la tasa promedio de divergencia de las trayectorias en el espacio de fases. Trayectorias caóticas presentan al menos un exponente de Lyapunov positivo. Para trayectorias periódicas, todos los exponentes de Lyapunov son negativos. En general existen tantos exponentes de Lyapunov como ecuaciones dinámicas. Mediante el conjunto de los exponentes de Lyapunov

es posible estimar la tasa a la cual convergen o divergen las trayectorias dentro de un atractor. Cualquier sistema que contenga por lo menos un exponente de Lyapunov positivo se define como caótico (Wolf et al., 1985). Existe todo un espectro de exponentes de Lyapunov definido en términos de la forma en que se deforma el atractor (una esfera inicial de eje  $p_i(0)$ ) a medida que evoluciona en el tiempo. Así, el  $i$ -ésimo exponente de Lyapunov,  $\lambda_i$ , se define en términos de la tasa de crecimiento del  $i$ -ésimo eje,  $p_i$ , como

$$(4.1) \quad \lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_2 \frac{p_i(t)}{p_i(0)}$$

en donde los  $\lambda_i$  están ordenados de mayor a menor. Los exponentes de Lyapunov pueden utilizarse para caracterizar el tipo de atractor. Si todos los  $\lambda_i$  son negativos, el atractor es un punto. Si  $\lambda_1 = 0$ , y los demás son negativos, el atractor es un ciclo límite estable. Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , y los demás son negativos, el atractor es un toro bi-dimensional en el espacio de fases. Si al menos un exponente de Lyapunov es positivo, el atractor es extraño, indicando una divergencia exponencial de las trayectorias en el atractor, lo cual genera una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales.

**4.2. Conjunto de Dimensiones.** Como ya se mencionó, un sistema caótico presenta una divergencia exponencial de las trayectorias en el espacio de fases, aunque ellas se encuentran restringidas en una región acotada del mismo espacio. Las trayectorias sufren un proceso de "estirado y doblado" dentro del atractor, lo que ocasiona la rápida separación de una trayectoria con respecto a aquellas que le han sido temporalmente vecinas.

**4.2.1. Dimensión de Hausdorff.** La dimensión fractal, también llamada de Haussdorff-Besikovitch, de un atractor extraño, puede estimarse como

$$(4.2) \quad D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$$

La ecuación (4.2) significa que el número  $N$  de cajones de lado  $\epsilon$  que se requieren para cubrir un objeto (en este caso bi-dimensional), es inversamente proporcional a  $\epsilon$ . Observe que el valor de  $D$  para un

punto, una línea y un plano es 0, 1 y 2, respectivamente. En general, un fractal es un objeto (conjunto) que tiene un valor de  $D$  no entero (fraccionario).

**4.2.2. Conjunto Generalizado de Dimensiones.** Para la descripción de un atractor extraño se ha definido un conjunto infinito de dimensiones  $D_q$ , que incluye la dimensión fractal. Tal conjunto de dimensiones caracteriza completamente el objeto y se determina con (Hentschel y Procaccia, 1983):

$$(4.3) \quad D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\sum_{i=1}^m p_i^q)}{\ln(\epsilon)}$$

donde  $p_i$  es la probabilidad de que un punto en la trayectoria esté dentro del  $i$ -ésimo cajón de un atractor cubierto con  $m$  cajones de tamaño  $\epsilon$ .

Puede demostrarse que, en el límite cuando  $q$  tiende a cero, la ecuación (4.3) es la misma ecuación (4.2), correspondiente a la dimensión fractal. Y la dimensión de información  $D_1$  se define como:

$$(4.4) \quad D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \epsilon} \sum_{i=1}^m p_i \ln p_i$$

La dimensión de correlación,  $D_2$ , se define como (Grassberger y Procaccia, 1984)

$$(4.5) \quad D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\sum_{i=1}^m p_i^2)}{\ln \epsilon}$$

la cual también puede definirse como

$$(4.6) \quad D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r}$$

en donde  $C(r)$  es la función de correlación entre pares de puntos, definida como

$$(4.7) \quad C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \theta(r - |x_i - x_j|)$$

y  $\theta$  es la función de paso unitario de Heaviside. Realmente,  $C(r)$  cuenta cuantos pares de puntos  $(x_i, x_j)$  hay en el atractor, tales que su distancia  $|x_i - x_j|$  es menor que  $r$ . Es posible demostrar que para el conjunto generalizado de dimensiones  $D_q$  se cumple la condición  $D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq \dots \geq D_n$  (Hentschel y Procaccia, 1983). Según la definición de las ecuaciones, y desde el punto de vista práctico es mucho más sencillo calcular la dimensión de correlación  $D_2$  que la dimensión fractal  $D_0$ , aunque las dos están fuertemente ligadas, y por ello se utiliza ésta última para caracterizar las propiedades métricas y geométricas del atractor extraño.

