

# ESTABILIDAD CLÁSICA DE VIGAS-COLUMNAS CON CONEXIONES SEMI-RÍGIDAS SOBRE FUNDACIÓN ELÁSTICA

J. Darío Aristizábal Ochoa

Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia



**RESUMEN.** La estabilidad de una viga-columna sometida a cargas compresivas en los extremos con deriva lateral entre los extremos no inhibida, parcialmente inhibida, y totalmente inhibida, incluyendo los efectos de las conexiones semi-rígidas y soportada sobre una fundación clásica de Timoshenko. Se propone una nueva clasificación de vigas-columnas prismáticas sobre fundación elástica y las correspondientes ecuaciones de estabilidad las cuales son generales y fáciles de utilizar, dando resultados exactos cuando se comparan con otros métodos analíticos. El análisis de estabilidad consiste en la solución de un problema de autovalores ("eigenvalues") de una matriz de  $4 \times 4$  para el caso de una viga-columna con pandeo lateral y con ambos extremos no inhibidos o parcialmente inhibidos, y de una matriz de  $3 \times 3$  para columnas con pandeo lateral y con un solo extremo totalmente inhibido. Se presentan y se analizan los efectos del arriostramiento lateral, en uno o ambos extremos de la viga-columna sobre la carga crítica de pandeo. Los efectos de las conexiones semi-rígidas en la carga crítica de pandeo de cinco casos clásicos de viga-columnas son discutidos y estudiados en detalle y los resultados son comparados con los obtenidos por otros métodos analíticos.

**PALABRAS CLAVES.** análisis estructural; análisis por computadora; cargas; conexiones semi-rígidas; Estabilidad; pórticos; fundaciones; pandeo; tipos de construcción; viga-columnas.

**ABSTRACT.** The elastic stability behavior of beam-columns under compressive end loads with end sidesways uninhibited, partially inhibited, and totally inhibited including the effects of semi-rigid connections and a uniformly distributed lateral elastic foundation (Winkler's type) along its entire span is presented in a classical manner. The proposed classification of prismatic beam-columns on elastic foundation and the corresponding stability equations are general and relatively simple to apply yielding exact results when compared to other analytical methods. The stability analysis consists of an eigen value solution to a  $4 \times 4$  matrix for a column with end sidesway uninhibited or partially inhibited at both ends, and to a  $3 \times 3$  matrix for column with end sidesway inhibited at one or both ends, respectively. The effects of end lateral bracing at one or both ends of the beam-column on its buckling load are presented and analyzed. The effects of semi-rigid connections on the buckling load of five classical beam-column cases are fully discussed and the results compared to those from other analytical methods.

**KEY WORDS.** Buckling; Building Codes; Construction Type; Beam-Columns; Computer Applications; Design; Elastic Foundation; Frames; Loads; Stability.

## 1. INTRODUCCIÓN

La estabilidad de viga-columnas apoyadas lateralmente sobre fundaciones elásticas bajo diferentes condiciones de arriostramiento es de importancia en la ingeniería estructural. Tal como lo resalta Hetenyi (1967), existen muchas aplicaciones de este problema, como son los de la construcción de fundaciones en pilas, rieles ferroviarios, puentes, conchas delgadas de revolución (domos y conchas cilíndricas de gran luz), tanques, calderas y recipientes a presión. Por ejemplo, un elemento longitudinal de un tubo cilíndrico, cargado simétricamente con respecto a su eje, puede ser considerado como una viga sobre una fundación elástica. De aquí que el algoritmo presentado en esta publicación pueda utilizarse para estudiar un rango

muy amplio de problemas relacionados con la estabilidad elástica de vigas-columnas.

Hetenyi (1967) presenta el procedimiento clásico de estabilidad elástica de viga-columnas articuladas y empotradas sobre fundación elástica, desarrollando las soluciones exactas de casos particulares tales como la de viga-columnas con condiciones en los extremos libre-libre, articulada-articulada, y empotrada-empotrada.

Previamente Timoshenko y Gere (1961) habían resuelto otros casos de interés, tales como la viga-columna bajo una carga axial distribuida uniformemente sobre una fundación elástica utilizando un análisis similar. West y Mafi (1984) determinaron los autovalores de una viga-columna sobre soportes elásticos usando un método numérico de valor inicial. Cheng y Pantelides (1988) obtuvieron las ecuaciones diferenciales, coeficientes de

rigidez, y fuerzas de empotramiento o de fijeza de una viga-columna sobre una fundación elástica, incluyendo las deformaciones a flexión y a cortante. Ang y Wang (1991), como también Wang *et al.* (1991) estudiaron el pandeo de viga-columnas sobre fundaciones elásticas, utilizando el método de elementos finitos. Recientemente, los efectos de las conexiones semirígidas en la estabilidad de las viga-columnas y estructuras aporticadas han sido presentados por el autor (1997a-c). Sin embargo, el análisis de estabilidad clásica de las vigas-columnas con conexiones semirígidas y apoyadas lateralmente sobre una fundación elástica continua, bajo condiciones de arriostramiento en los extremos, no se encuentra en la literatura técnica.

El objetivo principal de este trabajo es presentar dicho análisis, incluyendo la clasificación completa y las correspondientes ecuaciones de estabilidad para vigas-columnas prismáticas sujetas a cargas axiales en los extremos. Los efectos de las conexiones, arriostramientos en los extremos y un soporte elástico distribuido uniformemente (tipo Winkler) son incluidos.

El análisis de estabilidad consiste en determinar la solución de autovalores de una matriz de  $3 \times 3$  para una viga-columna con pandeo lateral inhibido en uno o en ambos extremos, y de una matriz de  $4 \times 4$  para una viga-columna con pandeo lateral no inhibido o parcialmente inhibido en ambos extremos. También se presentan los efectos de los arriostramientos mínimos en los extremos. Se incluyen varios ejemplos y sus resultados son comparados con los obtenidos por otros métodos para demostrar la utilización y la simplicidad de las ecuaciones de estabilidad propuestas.

## 2. MODELO ESTRUCTURAL

### 2.1 SUPOSICIONES.

Consideremos un elemento prismático que conecta los puntos A y B (fig. 1). El elemento AB consiste de la misma viga-columna A'B' y de los conectores semirígidos AA' y BB' en los extremos de arriba y de abajo, respectivamente. Se supone que: 1) el miembro A'B' es de un material elástico lineal homogéneo con un módulo de elasticidad  $E$ , soportado continuamente a lo largo de su eje centroidal por un suelo elástico uniforme con un módulo de balasto de magnitud  $k$ ; 2) el eje centroidal de la viga-columna es una línea recta, en la cual coincide con el centro de cortante de la sección transversal; 3) la viga-columna está sujeta a las

cargas axiales compresivas  $P$ , aplicadas a lo largo de su eje centroidal; 4) las derivas laterales en los extremos están parcialmente inhibidas por los resortes  $S_a$  y  $S_b$  localizados en A y B, respectivamente; 5) las rotaciones en los extremos están parcialmente inhibidas por las conexiones a flexión  $\kappa_a$  y  $\kappa_b$  localizados en A y B, respectivamente; y 6) todas las deformaciones son pequeñas, así que se puede aplicar el principio de superposición.

Las conexiones a flexión AA' y BB' tienen una rigidez  $\kappa_a$  y  $\kappa_b$  (con unidades en fuerza-distancia/ radian), respectivamente. Las relaciones  $R_a = \kappa_a/(EI/L)$  y  $R_b = \kappa_b/(EI/L)$  se denominan como los índices de rigidez de las conexiones, donde:  $I$  es el momento de inercia de la viga-columna alrededor del eje principal en cuestión; y  $L$  es la luz de la viga-columna. Los índices varían desde cero ( $R_a = R_b = 0$ ) para conexiones articuladas, hasta infinito ( $R_a = R_b = \infty$ ) para conexiones rígidas. Es importante anotar que el algoritmo propuesto se puede utilizar en el análisis de estabilidad inelástica de columnas en las cuales el comportamiento no lineal se concentra en las conexiones.

