

# CONJUNTOS FRACTALES EN EL TIEMPO Y EN EL ESPACIO

DORA PATRICIA RESTREPO R.

Departamento de Recursos Minerales, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín

OSCAR MESA S.

Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín

HORACIO ARANGO M.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Medellín

Recibido para revisar 02 Abril 2001; aceptado 23 Julio de 2001; versión final recibida 14 Agosto 2001

**RESUMEN.** Se exponen dos modelos de conjuntos fractales: el ruido fraccional Gaussiano (rfG) y el movimiento fraccional Browniano (mfB) y dos métodos utilizados para generar dichos conjuntos: el método de síntesis espectral (MS) y el método de Davies Hart (DH). Se estima el exponente de Hurst para señales sintéticas generadas con los métodos MS y DH y para señales de porosidad de un yacimiento de petróleo. Los experimentos numéricos realizados con rfG y mfB sintéticos sugieren que para series cortas ( $N < 2^{10}$ ) los valores estimados del exponente de Hurst ( $H$ ) son poco confiables. Los registros de porosidad analizados pueden considerarse mfB con un exponente de Hurst de 0.6.

**PALABRAS CLAVES.** Fractales, Movimiento fraccional Browniano, Ruido fraccional Gaussiano, Onditas, Exponente de Hurst.

**ABSTRACT.** Two fractal patterns: fractional Gaussian noise (rfG) and fractional Brownian motion (mfB), and two methods for generating these patterns (the spectral synthesis (SE) and the Davies Hart (DH) methods) are shown. The Hurst exponent for synthetic signals generated with SE and DH methods and for porosity signals is estimated. Numerical experiments performed with synthetic rfG and mfB suggest that any Hurst exponent estimation using short series ( $N < 2^{10}$ ) will result in an unreliable value of this exponent. The porosity signals analyzed can be considered fractional Brownian motion with a Hurst exponent of 0.6.

**KEY WORDS.** Fractals, Fractional Brownian motion, Fractional Gaussian noise, Wavelets, Hurst exponent.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los conjuntos fractales se han aplicado en las áreas de geología del petróleo y ciencias de la tierra para modelar características geométricas, señales geofísicas, fenómenos difusivos, etc. (Mandelbrot 1983, Feder 1988, Barton *et al.* 1995, Hastings *et al.* 1993). Mandelbrot y Wallis (1969) modelaron registros geofísicos con ruidos fraccionales. Estudios posteriores han concluido que las heterogeneidades de los yacimientos pueden modelarse utilizando conjuntos fractales como el movimiento fraccional Browniano (mfB) y el ruido fraccional Gaussiano (rfG). Las variaciones verticales de los registros de permeabilidad (Moltz 1993), y los registros de porosidad (Hewett 1986) tomados en pozos de petróleo mostraron consistencia con el modelo rfG. Los registros de densidad analizados por Crane y Tubman (1990) indicaron que la variación de la porosidad en la dirección horizontal podía ser modelada con un rfG. Neuman (1990) señaló que un modelo mfB para la distribución de permeabilidad ajustaba bien

con los datos de dispersividad efectiva en función de la distancia. Painter y Paterson (1996) reportaron que los registros acústicos verticales podían ser representados con un modelo de movimiento fraccional Levy (mfL), el cual es una generalización del mfB.

Los trabajos que caracterizan registros como conjuntos fractales, presentan una gran diversidad de resultados, no sólo respecto a la clasificación de la señal como un ruido fraccional Gaussiano o como un movimiento fraccional Browniano, sino también respecto al valor estimado del exponente de Hurst ( $H$ ). Dichos trabajos evidencian que no existe una metodología clara y sistemática para realizar el análisis básico del registro y la estimación de  $H$ . Adicionalmente los trabajos no especifican la cantidad de datos necesaria para tener estimados confiables de  $H$ , ni discuten a fondo los problemas de sesgamiento asociados a los métodos que se utilizan para la estimación y para la simulación de la señal como rfG o mfB. En este trabajo se determina a partir de un experi-

mento numérico exhaustivo cuál debe ser el número de datos mínimo de un registro que permite hallar un valor  $H$  confiable. Para evaluar el exponente se utilizan análisis en diferentes dominios: tiempo, frecuencia y tiempo-escala. La utilización del análisis en el dominio tiempo-escala busca establecer si los estimados en este dominio son más confiables, pues la literatura consultada recomienda usar la transformada ondita en señales con características fractales o multifractales.

## 2 MOVIMIENTO BROWNIANO

Robert Brown en 1828 fue el primero en darse cuenta que el movimiento errático de partículas microscópicas de polen era de naturaleza física y no biológica como se pensaba antes. Las partículas están sujetas a las fluctuaciones térmicas del fluido que las rodea, el número de colisiones que una sola molécula de agua recibe en un segundo es del orden de  $10^{14}$ , entonces en un centésimo de segundo sufre  $10^{12}$  colisiones, por lo tanto, después de un centésimo de segundo no recordará lo que le pasó antes, además frente a la rapidez del bombardeo, un centésimo de segundo es un tiempo muy largo, en otras palabras las colisiones que recibe la partícula son todas al azar (Feynman 1987). Esta excitación puramente aleatoria que experimentan las partículas fue estudiada por Langevin en 1908 quien encontró que el valor medio del cuadrado de la distancia recorrida por la partícula es proporcional al tiempo. Es importante enfatizar que en el movimiento Browniano la posición de la partícula en un momento del tiempo no es independiente de la posición en otro momento, mientras que el desplazamiento de la partícula en un intervalo de tiempo es independiente del desplazamiento durante otro intervalo de tiempo.