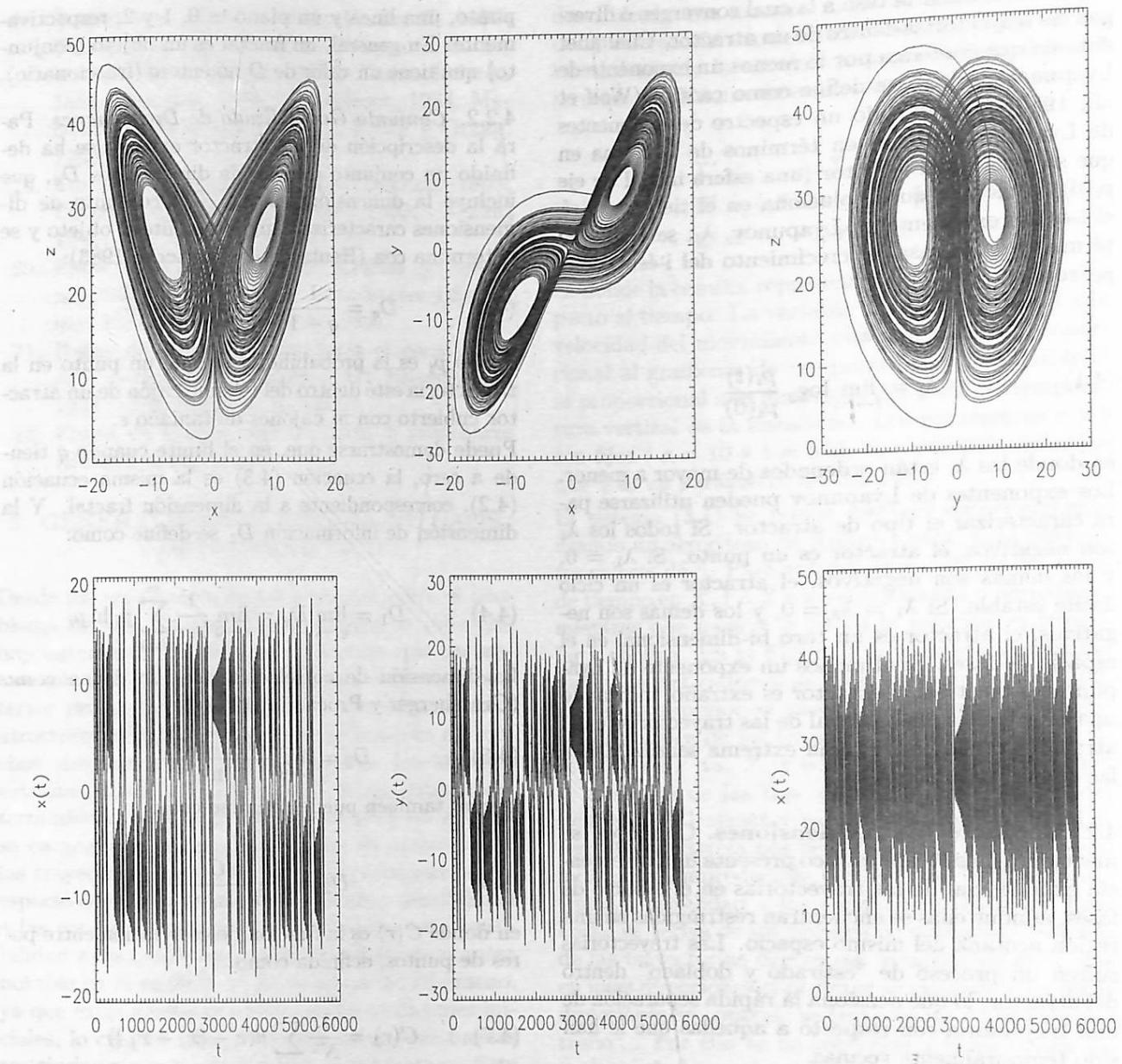


FIGURA 1. Proyecciones bidimensionales de las trayectorias en el espacio de fases del sistema de Lorenz (ecuación 3.1), en régimen de caos (fila superior). Evolución temporal de las variables  $X, Y, Z$  (inferior)

**4.3. Reconstrucción del atractor a partir de series temporales.** Para la reconstrucción de la trayectoria de la solución de un sistema de ecuaciones no lineales es necesario obtener su solución por métodos analíticos o numéricos. Generalmente el conjunto de ecuaciones no es conocido a priori, pero sí se cuenta con series temporales de las variables involucradas en la dinámica de tal fenómeno.

Un teorema demostrado por Takens (1981) permite reconstruir “artificialmente” la dinámica de las trayectorias en el espacio de fases. Teniendo una serie temporal  $x(t_i)$ , de una de las variables presentes en el fenómeno, se usa el método de los rezagos en el tiempo, basados en el hecho que la interacción entre las variables es tal que cada componente contiene información sobre la dinámica acoplada y compleja del sistema. El procedimiento consiste en crear los