Este análisis de estabilidad inelástica puede llevarse a cabo renovando la rigidez a flexión de las conexiones AA' y BB' para cada incremento de carga de una manera lineal. Gerslie (1988) ha indicado los límites más bajos y los más altos para  $\kappa_a$  y  $\kappa_b$  en estructuras aporticadas de acero. Más recientemente, Xu y Grierson (1993) utilizaron estos límites en el diseño de estructuras de acero con conexiones semirígidas.

La principal diferencia entre la solución clásica presentada en esta publicación y la disponible en la literatura técnica (Hetenyi 1967, Timoshenko y Gere 1961, West y Mafi 1984, y otros) consiste en que la solución para el modelo de la figura 1 incluye los efectos de las conexiones semirígidas y los arriostramientos en los extremos.

Para mayor conveniencia se presentan los siguientes dos parámetros:

$$\rho_a = 1 (1+3/R_a) \quad (1a)$$

$$\rho_b = 1 (1+3/R_b) \quad (1b)$$

donde  $\rho_a$  y  $\rho_b$  son los denominados factores de fijeza. Para conexiones articuladas, tanto el factor de fijeza  $\rho$  como el índice de rigidez  $R$  son cero; pero para las conexiones rígidas o empotradas, el factor de fijeza es 1 y el índice de rigidez es infinito. Ya que el factor de fijeza solo puede variar entre -1 y +1 (mientras que el índice de rigidez  $R$  puede variar entre  $-\infty$  y  $+\infty$ ), es

más conveniente usar el factor de fijeza rígidas en el análisis de estructuras con conexiones semi-rígidas (Cunningham 1990).

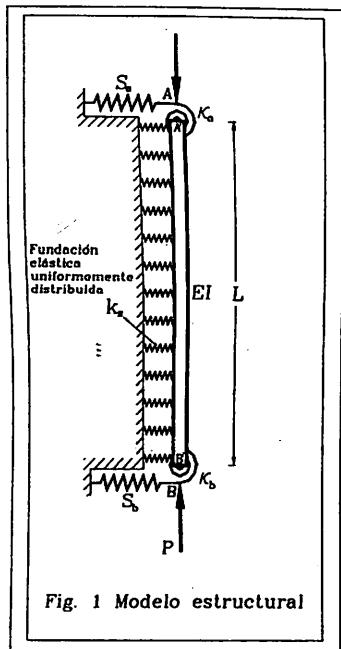


Fig. 1 Modelo de una viga-columna sobre una fundación elástica  $k_s$  con desplazamientos laterales parcialmente inhibidos por los arriostramientos en los extremos  $S_a$  y  $S_b$  y restringida rotacionalmente por los resortes a flexión  $K_a$  y  $K_b$ .

Las relaciones entre los factores de fijeza  $\rho_a$  y  $\rho_b$  y los valores de la carta de alineación  $G_a$  y  $G_b$  [i.e.,  $G = \sum (EI/h)_c = \sum (EI/L)_s$ , en los extremos A y B, respectivamente] de una viga-columna en un pórtico rígido simétrico con deriva lateral no inhibida o parcialmente inhibida son:  $\rho_a = 2/(2+G_a)$  y  $\rho_b = 2/(2+G_b)$  (Aristizábal Ochoa, 1997a). En los pórticos rígidos simétricos con deriva lateral totalmente inhibida, las relaciones son:  $\rho_a = 2/(2+3G_a)$  y  $\rho_b = 2/(2+3G_b)$ . En pórticos con conexiones semi-rígidas, se pueden determinar los factores de fijeza utilizando principios estructurales presentados por el autor (1997a-c).

## 2.2 ECUACIONES DE ESTABILIDAD

De acuerdo con el tipo de deriva lateral permitido, se pueden distinguir tres formas de pandoe importantes en una viga-columna con conexiones semi-rígidas sobre una fundación elástica continua de Winkler.

Estas son vigas-columnas con deriva lateral: a) no inhibidas o parcialmente inhibidas en ambos extremos (fig. 2a); b) totalmente inhibida en un extremo y parcialmente inhibida en el otro extremo (fig. 2b); y c) totalmente inhibidas en ambos extremos (fig. 2c). Las ecuaciones de estabilidad correspondientes son explicadas a continuación y en el Apéndice I se dan más detalles y sus desarrollos.

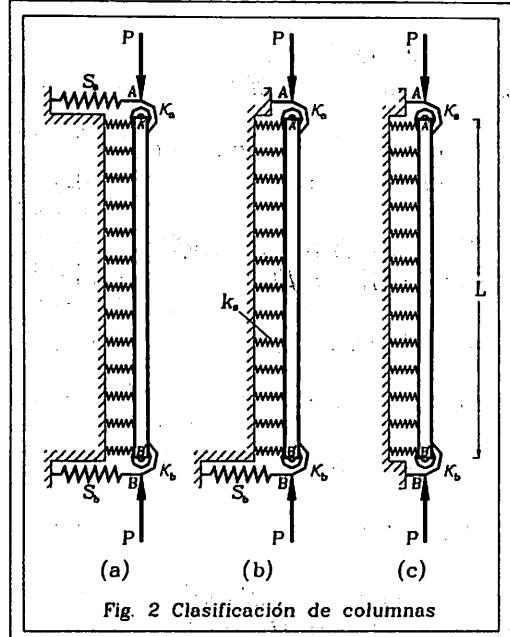


Fig. 2 Clasificación de viga-columnas de acuerdo a la derivas laterales permitidas en sus extremos. a) Con deriva lateral no inhibida, o parcialmente inhibida en ambos extremos; b) Con deriva lateral inhibida en un extremo y parcialmente inhibida en el otro extremo; c) Con deriva lateral inhibida en ambos extremos.

a) Vigas-Columnas con derivas no inhibidas o parcialmente inhibidas en ambos extremos. Para vigas-columnas en las que la deriva lateral en ambos extremos A y B están parcialmente inhibidas por resortes  $S_a$  y  $S_b$  (fig. 2a), respectivamente, la ecuación de estabilidad consiste en la solución del valor propio del determinante  $4 \times 4$  dado por

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Los coeficientes  $A_{ij}$  en ecuación (2) dependen de la magnitud de la carga compresiva  $P$  cuando es comparada con  $4k_s EI$  = carga crítica de pandoe

elástica de una viga-columna de luz L infinita (Hetenyi 1967, pág. 136)]. Los valores  $A_{ij}$  se obtienen de acuerdo con rangos I y II definidos abajo:

I) Para  $0 \leq P < \sqrt{4k_s EI}$

$$A_{11} = e^{2\alpha L} \{ -[3\rho_b + 2\alpha L(1-\rho_b)]\beta \operatorname{sen} \beta L + [3\alpha \rho_b + L(1-\rho_b)(\alpha^2 - \beta^2)] \operatorname{cos} \beta L \} \quad (3a)$$

$$A_{12} = -\{ [3\rho_b - 2\alpha L(1-\rho_b)]\beta \operatorname{sen} \beta L + [3\alpha \rho_b - L(1-\rho_b)(\alpha^2 - \beta^2)] \operatorname{cos} \beta L \} \quad (3b)$$

$$A_{13} = e^{2\alpha L} \{ [3\alpha \rho_b + L(1-\rho_b)(\alpha^2 - \beta^2)] \operatorname{sen} \beta L + \beta [3\rho_b + 2\alpha L(1-\rho_b)] \operatorname{cos} \beta L \} \quad (3c)$$

$$A_{14} = -\{ [3\alpha \rho_b - L(1-\rho_b)(\alpha^2 - \beta^2)] \operatorname{sen} \beta L - [3\rho_b - 2\alpha L(1-\rho_b)] \beta \operatorname{cos} \beta L \} \quad (3d)$$