El movimiento de una partícula Browniana tal como se ve bajo un microscopio consta de pasos de dirección aleatoria y de una longitud de paso que tiene algún valor característico, por lo anterior el modelo más simple de movimiento Browniano es una caminata aleatoria.

Si se considera una situación en la cual una partícula se mueve a lo largo del eje  $x$  mediante saltos con longitud de paso  $+\xi$  o  $-\xi$  cada  $\lambda$  segundos, es posible modelar el fenómeno de difusión si se asume que  $\xi$  es alguna longitud microscópica como por ejemplo el diámetro de la partícula, y que  $\lambda$  es el tiempo microscópico como por ejemplo el tiempo entre colisiones. La longitud  $\xi$ , más que un valor fijo está dada por una distribución de probabilidad normal o Gaussiana tal que

$$p(\xi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\lambda}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4D\lambda}\right) \quad (1)$$

donde el parámetro  $D$  es el coeficiente de difusión. La caminata aleatoria puede representarse así: para los intervalos  $\lambda$ , se escoge una longitud de paso  $\xi$  al azar; una secuencia de tales pasos  $\{\xi_i\}$  es una serie de variables Gaussianas aleatorias independientes con varianza

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p(\xi, \lambda) d\xi = 2D\lambda \quad (2)$$

y por lo tanto  $D = \frac{1}{2\lambda} \langle \xi^2 \rangle$ . Einstein en 1915 encontró que el coeficiente de difusión es:  $D = \frac{kT}{\mu}$ , donde  $k$  es la constante de Boltzmann,  $T$ , la temperatura y  $\mu$  es el coeficiente de fricción dinámica del medio en el cual ocurre el movimiento. Esto sirvió posteriormente para la primera verificación experimental de la teoría atómica realizada por Smoluchowski en 1967. El proceso aleatorio Gaussiano normalizado se obtiene al reemplazar  $\xi \leftarrow \frac{\xi}{\sqrt{2D\lambda}}$  de tal forma que el nuevo  $\xi$  tiene media cero y varianza unitaria. La serie  $\xi_1, \xi_2, \dots$  es la secuencia de los pasos de la caminata aleatoria y la posición de la partícula en el eje  $x$  está dada por

$$X(t = n\lambda) = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (3)$$

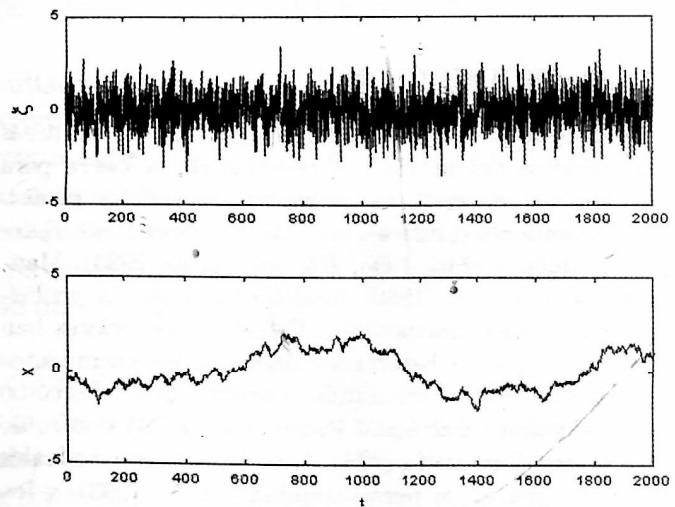


Figura 1. Movimiento Browniano. Pasos aleatorios independientes de la "partícula"  $\xi$  y de la posición de la partícula  $X$ , ambos en función del tiempo

En la Figura 1 se observan los pasos de la caminata y la posición de la partícula como función del tiempo.

Tabla 1. Clasificación del mfB según el valor de  $H$ .

No estacionario, PML	No estacionario, Movimiento Browniano	No estacionario, no PML
$\frac{1}{2} < H < 1$	$H = \frac{1}{2}$	$0 < H \leq \frac{1}{2}$

Tal curva está formada por una serie de puntos discretos que en el límite, cuando el paso en el tiempo se hace muy pequeño, la variable aleatoria llega a ser la función aleatoria  $X(t)$ . La gráfica de la función (Figura 1) se conoce con el nombre de registro de  $X(t)$ . Mandelbrot llama a  $X(t)$  una función Browniana y la denota como  $B(t)$ .

### 3 MOVIMIENTO FRACTACIONAL BROWNIANO

Mandelbrot y Van Ness en 1968 introducen el concepto de movimiento fraccionario Browniano (mfB) como una generalización de  $X(t)$ , y usan la notación  $B_H(t)$  para tal función. El mfB es un proceso estocástico Gaussiano de media cero no estacionario, es decir, sus principales propiedades estadísticas dependen del tiempo. El índice  $H$  es un parámetro conocido como el exponente de Hurst y está en el rango  $0 \leq H \leq 1$ , los casos en los que  $H \neq 1/2$  son propiamente fraccionales,  $H = 1/2$  es el caso especial del movimiento Browniano. El carácter no estacionario del mfB es revelado por su estructura de covarianza

$$\begin{aligned} s_\tau &= \text{cov} \{B_{H(t)}, B_{H(t+\tau)}\} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (|t|^{2H} + |t - \tau|^{2H} - |\tau|^{2H}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$s_0 = \text{cov} \{B_{H(t)}, B_{H(t)}\} = \sigma^2 |t|^{2H}$$

con  $\sigma^2 = \text{var} \{B_{H(t)}\}$ ,  $\tau$  el rezago y  $s_0$  la covarianza cuando no hay rezago.