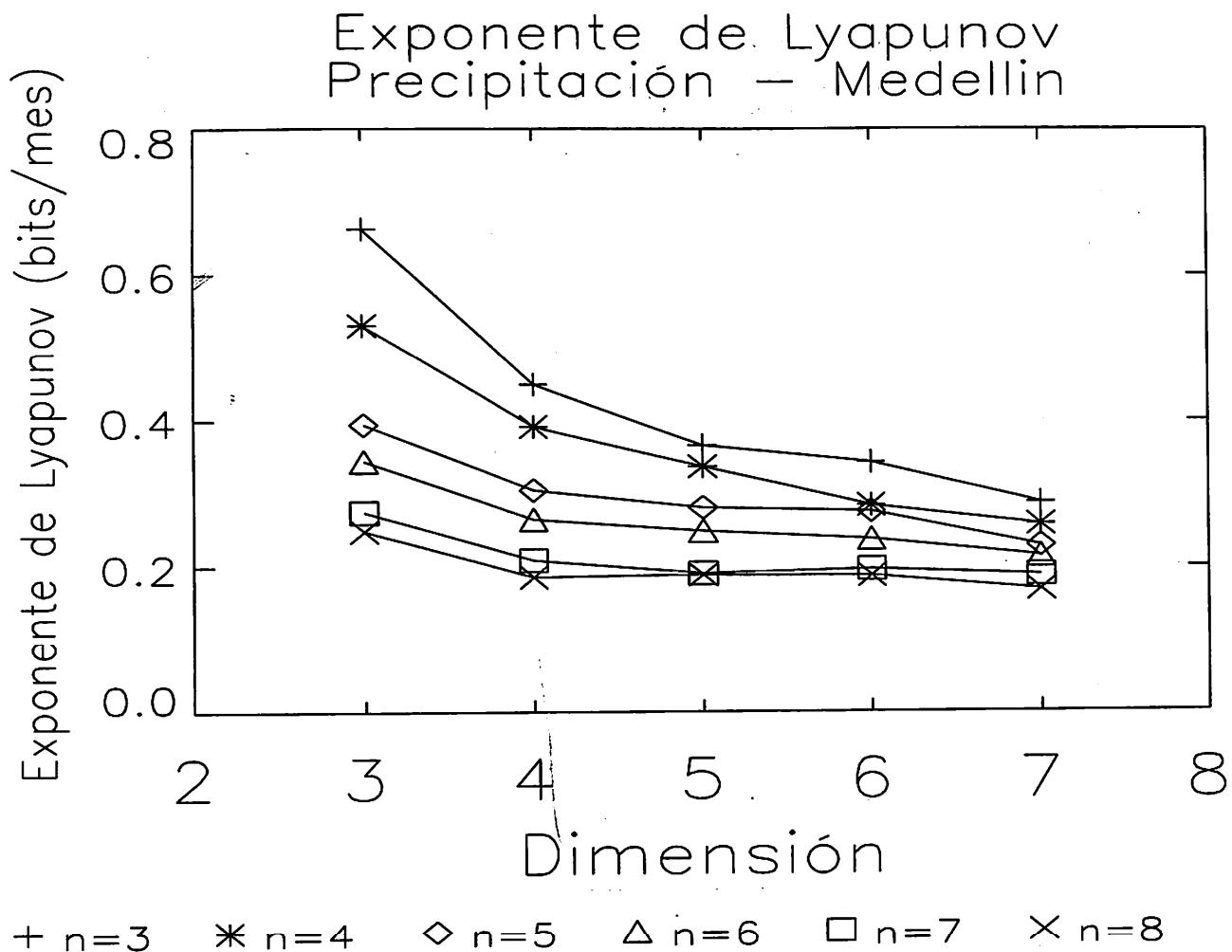


FIGURA 2. Estimación del mayor exponente de Lyapunov para la serie de precipitación mensual en Medellín

vectores  $d$ -dimensionales en el espacio de fases como  
(4.8)  $\mathbf{y}(t) = [x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (D - 1)\tau)]$

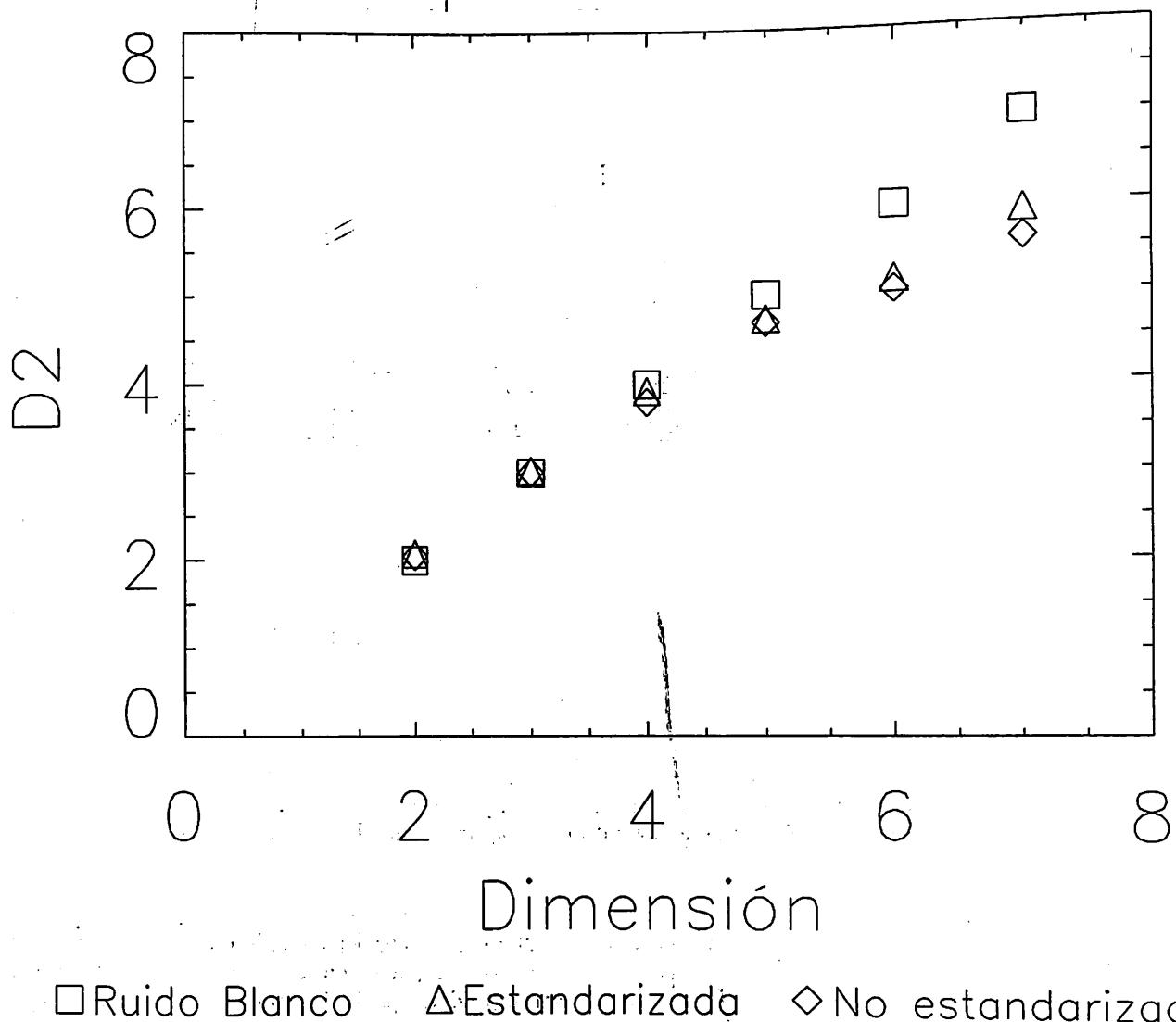
El conjunto de  $\mathbf{y}(t)$ 's captura la evolución del sistema no lineal en tanto que la trayectoria se mueve en un espacio  $d$ -dimensional. Obviamente, el atractor así reconstruido no es exactamente el original pero toda la información topológica es preservada. Esta posibilidad refleja el hecho de que, aunque con una serie temporal se está midiendo solamente uno de los grados de libertad del sistema, su evolución está íntimamente afectada por los demás grados de libertad de un sistema acoplado de ecuaciones, y por lo tanto contiene información sobre la evolución de los demás grados de libertad.