$$A_{21} = 3\alpha \rho_a - L(1-\rho_a)(\alpha^2 - \beta^2) \quad (3e)$$

$$A_{22} = -3\alpha \rho_a - L(1-\rho_a)(\alpha^2 - \beta^2) \quad (3f)$$

$$A_{23} = \beta [3\rho_a - 2\alpha L(1-\rho_a)] \quad (3g)$$

$$A_{24} = \beta [3\rho_a + 2\alpha L(1-\rho_a)] \quad (3h)$$

$$A_{31} = e^{2\alpha L} \{ -[P/EI - (\beta^2 - 3\alpha^2)]\beta \operatorname{sen} \beta L + [(S_b - \alpha P)/EI - \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)] \operatorname{cos} \beta L \} \quad (3i)$$

$$A_{32} = [P/EI - (\beta^2 - 3\alpha^2)]\beta \operatorname{sen} \beta L + [(S_b + \alpha P)/EI + \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)] \operatorname{cos} \beta L \quad (3j)$$

$$A_{33} = e^{2\alpha L} \{ [(S_b - \alpha P)/EI + \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)] \operatorname{sen} \beta L - [P/EI - \alpha(\beta^2 - 3\alpha^2)] \beta \operatorname{cos} \beta L \} \quad (3k)$$

$$A_{34} = [(S_b + \alpha P)/EI + \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)] \operatorname{sen} \beta L - [P/EI - \alpha(\beta^2 - 3\alpha^2)] \beta \operatorname{cos} \beta L \quad (3l)$$

$$A_{41} = (S_a + \alpha P)/EI + \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) \quad (3m)$$

$$A_{42} = (S_a + \alpha P)/EI - \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) \quad (3n)$$

$$A_{43} = A_{44} = [P/EI - (\beta^2 - 3\alpha^2)]\beta \quad (3o)$$

$$\text{donde: } \alpha = \sqrt{\frac{k_s}{4EI}} \quad \frac{P}{4EI}; \quad \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{k_s}{4EI}} + \frac{P}{4EI}}$$

II) Para  $P > \sqrt{4k_s EI}$

$$A_{11} = [3\rho_b \gamma \operatorname{sen} \gamma L + L(1-\rho_b) \gamma^2 \operatorname{cos} \gamma L] \quad (4a)$$

$$A_{12} = [3\rho_b \varphi \operatorname{sen} \varphi L + L(1-\rho_b) \varphi^2 \operatorname{cos} \varphi L] \quad (4b)$$

$$A_{13} = 3\rho_b \gamma \operatorname{cos} \gamma L \quad L(1-\rho_b) \gamma^2 \operatorname{sen} \gamma L \quad (4c)$$

$$A_{14} = 3\rho_b \gamma \operatorname{cos} \varphi L - L(1-\rho_b) \varphi^2 \operatorname{sen} \varphi L \quad (4d)$$

$$A_{21} = L(1-\rho_a) \gamma^2 \quad (4e)$$

$$A_{22} = L(1-\rho_a) \varphi^2 \quad (4f)$$

$$A_{23} = 3\rho_a \gamma \quad (4g)$$

$$A_{24} = 3\rho_a \varphi \quad (4h)$$

$$A_{31} = (S_b/EI) \operatorname{cos} \gamma L - (\gamma^2 - P/EI) \gamma \operatorname{sen} \gamma L \quad (4i)$$

$$A_{32} = (S_b/EI) \operatorname{cos} \varphi L - (\varphi^2 - P/EI) \varphi \operatorname{sen} \varphi L \quad (4j)$$

$$A_{33} = (S_b/EI) \operatorname{sen} \gamma L + (\gamma^2 - P/EI) \gamma \operatorname{cos} \gamma L \quad (4k)$$

$$A_{34} = (S_b/EI) \operatorname{sen} \varphi L + (\varphi^2 - P/EI) \varphi \operatorname{cos} \varphi L \quad (4l)$$

$$A_{41} = A_{42} = S_a/EI \quad (4m)$$

$$A_{43} = (\gamma^2 - P/EI) \gamma \quad (4n)$$

$$A_{44} = (\varphi^2 - P/EI) \varphi \quad (4o)$$

$$\text{donde: } \gamma = \sqrt{\frac{P}{2EI} - \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{k_s}{EI}}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{P}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{k_s}{EI}}}$$

b) Vigas-columnas con pandeo lateral inhibido en un extremo y parcialmente inhibido en el otro extremo. Para una viga-columna en la cual las derivas laterales son totalmente inhibidas en el extremo A y parcialmente inhibidas en B por el resorte  $S_b$  (fig. 2b), la ecuación de estabilidad consiste en la solución del valor propio fundamental del determinante  $3 \times 3$  dado por

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} =$$

$$B_{11}(B_{22}B_{33} - B_{32}B_{23}) - B_{12}(B_{21}B_{33} - B_{31}B_{23}) + B_{13}(B_{21}B_{32} - B_{31}B_{22}) \quad (5)$$

Donde los coeficientes  $B_{ij}$  se relacionan con  $A_{ij}$  dados por las expresiones (3a)-(3o) para  $0 \leq P < \sqrt{4k_s EI}$  o

por las expresiones (4a)-(4o) para  $P > \sqrt{4k_s EI}$  de la siguiente manera:

$$B_{11} = A_{11} - A_{12} \quad (6a)$$

$$B_{12} = A_{13} \quad (6b)$$

$$B_{13} = A_{14} \quad (6c)$$

$$B_{21} = A_{21} - A_{22} \quad (6d)$$

$$B_{22} = A_{23} \quad (6e)$$

$$B_{23} = A_{24} \quad (6f)$$

$$B_{31} = A_{31} - A_{32} \quad (6g)$$

$$B_{32} = A_{33} \quad (6h)$$

$$B_{33} = A_{34} \quad (6i)$$

c) Viga-columnas con pandeo lateral inhibida en ambos extremos. Para una viga-columna con pandeo lateral totalmente inhibido en ambos extremos (fig. 2c), la ecuación de estabilidad consiste en la solución del valor propio del determinante  $3 \times 3$  dado por la ecuación (5). Los coeficientes  $B_{ij}$  correspondientes a las primeras dos filas son idénticos al de las ecuaciones (6a)-(6f) pero los de la tercera fila deben ser modificados de la siguiente forma:

I) Para  $0 \leq P < \sqrt{4k_s EI}$

$$B_{31} = (e^{2\alpha L} - 1) \cos \beta L \quad (7a)$$

$$B_{32} = e^{2\alpha L} \sin \beta L \quad (7b)$$

$$B_{33} = \sin \beta L \quad (7c)$$

II) Para  $P > \sqrt{4k_s EI}$

$$B_{31} = \cos \gamma L - \cos \phi L \quad (7d)$$

$$B_{32} = \sin \gamma L \quad (7e)$$

$$B_{33} = \sin \phi L \quad (7f)$$

### 3. VERIFICACIÓN Y EJEMPLOS

#### 3.1 CASOS CLÁSICOS DE VIGA-COLUMNAS

La variación de la carga crítica de pandeo elástico de una viga-columna apoyada por una fundación elástica uniformemente distribuida de magnitud  $k_s$ , bajo condiciones de borde diferentes (cinco casos son mostrados en las figs. 3a-e) incluyendo los efectos de conexiones semirrígidas fueron estudiadas. Las cargas de pandeo para diferentes valores de  $\sqrt{k_s L^4 / (EI)}$  como lo sugirió Hetenyi (1967) para cinco factores diferentes de fijeza  $\rho$  que varían desde condiciones articuladas hasta condiciones empotradas se alistan en las Tablas 1-5 para cada uno de los casos que se muestran en las figuras 3a-e, respectivamente.

Los valores en estas tablas fueron calculados con cinco figuras significativas (con el propósito primordial de compararlos con aquellos obtenidos de las fórmulas exactas de Hetenyi) usando el modelo propuesto y las ecuaciones 1 - 7.