La secuencia de autocorrelación (SAC) a un rezago  $\tau$  se define así

$$\rho_\tau = \frac{s_\tau}{s_0}$$

donde  $\tau$  puede tomar cualquier valor real,  $-1 < \rho_\tau < 1$ , además la secuencia  $\{s_\tau\}$  está definida positivamente.

Si se toma  $B_H(0) = 0$ , y se definen los incrementos pasado y futuro como  $-B_{H(-t)}, B_{H(t)}$ , respectivamente se tiene que la SAC de los incrementos para el mfB es

$$\rho_\tau = \frac{\text{cov} \{-B_{H(-t)}, B_{H(t)}\}}{s_0} = 2^{2H-1} - 1 \quad (5)$$

Dependiendo del valor de  $H$ , la SAC define tres clases de correlación:

- $H = 1/2$  no hay correlación de los incrementos del

pasado y del futuro,  $\rho_\tau$  es cero para todo  $\tau \neq 0$ , es un proceso aleatorio de incrementos independientes, y se está en el dominio de atracción Browniano.

- $1/2 < H < 1$ , la correlación es positiva,  $\rho_\tau \neq 0$  independientemente de  $\tau$ , y el proceso no pertenece al dominio de atracción Browniano. En este caso si en algún tiempo pasado se tiene una tendencia de aumento entonces en el futuro se tendrá también un aumento, si al contrario, se tiene una tendencia decreciente en el pasado, en el futuro habrá una tendencia decreciente, el proceso es persistente. Es la correlación positiva la que hace que el mfB pueda modelar fenómenos que tienden a agruparse primero a un lado de la media y luego a otro. Este tipo de procesos además se denominan procesos de memoria larga (PML), porque su función de autocovarianza no converge  $\sum_{\tau=0}^{\infty} s_\tau = \infty$ .
- $0 < H < 1/2$ , la correlación es negativa,  $\rho_\tau \neq 0$  independientemente de  $\tau$ . En este caso una tendencia de aumento en el pasado implica una tendencia a disminuir en el futuro, y una tendencia de disminución en el pasado implica una tendencia a aumentar en el futuro, el proceso es antipersistent. Es la correlación negativa la que permite modelar fenómenos que fluctúen fuertemente alrededor de la media.

En la Tabla 1 se resume la clasificación del mfB según el valor de  $H$ .

El comportamiento estadístico de un registro que tenga una SAC independiente del tiempo está en conflicto con lo que normalmente es asumido o probado para los registros estadísticos y para los sistemas físicos. La física estadística utiliza la suposición fundamental de que los eventos pueden estar correlacionados cuando están separados en el tiempo por  $\Delta t$ , pero ellos llegarán a estar no correlacionados en el límite  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Esta independencia estadística del proceso a separaciones muy grandes en el tiempo o en el espacio es esencial en el concepto de equilibrio térmico. Sin embargo hay excepciones como las transiciones de fase de segundo orden en las cuales la función de correlación de la densidad no tiene escalas intrínsecas en la longitud o en el tiempo (Feder, 1988).

La propiedad de escalamiento del mfB puede entenderse si se define

$$\langle [\Delta B_H(\Delta t)]^2 \rangle = \langle [B_H(t) - B_H(t_o)]^2 \rangle$$

Tabla 2. Clasificación del rfG según el valor de  $H$ 

Estacionario, PML	Estacionario, ruido blanco	Estacionario, no PML
$\frac{1}{2} < H < 1$	$H = \frac{1}{2}$	$0 < H \leq \frac{1}{2}$

$$\langle [\Delta B_H(r \Delta t)]^2 \rangle = \langle [B_H(rt) - B_H(rt_o)]^2 \rangle$$

donde  $r$  es un factor de escala y  $t_o = t - \tau$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle [\Delta B_H(r \Delta t)]^2 \rangle &= \alpha |rt - rt_o|^{2H} = r^{2H} \alpha |t - t_o|^{2H} \\ &= r^{2H} \langle [\Delta B_H(\Delta t)]^2 \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

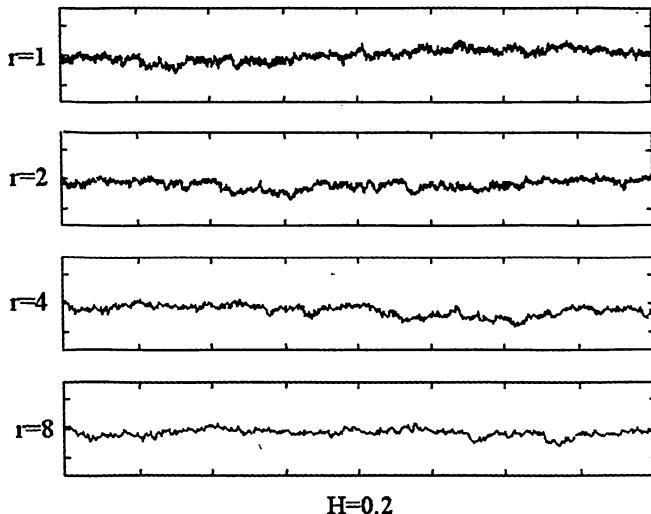


Figura 2. mfB para  $H=0.2$ , con escalamiento  $B_H(t) = r^{-H} B_H(rt)$ .