Este procedimiento encara dos dificultades. El primero es establecer el valor de  $\tau$  para la reconstrucción por medio de rezagos de la misma serie, y el

segundo es el problema de determinar el orden del espacio dimensional en el cual debe ser embebido el atractor, dado que la dinámica del sistema es desconocida a priori. Acerca de estos dos aspectos véanse los trabajos de Albano et al. (1989), y Sauer y Yorke (1993).

**4.4. Función de escalamiento entre distancias,  $C(r)$ .** La dimensión  $D_2$  representa el escalamiento de las distancias entre los puntos discretos del atractor. Tal dimensión ayuda a caracterizar las propiedades del atractor. Según la ecuación (4.6),  $D_2$  puede ser estimada como la pendiente del diagrama  $C(r)$  vs.  $r$  en el espacio logarítmico. La relación  $C(r)$  vs.  $r$  debe establecerse para valores diferentes (crecientes) de la dimensión en que se sumerge el atractor.

## Función de Escalamiento, $D_2$ vs. D Precipitación – Medellín



□ Ruido Blanco    △ Estandarizada    ◇ No estandarizada

FIGURA 3. Variación del exponente de escalamiento  $D_2$  en función de D. Para un ruido blanco el crecimiento de  $D_2$  es lineal con D. Para las series de Medellín el crecimiento es más lento, aunque no exhiben una convergencia definida.

Distinguir señales estocásticas de señales caóticas no es una tarea fácil. En el pasado, la convergencia del estimador de la dimensión  $D_2$  se tomó como una indicación de la naturaleza caótica del conjunto de datos (Grassberger y Procaccia, 1983). La demostración de que ciertos ruidos coloreados con espectro de decaimiento potencial (procesos no estacionarios) también pueden dar lugar a una dimensión finita (Osborne y Provenzal, 1989), ha reducido la

efectividad de esta prueba tradicional para cuantificar caos. Sin embargo, Cutler (1995) ha puesto rigor a la definición de  $D_2$ , que sigue siendo válida para procesos estacionarios. La información que se desprende de la estimación de la dimensión de correlación  $D_2$  es importante porque no sólo es más útil que la dimensión fractal como medida de representación de las propiedades métricas del atractor extraño, sino que permite definir la dimensión del

espacio en el que evoluciona el atractor, y por tanto el número de grados de libertad necesarios para describir el fenómeno.

## 5. APLICACIONES

Para ilustrar las ideas discutidas sobre la cuantificación de caos, se usará el sistema de ecuaciones de Lorenz (1) y una serie temporal de las lluvias mensuales en Medellín.

**5.1. Exponentes de Lyapunov.** La estimación del mayor exponente de Lyapunov para las series temporales se realizó usando la metodología propuesta por Wolf et al. (1985) incluyendo las mejoras propuestas por Landa y Chetverikov (1988). Ese algoritmo requiere estimar la divergencia promedio de trayectorias vecinas dentro del atractor, lo cual se logra tomando muchos puntos a lo largo de las trayectorias. Se comienza seleccionando una trayectoria de referencia en el atractor y un punto suficientemente cercano de una trayectoria vecina, separados una distancia  $d(t_k)$  y luego se mide la tasa de separación de las dos trayectorias a medida que ambas evolucionan. Cuando la distancia entre las dos trayectorias se vuelve demasiado grande, el algoritmo busca una nueva trayectoria y define una nueva separación, realizándose el promedio sobre diferentes regiones del atractor.

En la Figura 2 se presentan los resultados de la estimación del mayor exponente de Lyapunov para la serie de precipitación mensual de Medellín (1908-1986). El resultado de la estimación está dado en términos de unidades de bits por dato muestral. Así, un valor de +1 significa que la separación de órbitas cercanas se hace el doble, en promedio, en el intervalo de tiempo entre datos muestrales. El error es estimado como la pendiente del gráfico de la separación entre órbitas en unidades del diámetro de la hiperesfera  $D$ -dimensional más pequeña que encierra el atractor en  $n$  pasos de tiempo sucesivos. El error se calcula como 2.5 veces la desviación estándar de la pendiente dividido por la raíz cuadrada del número de trayectorias seguidas. Hay tres parámetros que deben ser definidos. La dimensión de embebimiento  $D$  que debe ser mayor que la dimensión esperada del atractor. El parámetro  $n$  es el número de intervalos muestrales sobre el cual se sigue la trayectoria antes de escoger un nuevo par de puntos. Si  $n$  es muy grande las trayectorias se apartan mucho y se pierde la divergencia exponencial de las órbitas. Si  $n$  es muy pequeño, la estimación se hace computacionalmente muy lenta. Hay otro parámetro,  $E$ , que tiene

que ver con la exactitud de los datos por debajo de la cual se espera que el ruido domine a la señal.

