

# ANÁLISIS Y TENDENCIA ASINTÓTICA EN FENÓMENOS HIDROLÓGICOS DE MÚLTIPLES ESCALAS EN REDES HIDROGRÁFICAS

VIJAY K. GUPTA

Department of Civil and Environmental Engineering,  
Cooperative Institute for Research in Environmental Sciences  
University of Colorado USA

**RESUMEN.** Las redes de drenaje son patrones discretos, anidados y ramificados que abarcan cuatro ordenes de magnitud en su escala espacial. Ellas transportan y recogen agua, sedimentos, nutrientes y demás variables bioquímicas, tales como el carbón y el nitrógeno, desde las subcuencas pequeñas hasta las más grandes. Una comprensión fundamental de los balances de agua y energía en las redes de drenaje requiere una formulación adecuada, con procedimientos apropiados de comprobación de las leyes de conservación. Las soluciones de esas ecuaciones para redes discretas también requieren comprender el papel de la geometría y los parámetros estadísticos de los patrones de ramificación y de los procesos biofísicos involucrados. Se parte de una ecuación de conservación de la cantidad de agua en los segmentos de la red como un ejemplo para revisar los desarrollos recientes que han usado la idea de autosemejanza como un paraguas para tratar la naturaleza de multiescala del problema. El papel de las teorías acerca de las redes de drenaje se ilustra en este contexto y se revisan los desarrollos recientes. Los recientes resultados analíticos se apoyan frecuentemente en resultados asintóticos. Esto ha conducido a la idea de universalidad, que no depende de todos los detalles del modelo particular.

**ABSTRACT.** River networks are discrete nested branching patterns which span about four decades in their spatial scales. They aggregate water, sediments, nutrients, and biogeochemical variables such as carbon and nitrogen from small to larger subbasins. A foundational understanding of water and energy balances in river networks requires suitable formulations, solutions and tests of appropriate conservation equations. Solutions of these conservation laws for discrete networks also require an understanding of the geometry and statistics of branching patterns and of the bio-physical processes which appear in these equations. A link-based mass Conservation equation is taken as an example to review recent developments which have used self-similarity as an umbrella to deal with the multiscale nature of the problem. The role of channel network theories is illustrated in this context, and recent developments in analytical network theories are reviewed. Analytical results have very often required the use of asymptotics. It leads to universality which does not depend on all the details of a model.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el sentido más simple, modelar se refiere a desarrollar y/o a resolver una ecuación, o un conjunto de ecuaciones, analítica o numéricamente. Los ejemplos incluyen ecuaciones algebraicas, ecuaciones en diferencias o diferenciales, ecuaciones estadísticas de regresión, etc. Sin embargo, en la ciencia y la ingeniería contemporáneas, la modelación ha adquirido un contexto más amplio debido a la complejidad de

los problemas planteados, y a los avances concomitantes en la tecnología computacional. Los modelos pueden ser de naturaleza fundacional o utilitaria. Por ejemplo, las ecuaciones de conservación que gobiernan la masa, el momentum, la energía y la entropía son ejemplos de modelos fundacionales. La mayoría de nosotros aprendemos estas ecuaciones en el contexto de mecánica de medios sólidos, líquidos o gases, para los cuales es válida la suposición del continuo del espacio-tiempo. El tratamiento típico

**Palabras Claves.** Hidrología, Escalamiento, Redes de drenaje, Modelos matemáticos, Geomorfología

**KEY WORDS.** Hydrology, Scaling, River Networks, Mathematical models, Geomorphology.

Esta investigación fue financiada con becas de la Administración Nacional del Espacio y la Aeronáutica (NASA) y la Fundación Nacional para la Ciencia (NSF), de Estados Unidos. El autor quiere agradecer la traducción del Inglés que se debe a Germán Poveda y Oscar Mesa.

de las ecuaciones de conservación también requiere la especificación de "relaciones constitutivas de flujo", así como también relaciones de entrada-salida, a manera de condiciones de frontera. Algunos ejemplos bien conocidos de ecuaciones de flujo en hidrología incluyen la ecuación de Darcy para el flujo de agua en medios porosos saturados y la ecuación de Buckingham-Darcy que gobierna el flujo de humedad en suelos no saturados. Tales ecuaciones, al ser combinadas con la ecuación de conservación de masa, producen una ecuación diferencial parcial lineal en el primer caso, y una no lineal en el segundo caso. Estas y otras relaciones constitutivas se han desarrollado a escala de laboratorio por la facilidad de la experimentación, y porque cada proceso pudo ser estudiado aisladamente bajo condiciones controladas.

Los sistemas hidrológicos naturales ocurren en múltiples escalas, y los procesos biofísicos y bioquímicos que ocurren en todo ese rango de escalas están acoplados mediante retroalimentaciones no lineales. Esta dinámica acoplada e intrínsecamente no lineal, acompañada de la presencia de fluctuaciones en los forzamientos requiere tratamientos estadísticos. Tales asuntos complican fuertemente el desarrollo y las pruebas de las teorías y los modelos fundacionales. Consecuentemente, la gran mayoría de los esfuerzos de modelación en hidrología a escalas mayores que la del laboratorio se han desarrollado como respuesta a la necesidad de resolver problemas prácticos en vez de avanzar en el entendimiento de los fundamentos. Tales modelos son de naturaleza utilitaria, y se caracterizan por hacer suposiciones ad hoc en ausencia de observaciones adecuadas y de fundamentos teóricos. A pesar del progreso continuado en los métodos numéricos de simulación y en la capacidad de los computadores, los avances concomitantes en el entendimiento básico de estos sistemas se han rezagado sustancialmente. Creo que las teorías fundacionales y los modelos que involucren las leyes de conservación apropiadas a grandes escalas espacio-temporales son necesarios para guiar el desarrollo de modelos numéricos, para interpretar los resultados, y para diseñar estrategias apropiadas de medición. Déjenme ilustrar este punto muy brevemente con una ecuación para el balance de agua en redes de drenaje.