La ecuación 6 describe el comportamiento de escalamiento estadístico del mfB. En el caso particular en el que  $H = 1/2$ , se obtiene la relación del movimiento Browniano, el cual es un escalamiento autosemejante. Por su parte el tipo de escalamiento que exhibe el mfB es autoafín. La diferencia entre estos dos tipos de escalamiento es que al someter a un factor de aumento (o reducción) una porción del objeto las formas serán idénticas si el escalamiento es autosemejante, mientras que para que las formas luzcan idénticas si el escalamiento es autoafín, deben utilizarse diferentes factores de aumento en las direcciones paralelas y perpendiculares al objeto.

La Figura 2 presenta un mfB antipersistente y su propiedad de escalamiento autoafín. Esas muestras de mfB se repiten estadísticamente sólo cuando  $t$  y  $B_H(t)$  son magnificadas por diferentes cantidades, así si  $t$

es aumentado por un factor  $r$  ( $t$  llega a ser  $rt$ ),  $B_H$  debe aumentar un factor  $r^H$  ( $B_H$  llega a ser  $r^H B_H$ ).

#### 4 RUIDO FRACCIONAL GAUSSIANO

Estrictamente hablando el mfB no posee derivada, la irregularidad se mantiene a medida que  $\Delta t \rightarrow 0$ , y la derivada no está definida. Esto puede superarse si se considera una versión suavizada de la función la cual se logra al integrar sobre un intervalo arbitrariamente pequeño  $\delta$ . Cuando  $\delta$  es pequeño comparado con la escala de observación, la función original y la suavizada son indistinguibles desde el punto de vista práctico. El suavizamiento remueve las variaciones de alta frecuencia del mfB y genera una función derivable que Mandelbrot y Van Ness (1968) denominaron ruido fraccional Gaussiano (rfG). El rfG es un proceso  $\{X_t\}$  estacionario donde:

- $\mu = E \{X_t\}$
- $s_\tau = cov \{X_t, X_{t+\tau}\}$   $s_\tau$  para  $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , con  $\mu$  y  $s_\tau$  números finitos independientes del tiempo  $t$ .

La función de covarianza para el rfG es

$$s_\tau = \frac{\sigma^2}{2} (|\tau + 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau - 1|^{2H}), \quad (7)$$

$$\text{con } \sigma^2 = var \{X_t\}.$$

En la Tabla 2 se clasifica el rfG según el valor de  $H$ .

#### 5 SIMULACIÓN DE CONJUNTOS FRACTALES

Para generar mfB y rfG se han utilizado distintos métodos (Peitgen y Saupe, 1988). Dichos métodos se pueden clasificar en dos categorías: métodos de desplazamiento del punto medio y métodos de síntesis espectral. Ambos métodos utilizan generadores de números aleatorios de tal forma que se mantenga un nivel de correlación preestablecido al seleccionar  $H$ . A continuación se describen los algoritmos de síntesis espectral utilizados en este trabajo para generar mfB y rfG.

##### 5.1 Método de síntesis espectral (SE)

Este método se basa en el hecho de que un proceso con densidad espectral proporcional a  $1/w^\beta$ , siendo  $w$

la frecuencia, corresponde a un mfB con  $H = \frac{\beta-1}{2}$ . La simulación del proceso consta de los siguientes pasos:

- Se selecciona la longitud de la señal que se va a generar  $N$ , y el coeficiente de Hurst  $0 \leq H \leq 1$ .
- Se hace  $\beta = 2H + 1$ .
- Se genera la secuencia  $Z_0, \dots, Z_{N/2}$  como una serie de  $N/2$  variables aleatorias Gaussianas independientes idénticamente distribuidas con media cero y varianza unitaria.
- Se genera la secuencia  $z_1, \dots, z_{N/2}$  como una serie de  $N/2 - 1$  variables aleatorias uniformemente distribuidas.
- Se genera la amplitud aleatoria  $r(k) = k^{-\beta/2} * Z(k)$  con  $1 \leq k \leq N/2$ .
- Se genera la fase aleatoria  $p(k) = 2\pi * z(k)$  con  $1 \leq k \leq N/2$ .
- Se calcula la primera componente del coeficiente de Fourier  $A(k) = r(k) \cos(p(k))$ .
- Se calcula la segunda componente del coeficiente de Fourier  $B(k) = r(k) \sin(p(k))$ .
- Se calcula la secuencia compleja

$$y(w_k) \equiv \begin{cases} Z_0 & k = 0 \\ A(k) - iB(k) & 1 \leq k \leq N/2 \\ A(k) + iB(k) & N/2 + 1 < k \leq N \end{cases}$$

- Se calcula la transformada inversa de  $y(w_k)$  y se encuentra la secuencia de valor real

$$B_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N y(w_k) e^{2\pi i t w_k} \quad \text{con } t = 0, \dots, N$$