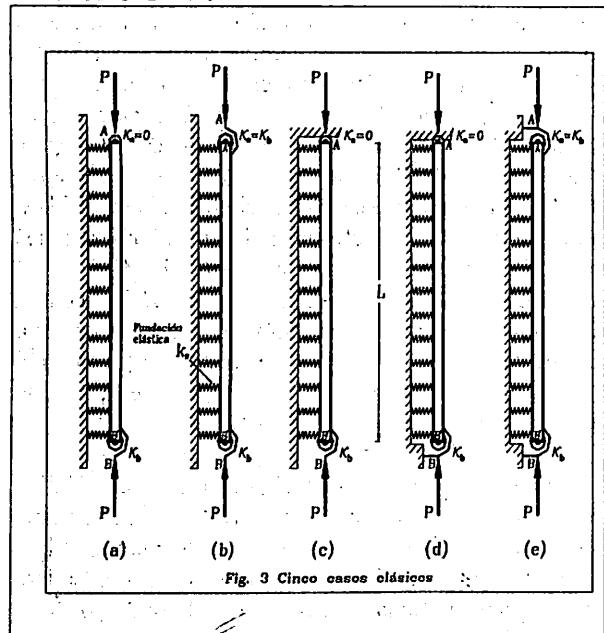


Fig. 3 Cinco casos clásicos de viga-columnas: a) Con deriva lateral no inhibida en ambos extremos, articulada en un extremo y con rotación restringida otro extremo; b) Con deriva lateral no inhibida y con rotación igualmente restringida en ambos extremos; c) Con deriva lateral inhibida y articulada en A, y con rotación restringida y deriva lateral en B; d) Con deriva lateral inhibida y articulada en A, y con rotación restringida en B; e) Con deriva lateral inhibida y

con rotación igualmente restringida en ambos extremos.

Los valores listados en las Tablas 1 y 2 para  $\rho=0$  (articulado) fueron verificados con aquellos de *Hetenyi* (1967, ecuación 125 y la fig. 117, pág. 143) con resultados idénticos. Siendo así que aquellos en la Tabla 3 se comparan muy bien con los obtenidos con la fórmula simplificada  $P_{cr} = k_s EI$  para columnas infinitamente largas y con cualquier valor de restricción rotacional en B (*Hetenyi*, 1967). De igual manera, los valores listados en las Tablas 4 y 5 para  $\rho=0$  (articulado) y  $\rho=1$  (empotrado) fueron verificados con aquellos de *Hetenyi* (1967, ecuaciones 127 y 128, y figs. 118 y 119, respectivamente, págs. 145-147) obteniendo de nuevo resultados idénticos. Los valores en la Tabla 4 también son muy comparables a los obtenidos con la fórmula simplificada  $P_{cr}=2 k_s EI$  para columnas de luz infinita y cualquier valor de restricción rotacional en los extremos (*Hetenyi*, 1967).

La Tabla 1 indica que para viga-columnas con deriva lateral no inhibida en ambos extremos, la restricción rotacional en un extremo es efectiva solamente en viga-columnas sobre fundaciones elásticas blandas (para  $k_s < 25EI/L^4$ ). Para valores mayores de  $k_s$ , el aumento en la carga de pandeo es pequeño (menos del 20% para valores de  $k_s < 900EI/L^4$  alcanzando aumentos menores del 3% para  $k_s < 2500EI/L^4$ ). Por el otro lado, la Tabla 2 indica que es más efectivo restringir ambos extremos contra la rotación simultáneamente que si se hace en un extremo solamente. De hecho, para  $k_s < 25EI/L^4$  la carga de pandeo aumenta más del 500% cuando se empotran ambos extremos en lugar de tener una conexión articulada entre ellos. Para valores mayores de  $k_s$ , la carga de pandeo aumenta sólo el 100%.

La Tabla 3 indica que para viga-columnas con deriva lateral inhibida en un extremo, la restricción rotacional en el mismo extremo es efectiva solamente en viga-columnas que están sobre fundaciones elásticas extremadamente blandas (para  $k_s=0$ ). Para  $25EI/L^4 < k_s < 400EI/L^4$  el aumento en la carga de pandeo es menor del 12% y para valores de  $k_s=900EI/L^4$  el aumento en la carga de pandeo es menos del 1%.

Tendencias similares a las observadas en las tablas 1 y 2 se pueden observar en las tablas 4 y 5 para viga-columnas con deriva lateral inhibida en ambos extremos. Restricciones rotacionales en uno o en ambos extremos son efectivas únicamente en viga-columnas sobre fundaciones elásticas blandas (para  $k_s < 25EI/L^4$ ). Para valores mayores de  $k_s$ , el aumento en

la carga de pandeo no es significativo. También es más efectivo restringir ambos extremos simultáneamente contra la rotación que hacerlo sólo en un extremo. Este comportamiento es de alguna importancia en pilas embebidas en suelos blandos. Los valores listados en las Tablas 1, 3 y 4 varían linealmente con

$k_s L^4 / (EI)$ , para incrementos muy pequeños en  $P_{cr}$  con aumentos en el grado de restricción a flexión. Este comportamiento hace que las restricciones rotacionales en los extremos sean de menor importancia en columnas largas.

### 3.2 EJEMPLO 1: CARGA CRÍTICA DE UNA COLUMNA APOYADA LATERALMENTE SOBRE UN SUELO BLANDO

Determine la carga crítica de pandeo de una viga-columna soportada por un suelo con  $k_s=50EI/L^4$ . Estudie los efectos de las restricciones de las conexiones a flexión y del arrastre en los extremos con la carga crítica mínima de pandeo.

**Solución:** los efectos de los extremos con deriva lateral arrastrada son examinados en los siguientes tres primeros casos:

**Caso 1:** columna articulada-articulada con deriva lateral no inhibida en ambos extremos ( $\rho_a=\rho_b=S_a=S_b=0$ ). De la ecuación (2) y el tipo de estabilidad a) antes presentada:  $P_{cr}=0,41316\pi^2EI/L^2$ .

**Caso 2:** columna articulada-articulada con deriva lateral no inhibida en A y totalmente inhibida en B ( $\rho_a=\rho_b=S_a=0$ ). De la ecuación (5) y tipo de estabilidad b) ya presentada:  $P_{cr}=0,86491\pi^2EI/L^2$ .

**Caso 3:** columna articulada-articulada con deriva lateral totalmente inhibida en ambos extremos ( $\rho_a=\rho_b=0$ ). De la ecuación (5) y tipo de estabilidad c) antes discutida:  $P_{cr}=1,5133\pi^2EI/L^2$ .

Los efectos de las restricciones a flexión en los extremos son considerados en los casos del 4 al 9 como siguen:

**Caso 4:** columna articulada-empotrada con deriva lateral no inhibida en ambos extremos ( $\rho_a=1$  y  $\rho_b=S_a=S_b=0$ ). De la ecuación (2) y tipo de estabilidad a):  $P_{cr}=0,61941\pi^2EI/L^2$ .

**Caso 5:** columna empotrada-empotrada con deriva lateral no inhibida en ambos extremos ( $\rho_a=\rho_b=1$  y  $S_a=S_b=0$ ). De la ecuación (2) y tipo de estabilidad a):  $P_{cr}=1,51330\pi^2EI/L^2$ .

Caso 6: columna articulada-empotrada con deriva lateral no inhibida en A y totalmente inhibida en B ( $\rho_a=1$  y  $\rho_b=S_a=0$ ). De la ecuación (5) y tipo de estabilidad b):  $P_{cr}=0,89785\pi^2EI/L^2$ .

Caso 7: columna empotrada-empotrada con deriva lateral no inhibida en A y totalmente inhibida en B ( $\rho_a=\rho_b=1$  y  $S_a=0$ ). De la ecuación (5) y tipo de estabilidad b):  $P_{cr}=2,38831\pi^2EI/L^2$ .

Caso 8: columna articulada-empotrada con deriva lateral totalmente inhibida en ambos extremos ( $\rho_a=0$ ,  $\rho_b=1$ ). De la ecuación (5) y tipo de estabilidad c):  $P_{cr}=2,46061\pi^2EI/L^2$ .

Caso 9: columna empotrada-empotrada con deriva lateral totalmente inhibida en ambos extremos ( $\rho_a=\rho_b=1$ ). De la ecuación (5) y tipo de estabilidad c):  $P_{cr}=4,38321\pi^2EI/L^2$ .