Todos los valores de  $\lambda$  para las lluvias de Medellín se encuentran en el rango 0,15 a 0,6. La teoría indica que de acuerdo con estos resultados, las trayectorias de la serie de lluvias mensuales en Medellín en el espacio de fases  $D$ -dimensional, presentan divergencia exponencial (base 2), en promedio. Esto sugiere la posible existencia de caos en la dinámica de las de Medellín. Sin embargo, la precisión de los resultados obtenidos está supeditada a la longitud de las series. Más adelante se discutirá este aspecto.

La magnitud de los exponentes de Lyapunov cuantifica la dinámica de los atractores en términos de información. Si  $\lambda = 0.1$  bits/mes y un punto inicial fuera especificado con una precisión de una parte por millón (20 bits), después de 200 meses (20 bits/0.1 bits/mes) habremos perdido todo conocimiento del estado inicial del sistema. Por ello se asume que el inverso del exponente de Lyapunov  $\lambda^{-1}$  es el límite de predecibilidad del comportamiento de largo plazo del sistema (Rodríguez-Iturbe et al., 1989). Así, se estima que el horizonte de predecibilidad de las lluvias mensuales en Medellín es del orden de 2 a 7 meses.

**5.2. Dimensión de escalamiento entre distancias en el atractor.** Mediante el análisis de la función de escalamiento de las distancias entre parejas de puntos del atractor,  $C(r)$  vs.  $r$  en espacio logarítmico, es posible examinar el comportamiento de la pendiente  $D_2$  -la dimensión que aquí se ha llamado de escalamiento entre las distancias de parejas de puntos en el atractor- para distinguir si la serie temporal proviene de un proceso estocástico de infinitos grados de libertad, o determinístico de baja dimensionalidad o aún no estacionario. Para la serie de lluvias de Medellín se estudió el comportamiento del diagrama  $C(r)$  vs.  $r$ , usando el algoritmo propuesto por Theiler (1987). En la Figura 3 se presentan los resultados la estimación de  $D_2$  para las lluvias de Medellín, variando los valores de la dimensión  $D$  en que se reconstruye el atractor. En el diagrama de  $D_2$  vs.  $D$  no se observa una clara convergencia o saturación hacia un valor definido, lo cual no permite concluir acerca de la existencia de caos determinístico de baja dimensionalidad en el proceso de las lluvias mensuales de Medellín.

Mediante análisis de espectro de Fourier para esta serie (no mostrado aquí) es posible determinar picos espectrales significativos en las siguientes bandas de frecuencia (Poveda, 1997): 132 meses (11 años, aca- so resultado de la posible manifestación de los ciclos

de manchas solares?), 46 meses (la banda de frecuencias del fenómeno ENSO); 28 meses (la banda de frecuencias de la QBO); 3,6 meses (una posible manifestación del carácter semi-anual de la lluvia en Medellín); 2,1 meses (manifestación de la Oscilación de Madden-Julian). La posible presencia de caos de baja dimensionalidad en la hidrología de Colombia podría ser resultado de su fuerte dependencia con respecto del fenómeno El Niño/Oscilación del Sur (Poveda, 1998) a la escala interanual, y/o como resultado de la interacción de los múltiples procesos geofísicos que modulan su clima a diferentes escalas. Hay evidencias serias sobre la posible naturaleza caótica del fenómeno ENSO (Jin et al., 1994; Tziperman et al., 1994, Chang et al. 1995).

La reconstrucción del atractor de un sistema dinámico utilizando únicamente una serie de tiempo mediante el método de los rezagos es un elemento fundamental en la cuantificación de caos. Los requerimientos de datos representan otra restricción en la estimación de la dimensión  $D_2$ . Varios investigadores han propuesto límites al número de datos que se requieren. Entre otros, Ruelle (1990) propone un tamaño de  $10^{D_2/2}$ , mientras que Essex y Neremberg (1991) sugieren que  $2^{D_2}(D_2+1)$  puntos son suficientes para la reconstrucción del atractor. Las serie de lluvias mensuales en Medellín cuenta con una longitud de 948 registros. Con el criterio de Essex y Neremberg (1991) se tienen los siguientes requerimientos:

Para una dimensión $D_2$	Puntos requeridos
3	32
4	80
5	196
6	448
7	1024
8	2304

De tal manera que si el valor de la dimensión del atractor fuera entre 6 y 7, la longitud de la serie no sería una restricción para la estimación de  $D_2$  en la hidrología de Colombia. De todas formas, el número de datos requeridos para determinar la dimensión de un atractor depende de la estructura del atractor, de su dimensionalidad y del intervalo de discretización del fenómeno. En trabajos separados, Lorenz (1991) y Read (1991) señalan que la longitud de las series de variables meteorológicas es muy corta para poder efectuar una estimación adecuada de las dimensiones de los atractores, dado el comportamiento altamente complejo del sistema climático.

que involucra muchos grados de libertad. Sin embargo, estudios de modelos y de la atmósfera misma demuestran que hay aspectos fundamentales de la dinámica atmosférica de gran escala (en espacio y tiempo) que parecen mostrar una cierta simplicidad que puede ser representada por pocos grados de libertad. A escalas temporales menores la variabilidad se considera el ruido de las escalas mayores.