## 2. HACIA UN ENTENDIMIENTO ANALÍTICO DEL BALANCE HÍDRICO EN REDES DE DRENAJE

Una cuenca hidrográfica consiste de una red de canales, y un sistema de laderas a ambos lados de los

canales de la red. La lluvia y/o la fusión de la nieve se transforma en escorrentía, los sedimentos son erodados en las laderas, y estos a su vez son incorporados a la red de canales en su viaje hacia el océano. El ciclo hidrológico en una ladera comprende la transformación de la lluvia en escorrentía superficial, la infiltración a través de los suelos no saturados de la superficie cercana y la evapotranspiración desde la superficie del suelo hacia la atmósfera. El agua infiltrada va a recargar la humedad del suelo en la zona no saturada, va a los acuíferos, y parte aparece como escorrentía subsuperficial en una red de canales. Todos estos procesos físicos son altamente variables en el espacio y en el tiempo.

Las escalas espaciales típicas para las cuencas hidrográficas abarcan cuatro órdenes de magnitud, de  $10^2$  a  $10^6$  m. El ciclo hidrológico para las subcuencas más grandes involucra el comportamiento integrado espacialmente de varias laderas a lo largo de la red de canales. Las redes hidrográficas conectan subcuencas anidadas, agregan agua, sedimentos, nutrientes, variables biogeoquímicas tales como carbón, nitrógeno, etc., de las cuencas pequeñas a las grandes. El entendimiento de la variabilidad espacial y temporal de los procesos hidrológicos, químicos y ecológicos que ocurren entre las laderas y las cuencas anidadas a través de toda la red de canales es un tema básico que hoy emerge en la investigación y en la formación en hidrología y medio ambiente. Desde la perspectiva del desarrollo de un entendimiento fundamental de los balances de agua y energía en redes hidrográficas, uno necesita formulaciones adecuadas, soluciones y métodos de validación de las ecuaciones de conservación para las redes hidrográficas.

La literatura y la práctica en Ingeniería hidrológica han enfrentado este problema durante más de cuarenta años, mediante el desarrollo de modelos utilitarios lluvia-escorrentía. Tales modelos también se enseñan en los cursos de hidrología para ingenieros. Sin embargo, estos modelos no pueden ser validados pues sus parámetros son calibrados usando información de caudal, sin la cual no se pueden especificar independientemente. Además, a pesar de su uso extendido para obtener respuestas prácticas, no han ayudado a avanzar en nuestro entendimiento básico de la hidrología de los procesos lluvia-escorrentía. Consecuentemente, muchos problemas clásicos y de importancia práctica en ingeniería han permanecido sin solución, tales como la predicción de crecientes y caudales mínimos en cuencas sin medición o con información muy escasa. Estos problemas requieren un entendimiento fundamental de los balances de agua y energía en las redes de drenaje.



Consideremos una formulación reciente de la ecuación de balance de masa para una red (Gupta y Waymire, 1998). Primero presentaremos la notación y luego escribiremos la ecuación. El lector interesado puede ver los detalles de las distintas suposiciones conducentes a esta ecuación en Gupta y Waymire (1998). Sea  $q(e, t)$ ,  $e \in \tau$ ,  $t \geq 1$  un campo espacio-temporal que representa el caudal de un río, el volumen de flujo por unidad de tiempo, a través de un tramo  $e$  en el intervalo de tiempo  $(t-1, t)$  de duración unitaria  $\Delta$ ,  $\tau$  representa el conjunto de todos los tramos que conforman la red de drenaje de la cuenca. El flujo que sale hacia afuera de un tramo por su nudo inferior  $\underline{e}$  en el intervalo de tiempo  $(t-1, t)$  se define como  $q(\underline{e}, t) = -q(e, t)$ . Sea  $R(e, t)a(e)$  el volumen de escorrentía desde las dos laderas adyacentes hacia un tramo  $e$  en el intervalo de tiempo  $(t-1, t)$ , donde  $a(e)$  denota el área de las laderas, y  $R(e, t)$  es la intensidad de la escorrentía medida en unidades de longitud por unidad de tiempo. Este término también puede incluir el volumen de disminución de la escorrentía por unidad de tiempo debido pérdidas por infiltración en el canal o a evaporación desde la superficie del canal en el tramo  $e$ . Sea  $S(e, t)$  el cambio en el volumen total de escorrentía almacenado en el tramo  $e$  en el intervalo de tiempo  $(t-1, t)$ . Entonces la ecuación de conservación de masa para el sistema conformado por la red de canales y las laderas puede escribirse como,

$$(2.1) \quad \frac{S(e, t)}{\Delta} = -q(e, t) + \sum_{f: \underline{f}=\bar{e}} q(f, t-1) + R(e, t)a(e), \text{ para } e \in \tau, t > 1,$$

la suma en el lado derecho de 2.1 está conformada por los caudales de todos los tramos que se unen al tramo  $e$ , en su nodo superior  $\bar{e}$ . Es decir,  $f \in \tau$  si su nodo inferior  $\underline{f} = \bar{e}$ . La formulación anterior no supone que la red de canales es binaria. Sin embargo, supone que en la red no hay circuitos.