**Conclusiones.** Los nueve casos estudiados indican que la carga crítica de pandeo una viga-columna aumenta sustancialmente con los arriostramientos y por restricciones a las rotaciones de sus extremos. Por ejemplo, solo por inhibir la deriva lateral en solo uno de sus extremos, la carga crítica es aumentada por un factor de 2,09 (Caso 2/Caso 1=0,86491/0,41316), mientras que inhibiendo la deriva lateral en ambos extremos en forma simultánea, el factor aumentaría a 3,66 (Caso 3/Caso 1 = 1,5133/0,41316). Nótese que el efecto neto de empotrar ambos extremos simultáneamente en la carga crítica de pandeo es idéntico al de inhibir ambos extremos contra la deriva lateral (Caso 5/Caso 3=1,00). Al empotrar solo un extremo la carga de pandeo es aumentada por un factor de 1,50 (Caso 4/Caso 1=0,61941/0,4132). Al empotrar ambos extremos la carga crítica es aumentada por un factor de 10,61 (Caso 9/Caso 1=4,38321/0,41316). Al igual que el comportamiento de las columnas sin soporte elástico continuo ( $k_s=0$ ), el efecto de arrostrar contra deriva en los extremos es más efectivo que el del empotrarlos. El factor de empotramiento de ambos extremos después de arrostrarlos contra deriva lateral es de 2,90 (Caso 9/Caso 3= 4,38321/1,5133).

### 3.3 EJEMPLO 2: PANDEO CLÁSICO DE UN TUBO CILÍNDRICO CARGADO AXIALMENTE.

Determinar la carga de pandeo de un tubo cilíndrico de acero de radio  $r=6$  pulg. (152.4 mm), longitud  $L=8$  pies (2438.4 mm), y grosor  $t=1/8$  pulg. (3.2 mm);  $E=29000$  lb/pulg<sup>2</sup> (199,95 GPa), relación de Poisson  $\nu=0.3$ . Suponga que ambos extremos están restringidos contra deriva lateral y simplemente apoyados. Estudie los efectos en la carga axial de pandeo si dos tapas (placas

circulares de cubierta) de igual grosor son soldadas alrededor de los bordes del cilindro en ambos extremos.

**Solución:** De acuerdo con Hetenyi (1967, pág. 31) “un elemento longitudinal de un tubo cilíndrico cargado simétricamente con respecto a su eje se puede tratar como una viga sobre fundación elástica, con un módulo  $k_s=Et/r^2$ ”. Se toma ancho unitario del elemento longitudinal con un momento de inercia  $I=t^3/[12(1-\nu^2)]$ . Basado en estas suposiciones, la fórmula simplificada  $P_{cr}=2 k_s EI$  para un tubo de longitud infinita se convierte en  $\sigma_{cr}=P_{cr}/t=Et/[r^3(1-\nu^2)]$  expresiones clásicas de la carga y de tensión de pandeo que se encuentran en la literatura técnica (Roark 1954, Libove 1962, y Chajes 1973).

Para el caso particular:  $r=152.4$  mm,  $L=2438.4$  mm,  $t=3.2$  mm,  $E=199,95$  GPa,  $\nu=0.3$ , y  $\rho_a=\rho_b=0$  utilizando la ecuación (5) con deriva lateral inhibida en ambos extremos:  $\sigma_{cr}=2521,1$  MPa (365.660 lb/pulg<sup>2</sup>). Resultados idénticos pueden obtenerse utilizando la fórmula clásica de pandeo acabada de deducir en el párrafo anterior.

Los efectos de las placas circulares soldadas alrededor de los bordes del tubo pueden encontrarse determinando las restricciones a flexión dadas por estas placas por ancho unitario alrededor de la circunferencia. Roark (1954, pág. 197) indica que  $\kappa_a=\kappa_b=E_o t_o^3/[12r_o(1-\nu_o)]$ , donde  $r_o$ : radio y  $t_o$ : grosor de las placas o tapas en los extremos con módulo elástico  $E_o$  y la relación de Poisson  $\nu_o$ . Por lo tanto, los índices de rigidez de las conexiones a flexión por ancho unitario se convierten en  $R_a=R_b=(E_o/E)(t_o/t)^3(L/r_o)(1-\nu^2)/(1-\nu_o)$ . Para el caso particular:  $r_o=r=152.4$  mm,  $L=2438.4$  mm,  $t_o=t=3.2$  mm,  $E_o=E=199,95$  GPa, y  $\nu_o=\nu=0.3$ , luego  $R_a=R_b=20,8$  y de la ecuación (1)  $\rho_a=\rho_b=0,874$  y utilizando la ecuación (5) con deriva lateral inhibida en ambos extremos:  $\sigma_{cr}=3,084.3$  MPa (447350 lb/pulg<sup>2</sup>). Este resultado indica un pequeño aumento en el esfuerzo de pandeo axial clásico debido a la presencia de tapas circulares soldadas a los extremos del tubo. En este análisis de estabilidad se supuso que el tubo era “ideal” sin imperfección alguna con inestabilidad del miembro ocurriendo como resultado de un pandeo superficial o local del tipo clásico. Libove (1962), sin embargo, indica que el pandeo de tubos cilíndricos reales con pequeñas imperfecciones es del tipo alteración (“disturbance”) finita y que bajo cargas

muertas ocurre a niveles de esfuerzo menores que  $\sigma_c=0,182 EI/r$  para  $\nu=0,30$ .

#### 4. EFECTOS DEL ARRIOSTRAMIENTO LATERAL

##### 4.1 CRITERIO DE MÍNIMO ARRIOSTRAMIENTO.

Una viga-columna con deriva lateral parcialmente inhibida en sus extremos es aquella cuya carga crítica  $P$  está situada entre la que tiene los extremos con deriva lateral no inhibida ( $S_a=S_b=0$ ) y la que tiene los extremos con deriva lateral totalmente inhibida ( $\Delta_a=\Delta_b=0$ ), o simplemente:

$$\begin{aligned} P_{\text{deriva no inhibida}} &\leq P_{\text{deriva parcialmente inhibida}} \leq P_{\text{totalmente inhibida}} \\ [\text{de ec. (2)}] \quad [\text{de ecs. (2) o (5)}] \quad [\text{de ec. (5)}] \\ [S_a=S_b=0] \quad [\Delta_a \neq 0 \text{ y/o } \Delta_b \neq 0] \quad [\Delta_a=\Delta_b=0] \end{aligned} \quad (8)$$

Este criterio es integro y sirve como fundamento conjuntamente con las ecuaciones (2) y (5) para determinar los arriostramientos laterales ( $S_a$ )<sub>mín.</sub> y/o ( $S_b$ )<sub>mín.</sub> requeridos en uno o en ambos extremos de una viga-columna con conexiones semi-rígidas y apoyada continuamente sobre fundación elástica tipo Winkler para lograr una predeterminada carga de pandeo mínima. Combinando las ecuaciones (2) y (5) se puede determinar directamente los valores requeridos ( $S_a$ )<sub>mín.</sub> y/o ( $S_b$ )<sub>mín.</sub>. Un ejemplo describiendo los pasos para el cálculo de ( $S_a$ )<sub>mín.</sub> y ( $S_b$ )<sub>mín.</sub> requerido por la columna del ejemplo 1 para lograr una carga de pandeo predeterminada es presentada en la próxima sección.

##### 4.2 EJEMPLO 3: ARRIOSTRAMIENTOS LATERALES MÍNIMOS EN LOS EXTREMOS.

Utilizando las ecuaciones (2) y (5), determinar el arriostramiento lateral mínimo requerido por la viga-columna del ejemplo 1 para obtener pandeo con: 1) deriva lateral cero en B solamente (esto es, arriostrada sin deriva lateral en B); y 2) deriva lateral cero en ambos extremos (condiciones de arriostramiento simultáneas sin deriva en ambos extremos). Estudiar la variación en ( $S_b$ )<sub>mín.</sub> para obtener un pandeo sin deriva lateral en B solamente cuando la magnitud de  $k_s$  es  $150EI/L^4$ . Suponga que ambos extremos de la viga-columna son articulados ( $\rho_a=\rho_b=0$ ).