Los rfG se obtienen como los incrementos del mfB así

$$X_t = B_{t+1} - B_t \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

## 5.2 Método de Davies y Harte (DH)

El DH fue introducido por sus autores en 1987. El método asume que la secuencia de autocorrelación del proceso se conoce de antemano; la simulación del proceso consta de los siguientes pasos:

- Con  $M = 2N$ , se calcula la secuencia real

$$S_k = \left( \sum_{\tau=0}^{M/2} s_{\tau} e^{-2\pi i w_k \tau} + \sum_{\tau=M/2+1}^{M-1} s_{M-\tau} e^{-2\pi i w_k \tau} \right)$$

donde  $w_k \equiv k/M$  para  $k = 0, 1, \dots, M/2$  y  $s_{\tau}$  es la secuencia de autocorrelación del proceso (SAC) para el rezago  $\tau$ . La SAC del rfG es igual a:

$$s_{\tau} = \frac{\sigma^2}{2} (|\tau + 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau - 1|^{2H})$$

con  $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

- Se revisa la condición  $S_k \geq 0$  para todo  $k$ . Los rfG con  $1/2 \leq H < 1$  siempre cumplen esta condición (Percival, 2000).

- Se genera la secuencia  $Z_0, \dots, Z_{M-1}$  como una serie de  $M$  variables aleatorias Gaussianas independientes idénticamente distribuidas con media cero y varianza unitaria.

- Se calcula la secuencia compleja

$$y(w_k) \equiv \begin{cases} Z_0 \sqrt{MS_0} & k = 0 \\ (Z_{2k-1} + iZ_{2k}) \sqrt{\frac{M}{2} S_k} & 1 \leq k < \frac{M}{2} \\ Z_{M-1} \sqrt{MS_{\frac{M}{2}}} & k = \frac{M}{2} \\ y^*(w_{M-k}) & \frac{M}{2} < k \leq M - 1 \end{cases}$$

- Se calcula la transformada inversa de  $y(w_k)$  y se encuentra la secuencia de valor real

$$Y_t = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} y(w_k) e^{2\pi i t w_k} \quad \text{con } t = 0, \dots, M - 1$$

El rfG esta dado por  $Y_0, \dots, Y_{N-1}$ . Los mfB se obtienen como

$$B_t = \sum_{u=0}^{t-1} Y_u \quad t = 1, 2, \dots$$

## 6 APPLICACIÓN DEL ANÁLISIS FRACTAL A REGISTROS SINTÉTICOS Y A REGISTROS DE POROSIDAD

A continuación se presentan dos aplicaciones de la estimación del exponente de Hurst a registros sintéticos (rfG y mfB) y a registros verticales de porosidad de una formación petrolera del piedemonte llanero colombiano.

Los rfG y mfB sintéticos son generados a partir de dos métodos:

- El método de Davies Hart (DH): como se mencionó este método genera el rfG de manera directa para  $0.5 \leq H \leq 1$ , y el mfB es la integral del rfG.
- El método de síntesis espectral (SE): este método genera el mfB de manera directa para  $0 \leq H \leq 1$  y el rfG se obtiene como los incrementos del mfB.

### 6.1 Registros sintéticos.

El exponente de Hurst sirve para cuantificar el grado de heterogeneidad de la señal o del registro, pues a medida que  $H$  aumenta la dimensión fractal disminuye hasta llegar a una señal que es totalmente homogénea, pues no cambia en el tiempo o en el espacio tal como se observa en la Figura 3. El exponente de Hurst está relacionado con la dimensión fractal de la señal mediante:

$$D_f = 2 - H$$

(8) rimento numérico: para cada longitud de la señal

Tabla 3. Análisis en varios dominios usados para estimar  $H$ .

Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia	Dominio tiempo-escala
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Análisis de dispersión</li> <li>• Análisis de rango</li> <li>• Análisis de varianza</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Periodograma</li> <li>• Promedio ponderado en segmentos traslapados (WOSA) utilizando ajuste tipo Hanning</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transformada continua ondita (TCO)</li> </ul>

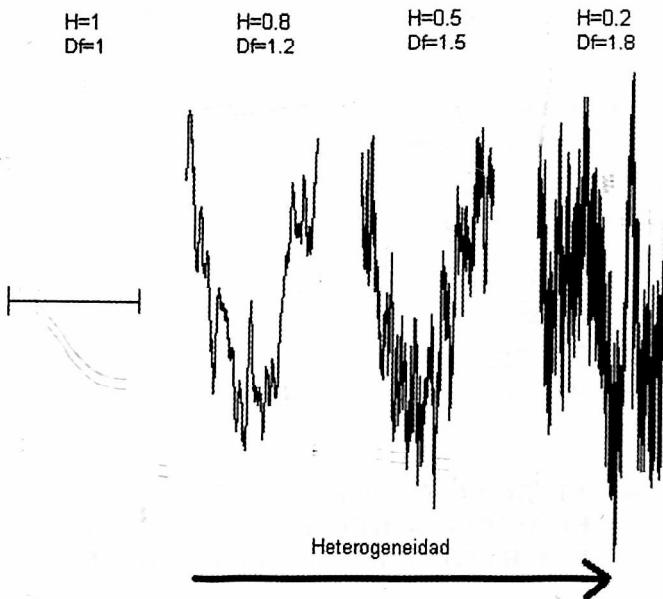


Figura 3. Heterogeneidad de la señal (mfB) y su relación con la dimensión fractal y el coeficiente de Hurst.