La ecuación 2.1 se puede resolver iterativamente en un computador para  $q(e, t)$ ,  $e \in \tau$ ,  $t > 1$ , que representa la hidrógrafa de escorrentía para cada tramo. Tal ecuación proporciona un ejemplo de un modelo distribuido lluvia-escorrentía a múltiples escalas, porque la generación de flujo de escorrentía en las laderas,  $R(e, t)$ , depende de la lluvia. Hoy en día, la principal dificultad para resolver 2.1 no es numérica sino física, debido a que la especificación de la variabilidad espacio-temporal del término del almacenamiento  $S(e, t)$  y del término de generación de escorrentía  $R(e, t)$ , no están bien entendidos. Tales

temas han sido y continúan siendo tópicos importantes de la investigación actual. En forma similar, las soluciones de 2.1 dependen de la estructura de ramificación de la red a través de los términos de la sumatoria del lado derecho. En una solución numérica de la ecuación 2.1, la influencia de cada uno de estos tres términos sobre la estructura espacio-temporal de la hidrógrafa de escorrentía es implícita en lugar de explícita. Aunque las soluciones numéricas son indudablemente de mucho valor práctico, el entendimiento a profundidad de las soluciones de 2.1 requiere el entendimiento explícito del papel de estos tres términos sobre la estructura espacio-temporal de la escorrentía. Daré una mirada muy breve a la literatura para ilustrar el papel de la topología de la red de drenaje en la hidrógrafa de escorrentía. Los otros dos términos se discuten de pasada al final.

La enumeración de una red, basada en la magnitud, o lo que se conoce como ordenamiento de Strahler, se puede pensar en términos de la asignación una escala espacial a una red ramificada discreta. Esta asignación no es única ya que existen diferentes maneras de definir escalas espaciales para una red ramificada. Durante el siglo XX se introdujo una gran variedad de esquemas de clasificación (Zavoianu, 1985, p. 41). Entre estos, el orden de Strahler y la magnitud resultaron ser los más significativos desde el punto de vista teórico y empírico para el entendimiento de la naturaleza de múltiples escalas de las redes hidrográficas. Consideraremos sólo estos dos en el resto de nuestra discusión.

En los últimos 30 años se han presentado tres modelos integrales de redes de canales. El primero y más conocido de ellos es el modelo aleatorio (Shreve, 1967). Ha sido desarrollado a partir de una enumeración basada en la magnitud de la red de canales, en donde la magnitud se define como el número de fuentes (nacimientos) que drenan a través de un tramo. El segundo es un modelo determinístico basado en la hipótesis de autosemejanza en la topología según se explica en la sección 3. Este modelo es conocido como el modelo de Tokunaga (1966, 1978, 1994), y está ganado creciente importancia (Peckham, 1995; Tarboton, 1996; Turcotte, 1997; Dodds and Rothman, 1999). El tercero es un modelo recientemente formulado (Veitzer and Gupta, 2000), conocido como el modelo Aleatorio Auto Semejante (AAS). Tanto el segundo como el tercer modelos están basados en el esquema de ordenamiento de Strahler (Strahler, 1964). Bajo ciertas condiciones, el modelo de Tokunaga se obtiene como un caso especial del modelo AAS.



El papel que juega la estructura de ramificación de una red en la hidrógrafa de escorrentía, ha sido investigado explícitamente desde el trabajo de Kirkby (1976), usando un esquema de enumeración basado en la magnitud y en el contexto del modelo aleatorio. Las soluciones analíticas de 2.1 bajo condiciones especiales han sido obtenidas mediante el uso de la matemática de los procesos estocásticos de ramificación denominados Galton-Watson, que son el fundamento del modelo aleatorio, así como de la formulación de las funciones generatrices y del estudio del comportamiento asintótico (Troutman y Karlinger, 1984). Estas soluciones han conducido al entendimiento analítico de las conexiones entre la llamada "función de ancho medio" de una red y la hidrógrafa unitaria instantánea (HUI). La función de ancho se define como la función que le asigna a cada distancia a la salida de la cuenca, el número de tramos que hay en la red a esa distancia. Sin embargo, no se conoce mucho de las soluciones analíticas de 2.1 dentro de un contexto espacio-temporal general.

Otro enfoque para entender los vínculos entre la estructura de ramificación de la red y la hidrógrafa de escorrentía, basado en el orden de los canales, ha sido investigado por Rodríguez-Iturbe y Valdez (1979), Gupta et al. (1980), y muchos otros desde entonces (ver la revisión por Rodríguez-Iturbe y Rinaldo, 1997). Aunque esta línea de investigación ha ilustrado la importancia que tiene la geomorfología de la red sobre la teoría de la hidrógrafa unitaria, no conectó las hidrógrafas unitarias con una teoría de las redes de canales, tal como la teoría de Tokunaga. En contraste, un trabajo reciente ha demostrado la forma de calcular los exponentes de escalamiento de los caudales máximos, en términos de la "dimensión fractal" de la red de drenaje, motivado por la necesidad de desarrollar un entendimiento hidrológico de la regionalización de frecuencias de crecientes dentro de un marco de escalamiento estadístico. Este cálculo fue desarrollado dentro de un esquema de Strahler para el modelo de una red idealizada de carácter determinístico y auto semejante, conocido como la red de Peano (Gupta et al., 1996 y Gupta y Waymire, 1998). La dimensión fractal de los caudales máximos se deriva de los máximos de la función de ancho para diferentes ordenes de Strahler, representando las distintas escalas espaciales.