**Solución:**

**Paso 1:** utilizando la ecuación (5) las cargas críticas de pandeo para los tipos de estabilidad b) y c)

(previamente calculados en ejemplo 1 como casos 2 y 3) son  $P_{cr}=0,86491\pi^2EI/L^2$  y  $P_{cr}=1,5133\pi^2EI/L^2$ , respectivamente.

**Paso 2:** utilizando la ecuación (2) la variación de la carga crítica de pandeo para el tipo de estabilidad a) con  $S_b$  y suponiendo que  $S_a=0$  fue calculado y dibujado en fig. 4a. La curva llega a ser asimptótica con respecto a la línea horizontal cuando  $P\approx 0,86491\pi^2EI/L^2$  [esto es, ( $S_b$ )<sub>mín.</sub> =  $\infty$  representa el arriostramiento lateral que se requiere en B para lograr un pandeo sin deriva lateral en B solamente].

De igual manera, utilizando la ecuación (2) la variación de la carga crítica de pandeo para el tipo de estabilidad a) con  $S_a$  y suponiendo que  $S_a=S_b$  es calculado y dibujado en fig. 4b. Otra vez, la curva se torna asimptótica con respecto a la horizontal cuando  $P\approx 1,51330\pi^2EI/L^2$ . Por lo tanto, ( $S_a$ )<sub>mín.</sub> = ( $S_b$ )<sub>mín.</sub> =  $\infty$  representa el arriostramiento lateral que se necesita en ambos extremos para lograr un pandeo lateral absoluto sin derivas en A y B simultáneamente.

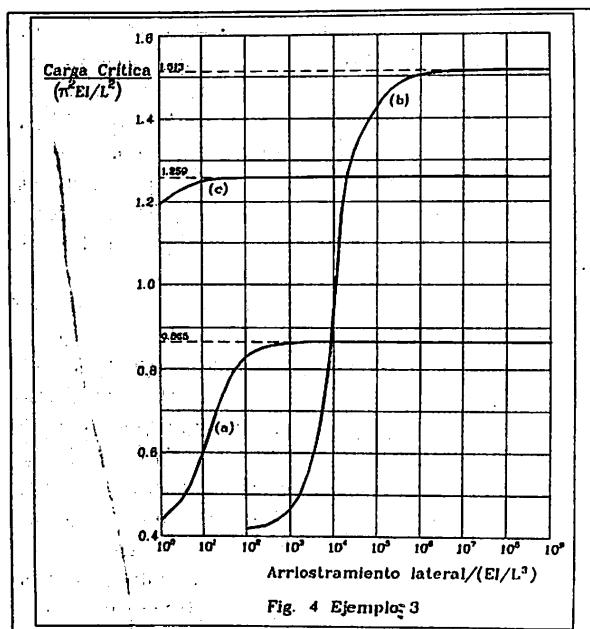


Fig. 4 Ejemplo 3

**Fig. 4: Ejemplo 2: Arriostramiento lateral mínimo para la viga-columna del ejemplo 1. Variación del arriostramiento con la carga de pandeo para  $k_s=50EI/L^4$ ; Variación del arriostramiento con carga de pandeo para  $k_s=150EI/L^4$ .**

Siguiendo los dos pasos arriba descritos, la fig. 4c fue obtenida por el valor particular de  $k_s=150EI/L^4$ .

Utilizando la ecuación (5) la carga crítica para el tipo de estabilidad b) llega a ser  $P_{cr}\approx 1,25914EI/L$ . Aunque

la curva también se torna asintótica con respecto a la horizontal en  $P \approx 1,25914\pi^2EI/L^2$  alcanza este valor más rápido desde abajo. Por ejemplo, cuando  $S_b = 5EI/L^3$  la carga crítica es  $1,23886\pi^2EI/L^2$  la cual es sólo 1,6% menor que el valor deseado de  $1,25914\pi^2EI/L^2$ .

**Conclusiones:** Estos resultados indican la variación de la rigidez lateral de arriostramiento en los extremos de la viga-columna con la carga crítica de pandoe es asimptótica llegando a ser infinita cuando la carga crítica corresponde al caso sin deriva lateral. Sin embargo, la rata de convergencia aumenta con la rigidez de la fundación elástica  $k_s$ .

## 5. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Un método analítico que evalúa el comportamiento de estabilidad elástica de una viga-columna con deriva lateral en los extremos, no inhibida, parcialmente inhibida y totalmente inhibida y soportada lateralmente por un suelo de fundación elástico distribuido uniformemente (tipo Winkler) es presentado utilizando la formulación clásica. Las ecuaciones de estabilidad propuestas incluyen los efectos de las conexiones semi-rígidas de una manera explícita. Los factores de fijera son seleccionados para considerar los efectos de las conexiones a flexión en la viga-columna, ya que estos son prácticos y convenientes en su aplicación. La precisión de las ecuaciones de estabilidad fue verificada contra resultados disponibles por otros métodos analíticamente exactos. Las fórmulas propuestas pueden ser aplicadas en el análisis de estabilidad de las viga-columnas con conexiones rígidas, semi-rígidas y simples, con o sin arriostramientos elásticos.

El análisis de estabilidad consiste en una solución de autovalores de una matriz de  $4 \times 4$  para una viga-columna con deriva lateral no inhibida o parcialmente inhibida en ambos extremos, y de una matriz de  $3 \times 3$  para una viga-columna con deriva lateral inhibida en uno o en ambos extremos, respectivamente. Los efectos de arriostramientos en uno o en ambos extremos de la viga-columna son presentados. Para demostrar la utilización y la relativa simplicidad de la clasificación propuesta de viga-columnas de acuerdo con el modo de pandoe y las correspondientes ecuaciones características, la carga crítica de pandoe de cinco casos clásicos son presentada y comparados con valores obtenidos con otros métodos analíticos. Además, se incluyen tres ejemplos que muestran los efectos de las restricciones rotacionales y arriostramientos laterales en los extremos en las cargas

críticas de pandoe de viga-columnas y tubos cilíndricos. Las Tablas 1-5 se pueden utilizar directamente en el análisis de estabilidad de las viga-columnas con conexiones semi-rígidas sobre un suelo o fundación elástica. Las ecuaciones de estabilidad (2) y (5) se pueden programar en una calculadora portable o de bolsillo facilitando así un método eficiente y evitando procedimientos complicados.

Los resultados analíticos indican que: 1) los efectos de un soporte lateral distribuido uniformemente de magnitud  $k_s$  llegan a ser más significativos en viga-columnas con extremos libres que en viga-columnas con ambos extremos restringidos contra la rotación y la deriva o desplazamiento lateral; 2) la capacidad de carga crítica de pandoe de una viga-columna soportada lateralmente por un medio o suelo elástico muy blando se puede aumentar sustancialmente, ya sea restringiendo de sus extremos contra rotación o arriostrando ambos extremos contra deriva o desplazamiento lateral; y 3) la carga crítica clásica de pandoe de un tubo cilíndrico axialmente comprimido se puede determinar utilizando el modelo sugerido por Hetenyi como una viga de ancho unitario y grosor  $t$  sobre una fundación elástica con un módulo de balasto  $k_s = Et/R^2$ .

## REFERENCIAS

- Ang, K. K., y Wang, C. M. Shearflexural buckling of columns, *J. Engr. Mech.*, ASCE, 116(6), 1220-1241. 1990.
- Aristizábal Ochoa, J. D. Braced, partially braced and unbraced columns: complete set of classical stability equations, *Int. J. Struct. Engrg. and Mech.*, Taejon, Korea, 4(4), 365-378. 1996.
- Aristizábal Ochoa, J. D. Story stability of braced, partially braced and unbraced frames: classical approach, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 123(6), 799-807. 1997.
- Aristizábal Ochoa, J. Darío Elastic stability of beam-columns with flexural connections under various conservative end axial forces, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 123(9), 1194-1200. 1997b.
- Chajes, A. *Principles of Structural Stability Theory*, Waveland Press, Inc., P. O. Box 400, Prospect Heights, Illinois 60070, Capítulo 7. 1974.