La estimación del exponente  $H$ , y por lo tanto de  $D_f$  puede realizarse utilizando análisis en varios dominios. Los dominios que se utilizan en este trabajo son: tiempo, frecuencia y tiempo-escala. En la Tabla 3 se resumen algunos de los métodos utilizados para estimar  $H$  según el dominio.

El procedimiento general para evaluar las señales sintéticas de rfG y mfB consiste en:

- Generar mfB y rfG (señales) de  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$  con un  $H$  conocido utilizando los métodos DH y SE.
- Estimar con varios métodos el valor de  $H$ .

Dado que no es fácil a partir de pocas realizaciones concluir cuáles son los mejores métodos para estimar  $H$  y cuál es el efecto del tamaño de la muestra en la estimación del exponente se realiza el siguiente expe-

$N = 2^6 a 2^{14}$  y para  $H = 0.1$  a  $0.9$  se generan 100 (20 para  $N = 2^{13}$  y  $2^{14}$ ) señales sintéticas utilizando el DH y el SE. A las señales se les estima el exponente  $H$ , y para cada par  $N, H$  se halla un  $H$  estimado promedio. En total se generaron 23520 señales: 16800 persistentes y 6720 antipersistentes.

En las Figuras 4 y 5 se muestran ciertos resultados de los experimentos numéricos para algunos valores de  $H$ , en ellas los valores 90%, 80% y 60% significan el total de la banda de frecuencias que se remueve simétricamente en el espectro para estimar  $H$ , por lo que:

- 100%: Se toma el espectro completo para estimar  $H$ .
- 90%: Se remueven simétricamente el 5% de altas y el 5% de bajas frecuencias.
- 80%: Se remueven simétricamente el 10% de altas y el 10% de bajas frecuencias.
- 60%: Se remueven simétricamente el 20% de altas y el 20% de bajas frecuencias.

El valor teórico del  $H$  está indicado en cada figura por una recta paralela a la absisa y para hallar la longitud de la señal debe elevarse el valor que se lee en la absisa al exponente 2, por ejemplo: 6: longitud de la señal  $2^6 = 64$ . En el análisis con la transformada continua ondita se utilizan las onditas (Morlet, Paul 4, Dog 2 ó segunda derivada de la Gaussiana y Dog 6 ó derivada de orden seis de la Gaussiana) con el objeto de estudiar si hay diferencias en el valor estimado de  $H$  según el tipo de ondita utilizada. El tema de transformada onditas puede estudiarse en (Foufoula-Georgiou, 1997; Percival, 1993; Torrence and Compo, 1998). En el análisis en el dominio del tiempo se utilizan además del análisis de rango (R/S), el análisis de rango corregido por tendencia (R/S CPT), el diagrama POX y el POX corregido por tendencia (POX CPT), el análisis de dispersión y de varianza escalada. Estos análisis pueden estudiarse en (Bassingthwaite et al. 1994, Mandelbrot et al. 1968 - 1969).

Los experimentos numéricos se realizan con el objetivo de hallar la mínima longitud de la señal que

permite un valor estimado de  $H$  confiable. El valor encontrado es  $2^{10}$ , es decir si se cuenta con señales de

comendado para analizar los rfG y los mfb. En la Tabla 4 se muestran los resultados. Para estimar el

Tabla 4. Métodos recomendados para analizar rfG y mfb.

METODO	rfG ( $0.5 \leq H \leq 1$ )	mfb ( $0 \leq H \leq 0.5$ )	mfb ( $0.5 < H \leq 1$ )
Periodograma	X		
WOSA	X	X	X
TCO Morlet		X ( excepto 100%)	
TCO Paul 4		X ( excepto 100%)	
TCO DOG 2		X ( excepto 100%)	
TCO DOG 6		X ( excepto 100%)	
R/S	X		
POX	X		
R/S CPT	X		
POX CPT	X		
Análisis de Dispersión	X		
Análisis de varianza escalada		X	