Ya hemos mencionado que los procesos caóticos exhiben una altísima sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo su carácter determinístico puede de ser aprovechado para desarrollar metodologías de predicción de corto plazo con muy buenos resultados. El conocimiento de las inestabilidades (o estabilidades) locales dentro del atractor puede ayudar a mejorar en mucho las predicciones. Entre los métodos de predicción en régimen de caos se destacan: MARS (Multivariate Adaptive Regression Splines; Lewis et al., 1994), método de los análogos (Kostelich y Lathrop, 1994), método de reconstrucción del atractor filtrado (Sauer, 1994), métodos de promediación de los vecinos próximos en el atractor (Wayland et al., 1993), el método de funciones base radiales (Casdagli, 1989). Todas estas herramientas pueden ser usadas para la predicción de la hidrología de Colombia, teniendo en cuenta que la variabilidad natural del clima ocurre en todas las escalas de tiempo y que el grado de predecibilidad de los procesos está determinado por la misma escala temporal involucrada.

Hay otros temas relacionados con la teoría y aplicación de las ideas de caos que son de principal interés en el ámbito de sistemas dinámicos no lineales. Algunos ejemplos son:

- Los rasgos que deja la dinámica sobre el espectro de los operadores que describen la evolución de las densidades de probabilidades y el papel del comportamiento no-caótico, del caos determinístico y de las fluctuaciones termodinámicas (Nicolis y Daems, 1998).
- La detección de ruido aleatorio en series de tiempo (Celluci et al., 1997).
- El control y la sincronización de sistemas caóticos (Petrov et al., 1995; Ditto y Showalter, 1997).

Todos estos temas son retos para la enseñanza y la investigación en Ingeniería. El propósito es entonces, enfrentar el caos matemático en la ingeniería actual.

## 6. REFERENCIAS

- Addison, P. S., *Fractals and Chaos. An illustrated course*, American Institute of Physics, Philadelphia, 256 p., 1997.
- Addison, P. S. , y D. J. Lou, Order and chaos in the dynamics of vehicle platoons, *Traffic Eng. Control*, 37, 456-459, 1996.
- Adiletta, A., R. Guido y C. Rossi, Chaotic motions of a rigid rotor in short journal bearings. *Nonlinear Dynamics*, 10, 251-269, 1996.
- Albano, A. M., A. Passamante, y M. E. Farrell, Using higher-order correlations to define an embedding window, *Physica D*, 54, 85-97, 1991.
- Allen, J. S., R. M. Samelson, P. A. Newberger, Chaos in a model of forced quasi-geostrophic flow over topography: an application of Melinkov's method, *J. Fluid Mech.*, 226, 511-547, 1991.
- Baker, G. L. y J. P. Golub, *Chaotic Dynamics: An introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- Barenblatt, G. I., G. Ioos, y D.D. Joseph, *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, Pitman, Boston, 1983.
- Bergé, P., Y. Pomeau y C. Vidal, *Order within Chaos*. John Wiley, New York, 329 p., 1984.
- Bideau, D., F. X. Riguidel, A. Hansen, G. Ristow, X. J. Wu, K. J. Maloy, y M. Ammi, *Granular Flows: some experimental results*, manuscript, 1995.
- Brandstater, A. y H.L. Swenney, Strange attractors in weakly turbulent Couette-Taylor, flow, En: *Dimensions and entropies in chaotic systems: Quantification of Complex Behavior*, Proc. Int. Workshop (G. Mayer-Kress, ed.), Springer-Verlag, Berlin, 150-157, 1987.
- Carlson, J. M. y J.S. Langer, Mechanical model of an earthquake fault, *Phys. Rev. A*, 40, 6470-6484, 1989.
- Casdagli, M., Nonlinear prediction of chaotic time series, *Physica D*, 35, 335-356, 1989.
- Celluci, C. J., A. M. Albano, P. E. Rapp, R. A. Pittertger, y R. C. Jossiasen, Detecting noise in a time series, *Chaos*, 7, 414-422, 1997.
- Chang, P., B. Wang, T. Li, y Ji, L., Interactions between the seasonal cycle and ENSO-frequency entrainment and chaos in a coupled atmosphere-ocean model, *Geophys. Res. Lett.*, 21, No. 25, 2817-2820, 1994.
- Choi, S.-Y., E. K. Lou, Scaling behavior at the onset of chaos in the logistic map driven by colored noise, *Phys. Lett. 205A*, 173-178, 1991.
- Chua, L. O. y M. Hasler (eds.), Special issue on chaos in nonlinear electronic circuits-Part C: Applications, *IEEE Trans. circuits Syst. Part 2: Analog and Digital Signal Processing*, 1993.
- Cipra, B., What's happening in the Mathematical Sciences 1998-1999, American Mathematical Society, P. Zorn (ed.), 126 p., 1999.
- Colet, P., y Y. Braiman, Control of chaos in multi-mode solid state lasers by the use of small periodic perturbation, *Phys. Rev. E*, 53, 200-206, 1996.
- Cossio, J., y D. Tejada, *Errores típicos en matemáticas de los estudiantes de primer semestre de Universidad*, DYNA, este número, 1999.
- Crutchfield, J. P., y B. S. McNamara, Equations of motion from data series, *Complex Sys.* 1, 417-452, 1987.
- Cutler, C. D., A theory of correlation dimension for stationary time series, *Phil. Trans. R. Soc. Lon. A*, 348, 343-355, 1994.
- Deissler, A., Is Navier-Stokes turbulence chaotic?, *Phys. Fluids*, 29, 1453-1457, 1986.
- Ditto, W. L., y K. Showalter, Introduction: Control and synchronization of chaos, *Chaos*, 7, 509-511, 1997.
- Dolnik, M. y I. R. Epstein, Coupled chaotic chemical oscillators, *Phys. Rev. E*, 54, 3361-3368, 1996.
- El Naschie, M.S., Stress, Stability and chaos in Structural Engineering,: An energy approach, McGraw-Hill, London, 1990.
- Essex, T. L., y M. A. H. Neremberg, Comment on "Deterministic chaos: The science and the fiction", by D. Ruelle, *Proc. R. Soc. Lon. A*, 435, 287-292, 1991.
- Feigenbaum, M., Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.*, 19, 25-52, 1978.
- Feigenbaum, M., Universal behavior in nonlinear systems, 1 (Los Alamos Science), 4-27, 1980.
- Frisch, U., *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- Frisch, U. y S. A. Orzag, Turbulence: Challenges for theory and experiments, *Phys. Today*, 43, 24-32, 1990.
- Gibbs, H. M., F. A. Hopf, D. Kaplan, y R. L. Shocemaker, Observations of chaos in optical bistability, *Phys. Rev. Lett.*, 46, 474-477, 1981.
- Gioggia, R. S. y N. B. Abraham, routes to chaotic output from single-mode, DC-excited laser, *Phys. Rev. Lett.*, 51, 650-653, 1983.