Cheng, F. Y., y Pantelides, C. P. Static Timoshenko beam-columns on elastic media, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 114(5), 1152-1172. 1988.

Cunningham, R. Some aspects of semi-rigid connections in structural steel-work", *Structural Engineering*, 68(5), 85-92. 1990.

Gerstle, K. H. Effects of connections on frames, En: *Steel Beam to Column Building Connections*, W. F. Chen, ed., Elsevier Science Publishers Ltd., New York, N.Y., 241- 267. 1988.

Hetenyi, M. *Beams on elastic Foundation*, 8th printing, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, Capítulo VII. 1967.

Libove, C. Elàstic Stability, En: *Handbook of Engineering Mechanics*, W. Flugge Editor, McGraw-Hill Book Company, Inc., Capítulo 44. 1962.

Roark, R. J. *Formulas for Stress and Strain*, Third Edition, McGraw-Hill Book Co. \*\*\*\*\*PAGS. 1954.

Timoshenko, S. P., y Gere, J. M. *Theory of elastic stability*, 2nd. Ed., McGraw-Hill, New York, N.Y., 100-107. 1961.

Wang, C. M., Xiang, Y., y Kitipornchai, S. Buckling of restrained columns with shear deformation and axial shortening, *J. Engrg. Mechanics*, ASCE 117 (9), 1973-1989. 1991.

West, H. H, y Mafi, M. Eigenvalues for beam-columns on elastic supports, *J. Struct. Engrg.*, ASCE 110 (6), págs. 1305-1320. 1984.

Xu, L., y Grierson, D. E. Computer-automated design of semirigid steel frameworks, *J. Struct. Engrg.*, ASCE 119 (6), 1740-1760. 1993.

#### APÉNDICE I. ESTIMACIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTABILIDAD

La ecuación diferencial gobernante de una viga-columna prismática sometida a cargas axiales compresivas  $P$  en ambos extremos y soportada lateralmente sobre una fundación elástica  $k_s$  es:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} + k_s y = 0 \quad (9)$$

Para una viga-columna con ambas derivas laterales en los extremos no inhibidas o parcialmente inhibidas (fig.

2a), la solución a la ecuación (9) debe estar sometida a las siguientes cuatro condiciones de borde naturales:

$$1) \text{ En } X=L, \quad EI \frac{d^2 y}{dx^2} + \kappa_b \frac{dy}{dx} = 0 \quad (10)$$

$$2) \text{ En } X=0, \quad EI \frac{d^2 y}{dx^2} + \kappa_a \frac{dy}{dx} = 0 \quad (11)$$

$$3) \text{ En } X=L, \quad EI \frac{d^3 y}{dx^3} - P \frac{dy}{dx} + S_b y = 0 \quad (12)$$

$$4) \text{ En } X=0, \quad EI \frac{d^3 y}{dx^3} + P \frac{dy}{dx} + S_a y = 0 \quad (13)$$

La solución a la ecuación (9) depende del valor relativo de  $P$  con respecto a  $\sqrt{k_s EI}$  (Hetenyi 1967). Hay dos tipos de soluciones en el campo compresivo ( $P>0$ ):

Para  $0 \leq P < \sqrt{k_s EI}$  :

$$y = (C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}) \cos \beta x + (C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x}) \sin \beta x \quad (14)$$

$$\text{donde: } \alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{k_s}{4EI}} - \frac{P}{4EI}}, \quad y \quad \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{k_s}{4EI}} + \frac{P}{4EI}}$$

Para  $P > \sqrt{k_s EI}$

$$y = C_1 \cos \gamma x + C_2 \cos \varphi x + C_3 \sin \gamma x + C_4 \sin \varphi x \quad (15)$$

$$\text{donde: } \gamma = \sqrt{\frac{P}{2EI}} - \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{k_s}{EI}}; \quad y$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{P}{2EI}} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{k_s}{EI}}$$

Las cuatro constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , y  $C_4$  en las ecuaciones (14) y (15) se determinan de las cuatro condiciones naturales de borde dadas por las ecuaciones (10)-(13). Estas son reducidas a las ecuaciones (16a)-(16d) después de algunas reducciones algebraicas.

$$A_{11} C_1 + A_{12} C_2 + A_{13} C_3 + A_{14} C_4 = 0 \quad (16a)$$

$$A_{21} C_1 + A_{22} C_2 + A_{23} C_3 + A_{24} C_4 = 0 \quad (16b)$$

$$A_{31} C_1 + A_{32} C_2 + A_{33} C_3 + A_{34} C_4 = 0 \quad (16c)$$

$$A_{41} C_1 + A_{42} C_2 + A_{43} C_3 + A_{44} C_4 = 0 \quad (16d)$$

Donde los coeficientes  $A_{ij}$  son de las ecuaciones (3a)-(3o) para  $0 \leq P < \sqrt{k_s EI}$  y de (4a)-(4o) para  $P > \sqrt{k_s EI}$ .

Para una viga-columna con deriva lateral totalmente inhibida en A y parcialmente inhibida en B (fig. 2b), la cuarta condición natural de borde dada por la ecuación (13) o (16d) debe ser sustituida por la condición forzada de borde  $y=0$  en A o sólo  $C_1 = -C_2$ , la cual cuando se introduce junto con las otras tres condiciones naturales de borde dadas por las ecuaciones (16a)-(16c) se convierten en:

$$(A_{11} - A_{12})C_1 + A_{13}C_3 + A_{14}C_4 = 0 \quad (17a)$$

$$(A_{21} - A_{22})C_1 + A_{23}C_3 + A_{24}C_4 = 0 \quad (17b)$$

$$(A_{31} - A_{32})C_1 + A_{33}C_3 + A_{34}C_4 = 0 \quad (17c)$$

Los coeficientes en las ecuaciones (17a)-(17c) son denominados  $B_{ij}$  como lo indican las ecuaciones (2) y (6a)-(6i).

Para una viga-columna con deriva lateral totalmente inhibida en ambos extremos A y B (fig. 2c), la tercera condición natural de borde dada por las ecuaciones (12) o (17c) debe ser sustituida por las condiciones forzadas de borde  $y=0$  en B. Esta condición llega a ser:

Para  $0 \leq P < \sqrt{k_s EI}$ :

$$(C_1 e^{2\alpha L} - 1) \cos \beta L C_1 + e^{2\alpha L} \sin \beta L C_3 e^{\alpha x} + \sin \beta L C_4 = 0 \quad (18)$$

Para  $P > \sqrt{k_s EI}$

$$(\cos \gamma L - \cos \varphi L) C_1 + \sin \gamma L C_3 + \sin \varphi L C_4 = 0 \quad (19)$$

Los coeficientes en las ecuaciones (18) y (19) son denominados  $B_{31}$ ,  $B_{32}$  y  $B_{33}$  como lo indican las ecuaciones (7a)-(7f).

La solución no trivial al grupo homogéneo de cuatro y de tres ecuaciones dadas por las expresiones (16a)-(16d) y (17a)-(17c) corresponde a las ecuaciones (2) y (5), respectivamente. Estas son las ecuaciones características de estabilidad. Es importante anotar que

los coeficientes  $A_{ij}$  y  $B_{ij}$  ya incluyen los efectos del tipo de conexiones, desde articuladas ( $\rho = 0$ ) hasta empotradas ( $\rho = 1$ ). Esta es quizás la ventaja principal de la formulación propuesta ya que la clasificación de vigas-columnas y sus ecuaciones características son generales, esto es, son aplicables a viga-columnas sobre un medio elástico continuo bajo con cualquier tipo de apoyo en los extremos o condiciones de borde. De hecho, las ecuaciones propuestas pueden ser utilizadas en el análisis de estabilidad inelástica de vigas-columnas cuando el comportamiento no lineal esté concentrado en sus extremos. Este análisis puede llevarse a cabo actualizando cada par de restricciones  $\kappa_a$ ,  $\kappa_b$  y  $S_a$ ,  $S_b$  para cada incremento de carga en forma lineal.