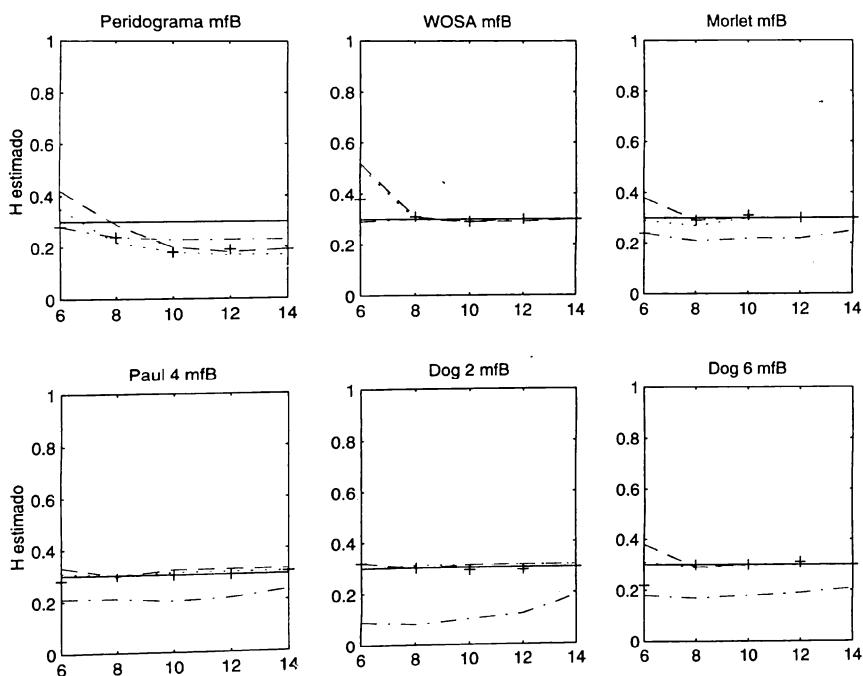


Figura 4. Efecto del tamaño de la muestra en la estimación de  $H$ . mfb (generado con el método SE),  $H$  teórico 0.3.  
 $\dots$  : 100%, +: 90%, ... : 80% y - - : 60%.

más de 1024 datos es posible estimar  $H$  con un sesgo mínimo. Otro objetivo del experimento es identificar que método de estimación de  $H$  es el re-

ponente de Hurst de ambos tipos de ruidos escalantes (rfG y mfb) el método WOSA con ajuste tipo Hanning es el más confiable.

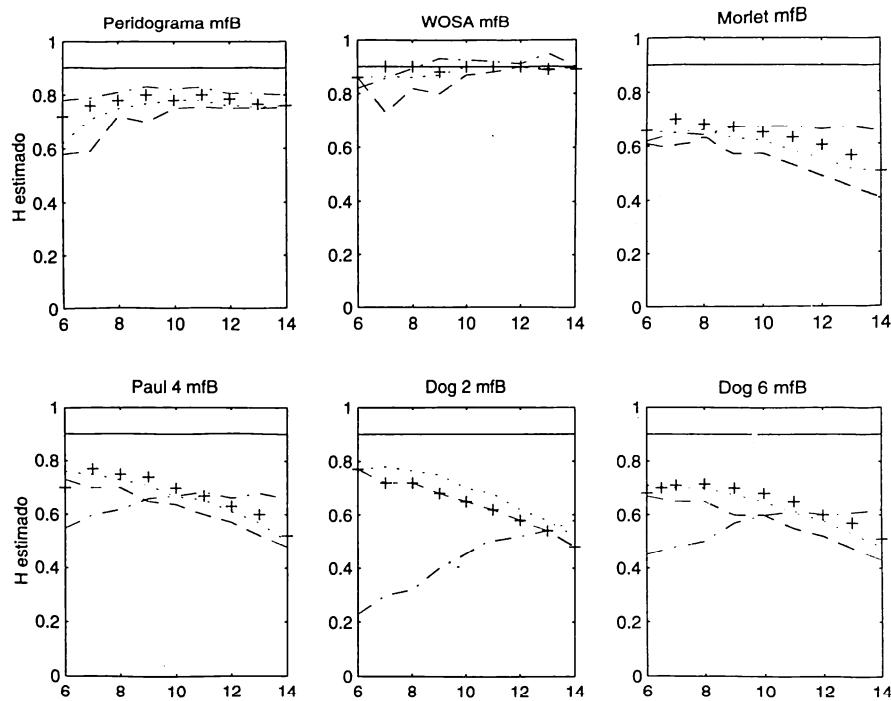


Figura 5. Efecto del tamaño de la muestra en la estimación de  $H$ .  $H$  mfb (generado con el método SE),  $H$  teórico 0.9.  
 - - - : 100%, +: 90%, ... : 80% y - - : 60%.

## 6.2 Registro de porosidad

La aplicación al registro de porosidad consiste en determinar el valor de  $H$  para 78 registros de una formación productora de petróleo ubicada en el piedemonte llanero colombiano. La información que se posee son los registros de densidad tomados en varios pozos. El registro de densidad presenta la medida de la densidad total de la roca, que incluye la matriz y los fluidos que se encuentran en los poros. El registro de densidad es convertido a un registro de porosidad mediante la siguiente relación:

$$\phi = \frac{\rho_m - \rho_b}{\rho_m - \rho_f} \quad (9)$$

donde  $\rho_m$  es la densidad de la matriz,  $\rho_f$  es la densidad del fluido y  $\rho_b$  es la densidad total que mide la herramienta.

Los análisis realizados con el periodograma y con el WOSA clasifican a todos los registros como mfb. Los valores estimados de  $H$  para las señales verticales de porosidad utilizando el WOSA abarcan todo el rango entre 0.2 y 1, con una moda de 0.6.

## 7 CONCLUSIONES

Para estimar el exponente de Hurst de ambos tipos de ruidos escalantes (rfG y mfb) el WOSA con ajuste tipo Hanning es el método más confiable.

Señales cortas tienen asociada una gran incertidumbre en el valor estimado de  $H$ , pues como se determinó en el experimento numérico, para que los estimados sean confiables el número de datos debe ser mayor de 1024.

La posibilidad real de tener horizontes productores de petróleo de gran espesor es muy poca pues en el mundo yacimientos con una cantidad de arena neta productora tan larga son más la excepción que la regla. Si se pensara en adquirir más datos utilizando tasas de muestreo mayores (3 ó 4 datos por pie) la limitante principal es la resolución vertical de las herramientas que generalmente está entre 0.5 y 1 pies.

