EL ÁNGULO PLANO COMO MAGNITUD FÍSICA FUNDAMENTAL

GABRIEL POVEDA

Escuela de Formación Avanzada, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín

Recibido para revisión 1 de Noviembre de 2000, aceptado 5 de Julio de 2001, versión final recibida 27 de Agosto de 2001

RESUMEN: Se presenta el concepto de Ángulo como magnitud física de igual importancia e independiente de los conceptos de Longitud, Tiempo, Masa, Carga Eléctrica, Temperatura y otros. Se indica el proceso de medición física de ángulos. Se señala la grave impropiedad de los libros usuales de Física que aseveran que el Ángulo es una magnitud física sin dimensiones. Se muestra cómo aplicar esta magnitud, con gran provecho, al estudio de algunos problemas importantes de la Mecánica Clásica, usando el Teorema *Pi* de Buckingham -Vaschy - Riabouchinski y el conocido método de Lord Rayleigh en Análisis Dimensional.

PALABRAS CLAVES: Dimensiones físicas, Geometría métrica, Medición física, Análisis dimensional, Teorema-*Pi*, Ángulos

ABSTRACT: This paper states that Angle is a fundamental physical magnitude as important as -and independent of- Lenght, Time, Mass, Electric Charge, Temperature and any other. It is pointed out that usual Physics textbooks incur in serious mistake as far they treat angles as non-dimensional physical variables. Some known problems in Classical Mechanics are used to show how to apply very profitably the physical magnitude Angle, using the well known *Pi* Theorem of Buckingham -Vaschy-, - Riabouchinski and the Rayleigh method in Dimensional Analysis.

KEYWORDS: Physical dimension, Metrical geometry, Physical meassurement, Dimensional analysis, *Pi*-Theorem, Angles

1 INTRODUCCIÓN

Este documento se escribe especialmente para jóvenes que estudian Física o Ingeniería en universidades de Colombia y otros países. A ellos ya hoy se les suele no enseñar qué son las magnitudes físicas fundamentales (que son por lo menos ocho: cardinalidad, longitud, masa, duración, ángulo plano, ángulo sólido, temperatura y carga eléctrica. Puede ocurrir, en el futuro, que se descubran otras nuevas). Y a los pocos que se les enseña, los libros de texto les indican que dizque ellas son sólo cuatro: longitud, masa, tiempo y carga eléctrica; y que el ángulo plano es una "magnitud sin dimensiones'', o peor aún, que es un cuociente entre longitudes; y que el ángulo sólido es "sin dimensiones", porque dizque es un cuociente entre áreas. Este artículo se propone establecer que algo tan inmensamente útil como los ángulos planos forman una de las magnitudes físicas fundamentales. En otro artículo se hablará de los ángulos sólidos, que forman otra de las magnitudes físicas fundamentales del mundo real.

La idea anterior la aprendió el autor hace muchos años de su maestro, el Profesor Carlo Federici Casa. El autor agrega de su propia cosecha la idea de que los ángulos pueden pensarse en un mundo estático o en un mundo cinemático, y señala una manera nueva y elemental de calcular la constante de Euclides $\left(E = 2\pi / 360^o\right)$, nombre que le dio el profesor Federici, cambiando un poco su definición y su valor. Agrega también tres ejemplos que muestran cómo resolver algunos problemas mecánicos, cuyo trabajo demuestra la grande utilidad de la magnitud Ángulo, y de nuestra constante de Euclides, con el valor que aquí le damos.

La comisión internacional de Pesos y Medidas, y su Sistema Internacional de Unidades, repiten el mismo error de que la magnitud Ángulo Plano es cero – dimensional; que es derivada de la magnitud Longitud y que por eso no necesita que se le asigne ninguna unidad fundamental en el sistema SI . Pero abrumado por la realidad, admite a regañadientes que se use el veterano grado sexagesimal de los babilonios como ''unidad auxiliar''. En este escrito adoptamos el concepto de Magnitud Física como lo definió el físico estadounidense Peter W. Bridgman en su libro clásico *Dimensional Analysis* y que ese autor enmarca dentro de su teoría operacionalista del conocimiento físico.

Al hablar del valor numérico de una medición angular, lo consideramos como definido en el cuerpo o campo algebraico de los números fraccionarios. Hay tres razones para hacerlo así: (1) que los solos números racionales nos permiten hacer cualquier medición con la precisión que se exija. (2) que toda medición humana adolece de imprecisiones; y (3) que todo número racional se escribe con un número finito de dígitos, pero no ocurre así con todo número real.

Hemos revisado mucho de la literatura clásica y reciente del Análisis Dimensional para escribir este artículo. Alguna de ella se cita en la bibliografía. En todas partes encontramos el mismo error u omisión que queremos corregir aquí, que es el de que el Ángulo es una magnitud física "sin dimensiones".