En este ejemplo, la suposición de entrada hidrológica (lluvia) espacialmente uniforme, tal como se requiere en la teoría de la hidrógrafa unitaria, fue generalizada para considerar la variabilidad espacial, p. ej., cuando  $R(e, t) = R(e)\delta(t)$ . Para representar la variabilidad espacial de la intensidad de la lluvia se

utilizó un modelo de cascada aleatoria multiplicativa. Estos modelos han sido analizados por varios autores con respecto a su capacidad de reproducir las características observadas de la variabilidad espacial y temporal de la lluvia (Over y Gupta, 1996, y Foufoula-Georgiou, 1998). Después de que la precipitación cae sobre el terreno, una fracción recarga la humedad del suelo y el acuífero y el resto o retorna a la atmósfera como evapotranspiración o aparece como escorrentía superficial. Existe una gran cantidad de literatura sobre hidrología de laderas que se ha centrado en la comprensión de los procesos de generación de escorrentía en escalas cortas de tiempo, ver Duffy (1996). En el trabajo de Gupta et al. (1996) no se incluyen los procesos de generación de escorrentía, y simplemente se iguala el resultado del modelo espacial de lluvia mediante cascadas aleatorias a la escorrentía. Sin embargo, la incorporación de estos procesos al cálculo de la generación de escorrentía  $R(e, t)$  a partir de campos espaciales de lluvia a escalas de tiempo cortas es un problema abierto sobre el que se requiere investigación urgente, ver Gupta y Waymire (1998) para más detalles.

De manera interesante, las matemáticas de las cascadas aleatorias proporcionaron la maquinaria necesaria para agregar los caudales y así poder calcular los exponentes de escalamiento de los caudales máximos en términos de las dimensiones fractales de la lluvia y de la red. Los resultados asintóticos jugaron un papel clave en estos cálculos. Estos resultados se resumen en Gupta y Waymire (1998). Estos modelos idealizados representan algunos de los primeros intentos de entender la regionalización hidrológica estadística en términos de la conservación de masa dentro del esquema de Strahler. Sin embargo, las formulaciones de leyes de conservación similares a la ecuación 2.1, basadas en el esquema de ordenamiento de Strahler no han sido desarrolladas todavía en ningún detalle, y representan un área muy importante de investigación para el futuro.

Antes de dejar este tema, es importante hacer notar que para extender el enfoque anterior a escalas de tiempo mayores se requiere un entendimiento comprensivo del balance hídrico en las laderas. Por ejemplo, requeriría una generalización de la teoría de Eagleson del balance hidrológico anual desde una "escala espacial puntual" hasta una ladera (Eagleson, 1978). Este tópico constituye un área muy importante de investigación futura. Finalmente, la especificación del término de almacenamiento en 2.1 a través de toda la red requiere un entendimiento de la geometría hidráulica de las redes de drenaje. La geometría hidráulica se refiere a variables tales como pendiente, ancho, profundidad, velocidad, fricción,

etc. Esto ha sido investigado empíricamente en una estación de aforo (con respecto al tiempo) así como también en dirección aguas abajo (con respecto al espacio) en redes de drenaje (Leopold et al., 1964). El entendimiento completo teórico y empírico de la geometría hidráulica en el espacio y en el tiempo es un tópico muy importante de investigación futura. Todos estos temas son ingredientes necesarios para resolver el problema de la predicción en cuencas sin medición o con información muy escasa.

### 3. TEORÍAS ANALÍTICAS DE REDES DE DRENAJE Y LEYES DE HORTON

En la sección anterior se mostró que la estructura analítica de las redes juega un papel importante en el entendimiento del balance hídrico en las redes de drenaje. En esta sección vamos a cambiar la atención a estudiar la teoría de las redes mismas. El enfoque principal para la teoría de redes ha venido desde la necesidad de entender las leyes de Horton en un marco matemático común. Las leyes de Horton son relaciones empíricas que describen la variabilidad espacial de variables topológicas, geométricas y de geometría hidráulica en la red, de acuerdo al ordenamiento de Strahler. Algunos ejemplos de estas variables son el número de corrientes, la longitud de las corrientes, el área de las cuencas, las pendientes, los anchos, las velocidades, las profundidades y el caudal mismo. Estas leyes fueron reportadas inicialmente en un trabajo clásico por Horton en 1945, aunque muchas de ellas fueron descubiertas después por otros. Por ejemplo las leyes de Horton aplicadas a la geometría hidráulica son debidas a Leopold y Miller (1956). El más viejo y tal vez más conocido ejemplo de las leyes de Horton es el de la ley de Horton de composición del drenaje, o "ley del número de corrientes" (Strahler, 1964 pág. 43 a 56). Nosotros vamos a concentrar nuestra discusión en esta ley del número de corrientes para propósitos ilustrativos. Sea  $N_\omega$  el número de corrientes de orden  $\omega$  en una red. Entonces la ley del número de corrientes expresa que

$$(3.1) \quad \frac{N_\omega}{N_{\omega+1}} = R_b,$$

donde  $R_b$  se conoce como la relación de bifurcación. Dado que se requieren dos corrientes de orden  $\omega$  para formar una corriente de orden  $\omega + 1$ , se sigue que  $R_b > 2$ . Sin embargo no hay un límite superior en que tan grande puede ser  $R_b$ . Un valor de  $R_b$  muy grande implicaría que estamos en un estrato de rocas con pendientes muy altas y con valles estrechos y rectos y que están confinados entre gargantas (Strahler, p. 45). Sin embargo en la mayoría de las

redes de drenaje se observa que  $R_b$  varía muy poco, entre 3 y 5.