- Gollub, J. P. y H. L. Swenney, Onset of turbulence in a rotating fluid, *Phys. Rev. Lett.*, 35, 927-930, 1975.
- Gleick, J., *Chaos*, Penguin Books, New York, 352 p., 1987.
- Grabec, I. Chaos generated by the cutting process, *Phys. Lett.* 117A, 384-386, 1986.
- Grassberger, P., e I. Procaccia, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D*, 9, 189-207.
- Green, J. M., y J. S. Kim, The calculation of Lyapunov spectra, *Physica D*, 24, 213-224, 1987.
- Guckenheimer, J. Strange attractors in fluids, another view, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 18, 15-31, 1986.
- Hale, J., y Kocak, H., *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York, 568 p., 1991.
- Hentschel, H. G. E., e I. Procaccia, The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors, *Physica D*, 8, 435-444, 1983.
- Huang, J. y Turcotte, D. L., Fractal image analysis: application to the topography of Oregon and synthetic images, *J. Opt. Soc. Am. A*, 7, 1124-1130, 1990.
- Hudson, J. L., J. Mankin, J. McCullough, y P. Lamba, Experiments on chaos in a continuos stirred reactor, *Nonlinear Phenomena in chemical Dynamics: Proc. Int. conf. (Bordeaux, 1981)*, C. Vidal y A. Pacault (eds.), Springer-Verlag, 44-48, 1981.
- Jarrett, D. y Z. Xiaoyan, The dynamic behavior of road traffic flow: stability or chaos?, *Applications of Chaos and Fractals, International State-of-the-art Seminar*, London, 1992.
- Jin, F.-F., J.D. Neelin, y M. Ghil, "El Niño on the Devil's Staircase: Annual subharmonic steps to chaos", *Science*, 264, 70-72., 1994.
- Kadanoff, L. P., Fractals: where's the physics?, *Phys. Today*, 39, 6-7, 1993.
- Kostelich, E. J. y Lathrop, D. P., Time series prediction by using the method of analogues, En: *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past* (Eds. A.S.Weigend y N. A. Gershenfeld), *SFI Studies in the Science of Complexity, Proc. Vol. XV*, Addison-Wesley, 283- 295, 1994.
- Landa, P. S., y V. I. Chetverikov, On the evaluation of the maximum Lyapunov exponent from a single experimental time series, *Soviet Phys. Tech. Phys.* 33, 236-268, 1988.
- Lauterborn, W. Nonlinear dynamics in acoustics, *Acustica*, 82, S46-55, 1996.
- Landau, L., On the problem of turbulence, *C. R. Acad. Sci. URSS*, 44, 311p., 1944.
- Leydesdorff, L. y P. van den Besselaar, *Evolutionary Economics and Chaos Theory*, Pinter, London, 1994.
- Lewis, P.A. W., B. K. Ray, y J. G. Stevens, Modeling time series by using Multivariate Adaptive Regression Splines (MARS), En: *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past* (Eds. A.S.Weigend y N. A. Gershenfeld), *SFI Studies in the Science of Complexity, Proc. Vol. XV*, Addison-Wesley, 297-318, 1994.
- Lorenz, E. N., Dimension of weather and climate attractors, *Nature*, 353, 241-244, 1991.
- Lorenz, E., *The essence of Chaos*, The University of Washington Press, Seattle, 227 p., 1993.
- Madan, R. N. (ed.), *Chua's circuit: a Paradigm for Chaos*, World Scientific, Singapore, 1993.
- Mandelbrot, B. B. , *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co., New York, 1983.
- Mandelbrot, B.B., Comment on coherent structures in fluids, fractals, and the fractal structure of flow singularities, *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*, T. Tatsumi (ed.), Elsevier, Amsterdam, 1984.
- Menéveau, C. y K. Sreenivasan, Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, 59, 1424-1427, 1987.
- Moorthy, R.I.K., A. Kakodkar, y H.R. Srirangarajan, The significance of higher modes for evolution of chaos in structural mechanics systems, *J. Sound Vib.*, 198, 267-277, 1996.
- Muller, S. C., P. Coullet, y D. Walgraef, From oscillations to excitability: a case study in spatially extended systems, *Chaos*, 4, 439-442, 1994.
- Mullin, T. y T. J. Pierce, An experimental observation of chaos arising from the interaction of steady and time-dependent flows, *Nature*, 340, 294-296, 1989.
- Neilson, R. D., y D. H. Goncalves, Chaotic motion of a rotor system with a bearing clearance, *Applications of Chaos and Fractals, International State-of-the-art Seminar*, London, 1992.
- Nettel, S. *Wave Physics: Oscillations - Solitons and Chaos*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- Nezlin, M. V., Some remarks on coherent structures out of chaos in planetary atmospheres and oceans, *Chaos*, 4, 109-111, 1994.
- Nicolis, G., *Introduction to Nonlinear Science*, Cambridge University Press, Cambridge, 254 p., 1995.
- Nicolis, G., y D. Daems, Probabilistic and thermodynamic aspects of dynamical systems, *Chaos*, 8, 311-320, 1998.