2 DEFINICIÓN DEL ÁNGULO PLANO ESTÁTICO (SINCRONICO)

2.1 Elementos de un ángulo

Un ángulo plano A en el mundo de lo real (no entramos aquí en el mundo "ideal" de Platón ni en el de Hilbert) es una de las dos porciones de un plano que quedan limitadas por dos semirrectas que parten de un mismo punto P (ver Figura 1). La porción así determinada se denomina el interior de A; y la otra porción, formada por el resto del plano, o sea A' se llama el exterior del ángulo. El punto P, que es el punto común de las dos rectas, se llama vértice del ángulo A. Las dos semirectas que parten de P se llaman lados de A. Ellas son también los lados de A'. Los denotaremos con las letras minúsculas "l" y "r". En adelante no diremos "ángulo plano" sino "ángulo" a secas.

Para simplificar el lenguaje, de aquí en adelante, al decir "el ángulo A" queremos decir "el interior del ángulo A" y viceversa. Cuando nos refiramos a A', le diremos el nombre completo de "el exterior de A". Si necesitamos ser más explícitos, señalaremos el interior de A con un arco entre sus dos lados, terminando en dos pequeñas flechas, como suelen hacerlo los dibujantes y los ingenieros.

En lo que sigue, y hasta nueva advertencia, nos referimos a ángulos estáticos, donde el vértice permanece quieto en el plano y ninguno de los dos lados rota alrededor del vértice; y cuyo interior no invade por completo el plano que lo soporta. Diremos que tratamos con ángulos propios y que son estáticos, y que son invariables en el tiempo.

El ángulo A puede ser tal que dos cualesquiera de los puntos en su interior como son Q_1 y Q_2 están unidos por un segmento del interior de A. En tal caso diremos que A es un ángulo convexo. Si se tratase de un ángulo B cuyo interior contiene pares de puntos unidos por un segmento que no pertenece todo a dicho ángulo B, diremos que B es un ángulo cóncavo. En la Figura 1, el ángulo A es convexo y el ángulo A' es cóncavo.

Siempre que trabajamos en el mundo real de los ingenieros, de los topógrafos y de los astrónomos, al hablar de un ángulo, se trata del ángulo propio que abarcan sus dos lados como interior, pero sin abrazar entre ellos todo el plano, salvo que se advierta algo diferente. A esos ángulos los llamamos "ángulos propios". Así se eliminan dudas y equívocos inconvenientes e innecesarios.

En el mundo real hay ángulos planos por todas partes: la esquina de una mesa; dos rayos de luz confocales; las dos diagonales de un cristal cúbico, que se cortan en el centro del cristal. Los encuentran en su trabajo diario los carpinteros, los dibujantes, los topógrafos, los mecánicos, los arquitectos, los astrónomos, los cristalógrafos, los físicos, los navegantes y muchos otros tipos de trabajadores del mundo de lo real.

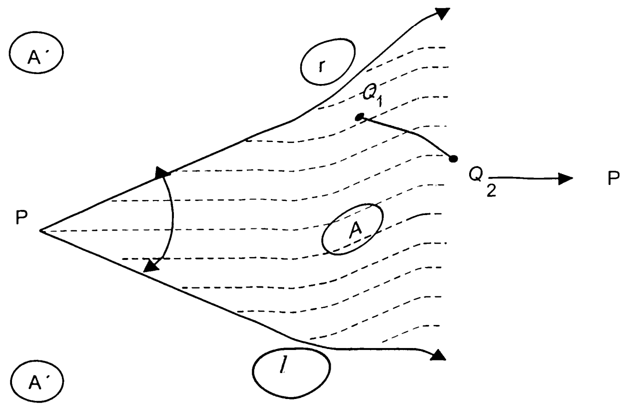

Figura 1. Ángulo Plano.

Cuando los dos lados de A coinciden en dirección y sentido diremos que A es el ángulo cero, y que su exterior A' es el ángulo pleno. También lo llamaremos "un ciclo" Cuando esos lados coinciden en dirección pero van en sentido contrario, lo llamaremos un "ángulo llano" o bien "semiplano". Al exterior del ángulo cero lo llamaremos "ángulo pleno" (es decir: interior del ángulo pleno), y abarca todo el plano donde está situado su vértice.

En el niño de cuatro o cinco años ya existe en su mente, la noción de Ángulo, que él descubre haciendo girar su cabeza y su vista, sin que todavía sepa usar una regla de medir ni ningún instrumento artificial. Ella es una noción y una magnitud *independiente de la Distancia o Longitud*.