Cabe la pregunta de si las leyes de Horton y otras relaciones morfométricas representan solamente relaciones empíricas o si pueden ser entendidas dentro de una perspectiva analítica teórica y dentro de un modelo numérico o si estas relaciones tienen alguna base física apoyada en el transporte del agua y de los sedimentos sobre el terreno. Estas son el tipo de preguntas que han motivado el desarrollo de modelos geomorfológicos e hidrológicos y las teorías principales en los últimos 50 años. Nosotros podemos agrupar estas teorías en dos grandes categorías, la primera es un conjunto de teorías que empieza con ecuaciones de la física del continuo sobre la conservación de masa y momentum para agua y sedimento y busca obtener el desarrollo de las redes de canales como un patrón discreto sobre lo que sería desde otro punto de vista un paisaje continuo y suave. Estos problemas son complejos analíticamente, lo que ha llevado fundamentalmente a modelaciones numéricas de las ecuaciones. Hay un número grande de artículos que se han publicado en la última década con este enfoque, pero en mi opinión las bases físicas y teóricas sobre las que se fundamentan esos modelos todavía permanecen a un nivel de muy escaso desarrollo. Hay un libro reciente que describe algunos de estos modelos escrito por Rodríguez y Turbe y Rinaldo (1997). Hay un excelente artículo de revisión sobre redes de canales escrito por Troutman y Karlinger (1998).

Un segundo conjunto de modelos empieza con un conjunto de suposiciones matemáticas acerca de la estructura de bifurcación y la estructura geométrica de las redes para luego deducir analíticamente las leyes de Horton y otras relaciones morfométricas a partir de esas suposiciones. Estos modelos sirven un doble propósito. Primero tratan de poner todas estas relaciones empíricas dentro de un mismo fundamento matemático y, segundo, hacen predicciones de algunas relaciones empíricas nuevas, lo que sirve como comprobación de la validez de la teoría matemática para describir la naturaleza. Cuando las predicciones de una teoría no pueden explicar las observaciones entonces es necesario desarrollar nuevas teorías y por lo tanto progresar en un nuevo entendimiento de los fenómenos. Como se mencionó antes, se han introducido tres modelos integrales acerca de las redes de drenaje en los últimos treinta años que se pueden catalogar como pertenecientes a esta categoría. Vamos a describir brevemente como han servido para desarrollar un entendimiento básico de la geometría de las redes de canales en el contexto de la ley de Horton acerca del número de corrientes.

El trabajo de Leopold et al. (1964 Figura 5.4) muestra cómo la estructura de bifurcación de una red cambia dependiendo de la escala de la resolución, cómo aparece mayor estructura de la red a medida que se aumenta la resolución de los mapas. Esta característica ha sido ilustrada por Morrison y Morrison (1994) en términos del tamaño relativo de las cosas en el universo cuando se ven bajo distintas resoluciones y a medida que cambiamos nuestra potencia de resolución por potencia de diez. Ese es también el título de su libro. ¿Cómo podemos comparar dos redes a diferentes escalas de resolución en términos de semejanza en su estructura topológica de bifurcación. Strahler proporcionó una respuesta con su esquema de ordenamiento. Este esquema tiene una propiedad única de que si sus canales de menor orden son podados, entonces los canales de orden mayor que quedan, simplemente deben ser reordenados consistentemente, renombrados después del podado (Melton, 1959). Por ejemplo, si los canales de orden 1 y 2 son podados entonces los canales de orden 3 se vuelven de orden 1, los de orden 4 se vuelven de orden 2 etc. Esto establece un mapa 1 a 1 entre dos redes de igual tamaño a diferentes resoluciones o entre dos redes de diferentes tamaño a la misma resolución. En otras palabras, dos redes pueden hacerse equivalentes topológicamente hablando, en términos de su estructura de bifurcación, simplemente podando de la red mayor, los canales de orden menor que hay en "exceso". La equivalencia topológica lleva ella misma y de manera natural a la definición de autosemejanza en la topología de redes. Esta definición ha servido como base para la derivación de las leyes de Horton en la teoría de Tokunaga y en el modelo AAS. Vamos a considerar la predicción del número de corrientes por todos estos tres modelos y sus ramificaciones hacia un entendimiento de las redes de drenaje.

El modelo aleatorio fue propuesto a mediados de los años 60 (Shreve, 1967). Allí se introducen las ideas principales de magnitud, segmento o tramo de un canal entre nodos consecutivos, topología y aleatoriedad, como los conceptos fundamentales para la comprensión de la estructura de las redes. Su impacto fue tan grande que gradualmente llevó a que la noción del ordenamiento de Strahler no fuera fundamental para el desarrollo de nuevas teorías y modelos. La idea básica subyacente en el modelo aleatorio es la noción de semejanza o de no semejanza topológica entre dos redes de drenaje. Específicamente, dado el número de fuentes o nacimientos  $n$ , uno puede describir la fórmula para el número de árboles topológicamente diferentes  $N(n)$

con igual magnitud, como

$$(3.2) \quad N(n) = \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n}.$$

Esta fórmula se conoce con el nombre de Cayley, quien la obtuvo por primera vez en 1859. El lector puede simplemente chequear que para  $n$  igual a 2, 3, 4 y 5, el número de redes distintas, topológicamente hablando, es respectivamente 1, 2, 5 y 14, y que  $N(n)$  crece bastante rápido con  $n$ . El modelo aleatorio asume que "todos los árboles topológicamente distintos, con el mismo número de nacimientos, tienen igual probabilidad de ocurrir en la naturaleza". El artículo original de Shreve está reproducido en Jarvis and Woldenberg (1984). El modelo aleatorio predice que  $Rb = 4$ , en el caso límite para magnitudes muy grandes. En otras palabras se predice que la "Ley del número de corrientes" debe cumplirse asintóticamente.