- Ogorzalek, M. (ed.), Nonlinear dynamics of electronic systems, Int. J. Electron., 79, 1995.
- Osborne, A. R., y Provenzale, A., Finite correlation dimension for stochastic systems with power law spectra, Physica D35, 357-381, 1989.
- Ott, E., T. Sauer y T. Tel, Coping with chaos: Analysis of chaotic data and the exploitation of chaotic systems, John Wiley, New York, 1994.
- Paladino, O., Transition to chaos in continuous processes: applications to wastewater treatment reactors, Environmetrics, 5, 57-70, 1994.
- Parker, D. y R. Stacey, Chaos, Management and Economics: The Implications of Non-Linear Thinking, Institute of Economic Affairs, London, 1994.
- Petrov, V., E. Mihaliuk, S. K. Scott, y K. Showalter, Stabilizing and characterizing unstable states in high-dimensional systems form time series, Phys. Rev. E, 51, 3988-3996, 1995.
- Poveda, G., ¿ Atractores Extraños (Caos) en la hidro-climatología de Colombia?, Rev. Acad. Col. Cienc., Vol. 21, No. 81, 431-444, 1997.
- Poveda, G., Retroalimentación Dinámica entre el ENSO y la hidrología de Colombia, Disertación de Ph. D., Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 1998.
- Poveda-Jaramillo, G., y C. Puente, Strange attractors in atmospheric boundary layer turbulence, Boundary Layer Meteor., 64, No.1-2, 1993.
- Poveda Ramos, G. El falso dilema de la matemática pura y aplicada. Revista Colombiana de Matemáticas, 1984.
- Read, P. L., Applications of chaos to meteorology and climate, En: Chaos and related non-linear phenomena, Ed. T. Mullin, Oxford University Press. 1991.
- Rodríguez-Iturbe, I., B. Febres de Power, M. B. Sharifi, y K. P. Georgakakos, Chaos in rainfall, Water Res. Res., 25, 1667-1675, 1989
- Roux, J.-C., y H. Sweeney, Topology of chaos in a chemical reaction, Nonlinear Phenomena in chemical Dynamics: Proc. Int. conf. (Bordeaux, 1981), C. Vidal y A. Pacault (eds.), Springer-Verlag, 38-43, 1981.
- Ruelle, D., Five turbulent problems, Physica D, 7, 40-44, 1983.
- Ruelle, D., Deterministic chaos: The science and the fiction, Proc. R. Soc. Lond. A, 427, 241-248, 1990.
- Ruelle, D., Chance and Chaos, Princeton University Press, Princeton, 195 p., 1991.
- Ruelle, D., y F. Takens, On the nature of turbulence, Commun. Math. Phys., 20, 167-192, 1971.
- Sauer, T., y J. A. Yorke, How many delay coordinates do you need?, Inter. Jour. Bifurcation and Chaos, 3, 737-743.1993.
- Sauer, T., Time series prediction by using delay coordinate embedding, En: Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past (Eds. A.S.Weigend y N. A. Gershenfeld), SFI Studies in Science of Complexity, Proc.Vol. XV, Addison-Wesley, 175-193, 1994.
- Scott, S. K., Chemical Chaos, Clarendon, Oxford, 1994.
- Sreenivassan, K. R., y R. Ramshankar, Transition intermittency in open flows, and intermittency routes to chaos, Physica D, 23, 246-258, 1986.
- Takens, F., Detecting strange attractors in turbulence. En: Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics, No. 898, 366-381, Springer-Verlag, 1981.
- Theiler, J., Efficient algorithm for estimating the correlation dimension from a set of discrete points, Phys. Rev. A. 36, 4456-4462, 1987.
- Tziperman, E., L. Stone, M. Cane, y H. Jarosh, El Niño chaos: overlapping of resonances between the seasonal cycle and the Pacific ocean-atmosphere oscillator, Science, 264, 72-74, 1994.
- Villermaux, J., Future challenges for basic research in chemical engineering, Chem. Eng. Sci., 48, 2525-2535, 1993.
- Wayland, R. D. Pickett, D. Bromley, D. y A. Pasamante, Measuring the predictability of noisy recurrent time series, Int. Jour. Bifur. Chaos, 3, 797-802.1993.
- Wolf, A., J. B. Swift, H. Swinney, y J. A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, Physica D, 16, 286-317, 1985.
- Zhao, J. Y., y E. J. Hahn, Subharmonic, quasi-periodic and chaotic motions of a rigid rotor supported by an eccentric squeeze film damper, Proc. Inst. Mech. Eng., 207, 383-392, 1993.