A pesar de la limitación de contar con poco número de datos, las señales de Mirador pueden ser consideradas movimientos fraccionales Brownianos. Los valores estimados de  $H$  para la formación productora de petróleo utilizando el WOSA abarcan todo el rango entre 0 y 1, con una moda de 0.6.

No hay gran diferencia entre las onditas Morlet,

Paul 4, DOG2 y DOG 6 utilizadas con la TCO para estimar  $H$ . El análisis con la TCO es un suavizador del espectro, sin embargo debido a los efectos de borde en las altas escalas, no debe utilizarse todo el espectro promedio ondita para realizar estimaciones del coeficiente de Hurst. Si la señal es muy persistente el análisis con onditas es poco confiable.

### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a los ingenieros Rafael Guzmán y Alonso Ocampo, por su colaboración para conseguir los registros de porosidad y por sus valiosos aportes académicos. Además agradecemos a la British Petroleum (BP) por el soporte técnico-económico que nos brindó para realizar este trabajo..

### REFERENCIAS

- Barnsley, M., Devaney, R., Mandelbrot, B., Peitgen, H., Saupe, D., Voss, R., 1998. *The science of the fractal images*. Springer-Verlag, New York, 312 pp.
- Barton, C. and La Pointe, P. 1995. *Fractals in petroleum geology and earth processes*. Plenum press. New York and London, 317 pp.
- Barton, C. and La Pointe, P. 1995. *Fractals in the earth sciences*. Plenum press. New York and London. 265pp.
- Bassingthwaite, J., Liebovithc, L., West, B., 1994. *Fractal physiologic*. Oxford University Press, 364 pp.
- Crane, S. and Tubman, K., 1990. *Reservoir variability and modeling with fractals*. SPE 20606, pp 803-807.
- Davies, R., Harte, D., 1987, *Tests from Hurst effect*. Biometrika 74, No.1, pp 95-101.
- Feder, J., 1988. *Fractals*. Plenum Press. New York. 281 pp.
- Feynman, R., 1987. *Addison Wesley Iberoamericana*. Volumen I.
- Foufoula-Georgiou Kumar, P., 1997. *Wavelets in geophysical*. Academic Press. 372 pp.
- Hastings, H. and Sugihara, G., 1993. *Fractals: An user's guide for the natural sciences*. Oxford University Press. Oxford. 235 pp.
- Hewett, T., 1986. *Fractal distributions of reservoir heterogeneity and their influence on fluid transport*. SPE 15386 pp 1-16.
- Hewett, T. and Behrens, R., 1990. *Conditional simulation of reservoir heterogeneity with fractals*. SPE formation evaluation. September 1990. pp 217-224.
- Mandelbrot, B. and Van Ness, J., 1968. *Fractional brownian motions, fractional Gaussian noises and applications*. SIAM Rev. Appl. Math., Vol.10, No. 4, pp 422-437.
- Mandelbrot, B. and Wallis, J. R., 1969. Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part 1, Average and variances. Water Res. Res., Vol.5, No.1, pp 228-241.1969.
- Mandelbrot, B. and Wallis, J., 1969. *Computer experiments with fractional Gaussian noises*. Part 2. Rescaled ranges and spectra. Water Res. Res., Vol.5, No.1, pp 242-259, 1969b.
- Mandelbrot, B. and Wallis, J., 1969. *Some long-run properties of geophysical records*. Water Res. Res., Vol.5, No. 2, pp 321-340, 1969d.
- Mandelbrot, B., 1983. *The fractal geometry of nature*. Freeman and Co., New York.
- Mesa, O. and Poveda, G., 1993. *The Hurst effect: The scale of fluctuation approach*. Water Res. Res. Vol.29, No. 12, pp 3995-4002.
- Moltz, F. and Boman, G., 1993. *A fractal-based stochastic interpolation scheme in subsurface Hidrology*. Water Res. Res., Vol.29, No. 29, pp 3769-3774.
- Neuman, S., 1990. *Universal scaling of hydraulic conductivities and dispersivities in geologic media*. Water Res. Res., Vol.26, No 8, pp 1749-1758.
- Painter, S., 1996. *Evidence for non-Gaussian scaling behavior in heterogenous sedimentary formations*. Water Res. Res., Vol.32, No. 5, pp 1183-1195.
- Painter, S. and Paterson, 1996. *Stochastic interpolation of aquifer properties using fractional levy motion*. Water Res. Res., Vol.32, No. 5, pp 1323-1332.
- Peitgen, H. and Saupe D., 1988. *The science of fractal images*. Springer-Verlag. New York.
- Percival, D. and Walden, A., 1993. *Spectral analysis for physical applications. Multitaper and conventional univariate techniques*. Cambridge University Press. 583 pp.
- Percival, D., 1995. *An estimation of the wavelet variance*. Biometrika, 82, No. 3, pp 619-631.
- Percival, D. and Walden, A., 2000. Wavelet methods for time series analysis (Cambridge series in statistical and probabilistic mathematics). 600 pp.
- Torrence, C. and Compo, G., 1998. *A practical guide to wavelet analysis*. Bulletin of the american meteorological society; 79, pp 61-78.
- Woods, T. and Chan, G., 1994. *Simulation of stationary Gaussian processes in {0,1}*. Journal of computational and graphical statistics. Vol.3, No. 4. pp.409-432.