Los análisis de datos recientes en grandes cuencas han mostrado que  $4.1 < Rb < 4.8$ , lo que representa desviaciones significativas con respecto a las previsiones del modelo (Peckham, 1995b). Hasta ahora, basados en las predicciones del modelo aleatorio, se ha creído que la mayoría de los ríos debe tener  $Rb = 4$ , y que las desviaciones de 4 solamente deben reflejar errores estadísticos debido a que estamos hablando de magnitudes que todavía no han llegado al límite. Sin embargo, el problema del tamaño pequeño no es relevante en el análisis de los datos anteriores porque estamos hablando de cuencas demasiado grandes. Se ha mostrado de manera convincente que el modelo aleatorio es inadecuado para la descripción de redes de canales reales. Esto ha conducido a que se investiguen nuevas teorías para representar los fundamentos de redes de drenaje. Por ejemplo, Veitzer y Gupta (2000).

Sin embargo antes de empezar con Veitzer y Gupta vamos a presentar el modelo de Tokunaga (1966), que se basa en dos suposiciones. La primera dice que el promedio del número de tributarios laterales de orden  $\omega - k$  que le caen a una corriente de orden  $\omega$  y que vamos a denotar por  $T_{\omega, \omega-k}$  no dependen del orden  $\omega$ , es decir, es una función solamente de  $k$ ,

$$(3.3) \quad T_{\omega, \omega-k} = T_k.$$

La ecuación 3.3 se toma como la definición de autosemejanza promedio. Dice que, por ejemplo, el número promedio de tributarios laterales de orden 4 que le caen a canales de orden 5 es el mismo que el número promedio de tributarios laterales de orden 2 que le caen a canales de orden 3 o al número de

tributarios laterales de orden 1 que le caen a canales de orden 2. Cualquiera de estos casos anteriores se denota como  $T_1$ . La misma propiedad vale para  $T_2, T_3$  etc., y la secuencia de los  $T_k$ -es define los generadores de la red. Ver la Figura 1. La segunda suposición dice que

$$(3.4) \quad T_1 = a, \quad \frac{T_{k+1}}{T_k} = c, \quad k = 1, 2, \dots$$

Esta suposición se conoce con el nombre de autosemejanza de Tokunaga, que se puede representar como

$$(3.5) \quad T_k = ac^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

donde  $c > a > 0$  son números reales. La comparación de las predicciones teóricas con observaciones sugiere que las redes de drenaje son autosemejantes de acuerdo a Tokunaga. Por ejemplo, las ecuaciones 3.3, 3.4 y 3.5 predicen que a medida que  $\omega \rightarrow \infty$ , se cumple la ley de Horton para el número de canales, con una relación de bifurcación dada por

$$(3.6) \quad \frac{1}{R_b} = \frac{(2 + a + c) - \sqrt{(2 + a + c)^2 - 8c}}{4c}$$

Por ejemplo,  $a = 1, c = 2$ , dan  $R_b = 4$ . Mientras que  $a = 1, c = 3$  da  $R_b = 4.73$ , que es cercano al valor observado de 4.7 para el río Powder en Wyoming. La capacidad de la teoría de Tokunaga para predecir diferentes valores de  $R_b$  es bastante significativa. En contraste, el modelo aleatorio de Shreve sólo predice valores de 4 y las desviaciones respecto a ese valor sólo se pueden interpretar como fluctuaciones estadísticas. Lo cual no es adecuado para cuencas grandes según se discutió. Comentarios semejantes se pueden hacer respecto a la incapacidad del modelo aleatorio para reproducir las observaciones asociadas a las leyes de Horton de longitudes, la ley de Hack y el exponente de la cola de la distribución de las áreas de drenaje. Mientras que estas relaciones se predicen bastante bien en el modelo de Tokunaga (Peckham, 1995b; Peckham and Gupta, 1999; Dodds and Rothman, 1999). En mi concepto, la mayor significancia de la teoría de Tokunaga es su simplicidad analítica y su capacidad para reproducir las observaciones, en contraste con el modelo aleatorio. En Turcotte (1997) hay una excelente explicación pedagógica, muy bien ilustrada de esta teoría.

Una limitación importante de la teoría de Tokunaga es que sólo entrega promedios y no incluye la variabilidad estadística que se observa en las redes reales. El modelo AAS fue desarrollado para eliminar esta limitación (Veitzer and Gupta, 2000). Contrario al modelo de Tokunaga, el modelo AAS tiene una naturaleza estadística y predice las leyes de Horton como