## APÉNDICE II. NOMENCLATURA

Los siguientes símbolos se utilizan en este trabajo:

$E$ : módulo de Young del material de la viga-columna;  $G_a$  y  $G_b = \Sigma (I_x/L_x)/\Sigma (I_y/L_y)$  en los extremos A y B de la columna AB, respectivamente.

$I_x$ : momento de inercia de la viga.

$I$  ó  $I_c$  = momento de inercia de la viga y de la columna, respectivamente.

$L$  ó  $L_c$  = luz de la viga y de la columna, respectivamente.

$L_g$  = luz de la viga.

$P$  = carga axial aplicada a la viga-columna en los extremos.

$P_{cr}$  = carga crítica de pandeo de la viga-columna.

$k_s$  = rigidez de la fundación elástica distribuida uniformemente (tipo Winkler).

$R_a$  = índice de rigidez de la conexión a flexión en A [ $\kappa_a/(EI/L)$ ].

$R_b$  = índice de rigidez de la conexión a flexión en B [ $\kappa_b/(EI/L)$ ].

$S_a$  y  $S_b$  = rigideces laterales de arriostramiento dadas a la viga-columna en A y B, respectivamente.

$\kappa_a$  y  $\kappa_b$  = rigidez a flexión de las conexiones de extremo en A y B, respectivamente.

$\rho_a$  y  $\rho_b$  = factores de fijeza en A y B de la viga-columna AB, respectivamente.

**TABLA 1. Carga de Pandeo/(\(\pi^2EI/L^2\)). Viga-Columna con deriva lateral no inhibida en ambos extremos, articulada en A y con la rotación restringida en B. \(\beta\_a=0\) y \(0 \leq \beta\_b \leq 1\)**

$\sqrt{k_s L^4 / (EI)}$	0	0,20	0,50	0,80	1,00
0	0,00000	0,06028	0,14407	0,21318	0,25000
5	0,20891	0,27179	0,35189	0,41080	0,43978
10	0,80557	0,86948	0,91621	0,93663	0,94443
15	1,43173	1,51215	1,54143	1,54992	1,55277
20	1,75911	1,88170	2,00042	2,05988	2,08293
25	2,16856	2,30282	2,44727	2,52784	2,56055
30	2,65042	2,79168	2,93408	3,00846	3,03785
40	3,77770	3,91537	3,99683	4,02601	4,03630
50	5,00904	5,05753	5,06157	5,06260	5,06294
60	5,96797	6,06041	6,07769	6,08230	6,08385
70	6,90228	7,03763	7,07976	7,09193	7,09606
80	7,90451	8,04711	8,08985	8,10207	8,10622
90	8,95261	9,07986	9,10775	9,11531	9,11785
100	10,02396	10,11580	10,12715	10,13008	10,1310

**TABLA 2. Carga de pandeo/(\(\pi^2EI/L^2\)). Viga-Columna con deriva lateral no inhibida y con las rotaciones igualmente restringida en ambos extremos. \(\beta\_a=\beta\_b\)**

$\sqrt{k_s L^4 / (EI)}$	0	0,20	0,50	0,80	1,00
0	0,00000	0,13475	0,39581	0,73814	1,00000
5	0,20891	0,35335	0,63180	0,99049	1,25665
10	0,80557	0,98480	1,32721	1,74568	2,02659
15	1,43173	1,73172	2,40731	2,99527	3,30985
20	1,75911	2,07375	2,78342	3,97126	5,02660
25	2,16856	2,50282	3,25907	4,51969	5,60406
30	2,65042	3,00979	3,82700	5,18633	6,30985
40	3,77770	4,20395	5,19333	6,85964	8,10639
50	5,00904	5,51779	6,74164	8,93369	10,41624
60	5,96797	6,51097	7,84518	10,51335	13,10639
70	6,90228	7,48365	8,92394	11,84295	14,58926
80	7,90451	8,52998	10,09601	13,34020	16,30025
90	8,95261	9,62578	11,33206	14,98057	18,23938
100	10,02396	10,74576	12,59879	16,72462	20,40665

**TABLA 3. Carga de pandeo/(\(\pi^2EI/L^2\)). Viga-Columna con deriva lateral no inhibida, articulada en A y con rotación restringida en B. \(\beta\_a=0\) y \(0 \leq \beta\_b \leq 1\)**

$\sqrt{k_s L^4 / (EI)}$	0	0,20	0,50	0,80	1,00
0	0,00000	0,06029	0,14407	0,21318	0,25000
5	0,63111	0,63295	0,63512	0,63681	0,63773
10	1,08744	1,10806	1,14333	1,18449	1,21549
15	1,49199	1,51474	1,55680	1,61175	1,65795
20	1,97613	1,99163	2,02080	2,06007	2,09435
25	2,50599	2,51318	2,52686	2,54571	2,56270
30	3,04149	3,04334	3,04695	3,05208	3,05691
40	4,06982	4,07007	4,07057	4,07135	4,07216
50	5,06917	5,07050	5,07330	5,07794	5,08317
60	6,07473	6,07595	6,07859	6,08315	6,08864
70	7,08892	7,08951	7,09081	7,09316	7,09612
80	8,10517	8,10532	8,10567	8,10630	8,10714
90	9,11997	9,11997	9,11999	9,12002	9,12006
100	10,13318	10,13319	10,13322	10,13328	10,1333

**TABLA 4. Carga de pandeo/( $\pi^2 EI/L^2$ ). Viga-columna con deriva lateral no inhibida en ambos extremos, articulada en A y con rotación restringida en B.  $\rho_a = 0$  y  $0 \leq \rho_b \leq 1$ .**

$\sqrt{k_s L^4 / (EI)}$	0	0,20	0,50	0,80	1,00
0	1,00000	1,13608	1,40694	1,77129	2,04575
5	1,25665	1,39216	1,65772	2,00342	2,25403
10	2,02660	2,15990	2,40569	2,68845	2,86806
15	3,30985	3,43578	3,62369	3,77387	3,84515
20	5,02660	5,06093	5,06474	5,06572	5,06605
25	5,60406	5,73286	5,94515	6,15132	6,26753
30	6,30985	6,44373	6,69767	7,01894	7,25656
40	8,10639	8,24068	8,49664	8,81665	9,04279
50	10,41624	10,54413	10,74624	10,92273	11,01150
60	13,10639	13,15798	13,16812	13,17082	13,17173
70	14,58926	14,71960	14,94319	15,17431	15,31092
80	16,30025	16,43473	16,69354	17,02918	17,28330
90	18,23938	18,37385	18,63186	18,96087	19,20093
100	20,40665	20,53839	20,77181	21,02286	21,17358

**TABLA 5. Carga de pandeo/( $\pi^2 EI/L^2$ ). Viga-Columna con deriva lateral no inhibida y con las rotaciones igualmente restringida en ambos extremos.  $\rho_a = \rho_b$ .**

$\sqrt{k_s L^4 / (EI)}$	0	0,20	0,50	0,80	1,00
0	1,0000	1,28208	1,91659	2,99066	4,00000
5	1,25665	1,53836	2,16884	3,22204	4,19205
10	2,02660	2,30710	2,92422	3,91072	4,76276
15	3,30985	3,58777	4,17716	5,03690	5,69423
20	5,02660	5,31335	5,91043	6,95059	6,55234
25	5,60406	5,89044	6,57283	7,90956	8,46691
30	6,30985	6,59572	7,27227	8,57226	10,04787
40	8,10639	8,39077	9,04988	10,24535	11,47225
50	10,41624	10,69796	11,32695	12,35858	13,26391
60	13,10639	13,39200	14,06788	14,85438	15,38058
70	14,58926	14,87533	15,55595	16,90354	17,75189
80	16,30025	16,58612	17,26383	20,16972	18,58612
90	18,23938	18,52452	19,19332	20,45562	21,86351
100	20,40665	20,69046	21,34371	22,51090	23,68742