un comportamiento asintótico a medida que el orden tiende a infinito. Además,  $R_b$  puede tomar un amplio rango de valores. De hecho se ha mostrado que una subclase de los modelos AAS puede mostrar la autosemejanza de Tokunaga expresada por las ecuaciones 3.3 y 3.4 en el límite, para un orden grande. Una reformulación de las leyes de Horton que involucra los conceptos de autosemejanza estadística ha sido propuesto por Peckham y Gupta (1999). Esta reformulación representa una nueva manera de orden estadístico, que conecta una variable a diferentes escalas espaciales en redes de drenaje usando las distribuciones probabilísticas en vez de las medias, tal y como se hace en el análisis clásico. La nueva teoría AAS predice estas leyes de Horton reformuladas, para el caso de variables geométricas y topológicas. Todos estos resultados son válidos solamente en un sentido asintótico. Es claro que lo asintótico ha jugado un papel muy importante en un conjunto grande de investigaciones y desarrollos teóricos en hidrología. Las comparaciones entre las predicciones teóricas con los datos sugieren que la convergencia asintótica es muy rápida, lo que facilita las aplicaciones. Generalizar estos resultados para llegar a leyes de Horton para variables hidráulicas y geométricas, por ejemplo la velocidad, el ancho, la profundidad de las corrientes, la pendiente, el caudal, es todavía un asunto de investigación abierto. En el trabajo de Ibbitt et. al. (1998) hay un conjunto muy importante de observaciones de campo relacionadas con la geometría hidráulica.

#### 4. ANOTACIONES FINALES

En resumen hemos tratado de ilustrar la necesidad de desarrollar modelos fundacionales para procesos hidrológicos que ocurren a escalas espaciales mayores que la escala del laboratorio o la escala de las parcelas experimentales. Es importante el contraste con los modelos para escalas espacio temporales pequeñas, para los cuales una descripción basada en procesos normalmente es adecuada. Las descripciones para las pequeñas escalas requieren el uso de leyes de conservación y han sido el fundamento para el desarrollo de los modelos hidrológicos. A escalas mayores también hay que emplear las leyes de conservación. Pero adicionalmente hay que involucrar los patrones de la geometría y la variabilidad estadística con la descripción de los procesos en términos de leyes de conservación. Segundo, desde el punto de vista analítico, los resultados a menudo han requerido el uso de leyes asintóticas, lo que en general conducen a universalidad, pues no depende

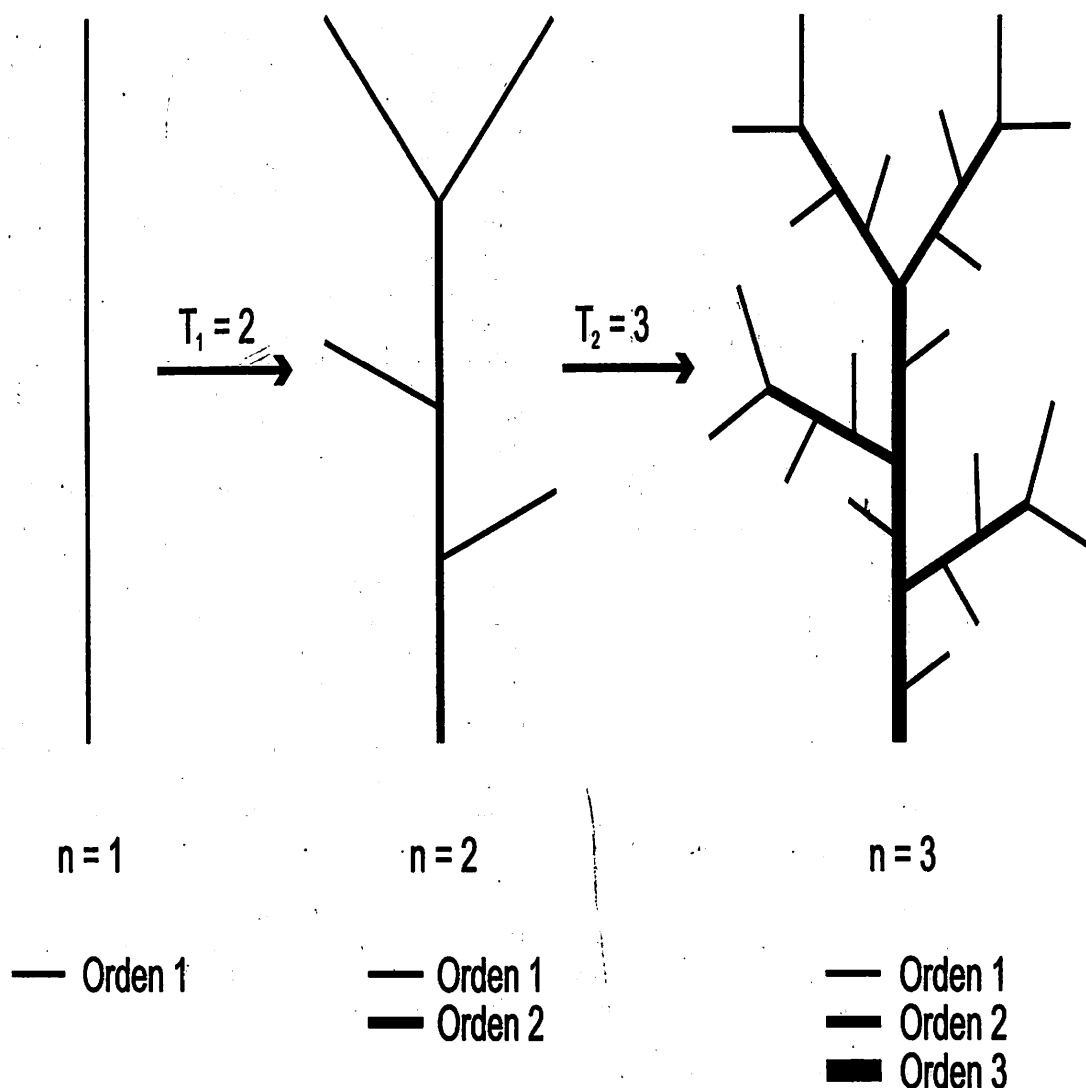


FIGURA 1. Esquema de redes autosemejantes usando generadores

de los detalles del modelo. Algún tipo de universalidad será necesario para poder hacer predicciones en cuencas sin medición, que representen diferentes condiciones ecológicas, geológicas, climáticas e hidrológicas.

##### 5. REFERENCIAS

- Duffy, C. 1996. A two state integral balance model for soil moisture and groundwater dynamics in complex terrain, *Water Resour. Res.*, 32: 2421-34.
- Eagleson, P. 1978. Climate, soil and vegetation. 1. Introduction to water balance dynamics, *Water Resour. Res.* 14: 705-712.
- Foufoula-Georgiou, E. 1998. On stochastic theories of space-time rainfall; recent results and open problems. In: *Advanced Series in Statistical Sciences and Applied Probability*, Vol. 7 : Statistical Methods in Hydrology: Rainfall, Landforms and Floods, ed. O. E. Barndorff-Nielsen, V. K. Gupta, V. Perez-Abreu, and E. C. Waymire. Singapore: World Scientific.
- Gupta, V.K., y E. Waymire. 1998a. Spatial variability and scale invariance in hydrologic regionalization, In: *Scale dependence and scale invariance in hydrology*, Edited by G. Sposito, pp. 88-135, Cambridge. London.
- Gupta, V. K., S. Castro, y T. M. Over. 1996. On scaling exponents of spatial peak flows from rainfall and river network geometry. *J. Hydrol.*, 187: 81-104.
- Gupta, V. K., E. Waymire, y C. T. Wang. 1980. A representation of an instantaneous unit hydrograph from geomorphology. *Water Resour. Res.* 16: 855-62.



- Ibbitt, R. P., A. I. McKerchar, y M. J. Duncan. 1998. Taieri river data to test channel network and river basin heterogeneity concepts, *Water Resour. Res.*, 34(8), 2085-8.
- Jarvis, R. S., y M. J. Woldenberg, (Eds.) 1984: *River Networks, Benchmark Papers in Geology*, V. 80, Hutchinson Ross, Stroudsburg, PA.
- Leopold, L. B., M. G. Wolman, y J. P. Miller. 1964. *Fluvial Processes in Geomorphology*. San Francisco: W. H. Freeman.
- Melton, M. A. 1959. A derivation of Strahler's channel-ordering system, *J. Geol.* 67: 345-46.
- Morrison, P., y P. Morrison, 1994. *Powers of Ten*, Time-Life Pub.
- Over, T., y V. K. Gupta. 1996. A space-time theory of mesoscale rainfall using random cascades. *J. Geophys. Res.*, 101: 26,319-31.
- Peckham, S. 1995a. New results for self-similar trees with applications to river networks, *Water Resour. Res.* 31: 1023-29.
- Peckham, S., 1995b: Self-similarity in the three-dimensional geometry and dynamics of large river basins", Ph.D. Dissertation, Program In Geophysics, University Of Colorado, Boulder, CO., USA.
- Peckham and Gupta, 1999. A reformulation of Horton's laws for large river networks in terms of statistical self-similarity, *Water Resour. Res.*, 35(9), 2763-77.
- Rodriguez-Iturbe, I., y A. Rinaldo. 1997. *Fractal River Basins*, Cambridge, London.
- Rodriguez-Iturbe, I., y J. B. Valdez. 1979. The geomorphologic structure of hydrologic response, *Water Resour. Res.* 15: 1409-20.
- Dodds P. S., y D. Rothman. 1999. A unified view of scaling laws for river networks, *Physical Review E*, 59, 4865-77.
- Shreve, R. L. 1967. Infinite topologically random channel networks, *J. Geol.*, 75: 178-186.
- Strahler, A. N. (1964) Part II, Quantitative geomorphology of drainage basins and channel networks, In: *Handbook of Hydrology*, (Ed. V. T. Chow), pp. 4.39-4.76, McGraw-Hill.
- Tarboton, D. 1996. Fractal river networks, Horton laws and Tokunaga cyclicity, *J. Hydrology*, 187: 105-17.
- Tokunaga, E. 1978. Consideration on the composition of drainage networks and their evolution, *Geogr. Rep.*, Tokyo Metrop. Univ., 13: pp. 27.
- Tokunaga, E., 1994: Self-similar nature of drainage basins, In: *Research in pattern formation*, R. Takaki (Ed), KTK Scientific publishers, Tokyo.
- Troutman, B., and Karlinger, M. 1984. On the expected width function of topologically random channel networks. *J. of Appl. Prob.* 22: 836-49.
- Troutman, B. and Karlinger, M. 1998. Spatial channel network models in hydrology, In: *Advanced Series in Statistical Sciences and Applied Probability*, Vol. 7 : *Statistical Methods in Hydrology: Rainfall, Landforms and Floods*, ed. O. E. Barndorff-Nielsen, V. K. Gupta, V. Perez-Abreu, and E. C. Waymire. Singapore: World Scientific.
- Turcotte, D., 1997: *Fractals and chaos in geology and geophysics*, 2nd Edition, Cambridge.
- Veitzer, S., y V. K. Gupta, 2000. Random self-similar river networks and derivations of generalized Horton laws in terms of statistical simple scaling, *Water Resour. Res.* (En imprenta).
- Zavoianu, I., 1985. *Morphometry of drainage networks*, Elsevier.