Congruencia. Si se tienen dos ángulos A_1 y A_2 tales que, al poner en concidencia sus vértices respectivos, resultare posible poner en coincidencia el lado l_1 con l_2 y el lado r_1 con r_2, y superponiendo sus interiores, quizá mediante traslaciones paralelas y mediante rotaciones, diremos que A_1 es congruente con A_2 y escribiremos que

$$A_1 \, \theta \, A_2 \qquad (1)$$

(Usamos provisionalmente el signo "θ" para no caer en la peligrosa tentación de escribir " =" , ni " ≡" que se usan para tantos oficios tan distintos. Posteriormente caeremos en ella, por razones tipográficas y prácticas.)
De inmediato se comprueba que:

- Cada ángulo es congruente consigo mismo: $A\ \theta\ A$

  (Propiedad reflexiva de la congruencia)

- Si $A_1 \theta A_2$ entonces $A_2 \theta A_1$

  (Propiedad simétrica de la congruencia)

- Si $A_1 \theta A_2$, y también $A_2 \theta A_3$, entonces es $A_1 \theta A_3$

  (Propiedad transitiva de la congruencia)

En resumen la congruencia es una "relación de igualdad", o mejor aun la congruencia es una "relación equaliforme". Por eso escribiremos y diremos, en adelante que si A_1 y A_2 son congruentes: Entonces escribimos $A_1 = A_2$, por comodidad tipográfica.

Es un hecho de la experiencia universal de los carpinteros, los topógrafos, los ingenieros, los geodestas y todos los que trabajan en el mundo real, que todo ángulo puede dividirse materialmente por métodos muy simples con un simple compás (sin usar metros, ni distanciómetros) o con un simple cordel (sin graduaciones ni métrica ninguna), o con dos espejos planos y un foco de luz, en dos partes que son mutualmente congruentes. El método para hacerlo se encuentra en cualquier libro de texto de Geometría Métrica o de dibujo de Ingeniería. La recta *"p"* que pasa por *P* y que así divide a *A* se llama *"la bisectriz de A"*.

La bisectriz de un ángulo llano lo divide en dos partes congruentes entre ellas. A una de las dos la llamamos un "ángulo recto", o "cuadrante". El ángulo llano o el cuadrante podrían muy bien ser adoptados, alguno de los dos, como unidad de medida de todos los ángulos del mundo físico.

Dando un ángulo *A* determinado, la experiencia enseña que hay otros ángulos en el mundo que son congruentes con *A*, y otros que no lo son. A la clase de los ángulos que sean congruentes con *A* la llamamos "la amplitud de *A*" (Esta definición se inspira en la de Rusell y Whitehead según la cual el número cardinal de un conjunto *C* es la clase de todos los conjuntos que son coordinables con C). Escribimos entonces que si A_1, A_2 son congruentes, entonces sus amplitudes son iguales:

$$\text{amp } A_1 = \text{amp } A_2 \qquad (2)$$

Al investigar operacionalmente (Decimos "operacionalmente" en el sentido del eminente físico y termodinamicista estadounidense Peter W. Bridgeman), la eventual congruencia de un ángulo A_1 con otro A_2 , puede ocurrir que podamos poner en coincidencia el par de vértices (P_1, P_2) y uno de los dos pares de lados respectivos (r_1, r_2); y que pongamos el interior de A_1 dentro del interior de A_2 , pero no a l_1 en coincidencia con l_2 porque l_1 queda en el interior de A_2 (como se ve en la Figura 2). Decimos entonces que A_2 desborda a A_1 y escribimos que

$$A_2 \supset A_1 \qquad (3)$$

o bien, que

$$A_1 \subset A_2 \qquad (4)$$

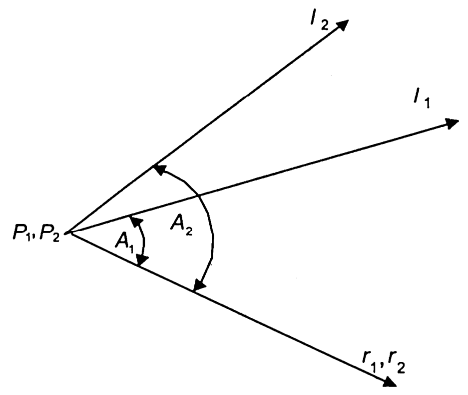

Figura 2. Ángulo A_1 y A_2.

De la definición anterior se sigue que entre dos ángulos cualesquiera, A_1 y A_2 , se cumple una y sola una de tres situaciones, a saber:

- O bien $A_1 = A_2$
- O bien $A_1 \supset A_2$
- O bien $A_2 \subset A_1$

Esto mismo es lo que queremos expresar cuando decimos que las amplitudes de dos ángulos son siempre comparables.

Lo anterior significa que la clase de los ángulos propios es una clase totalmente ordenada. Además todo ángulo plano, A_1 que sea propio, es $A \subset$ el ángulo pleno (=360°) por definición.

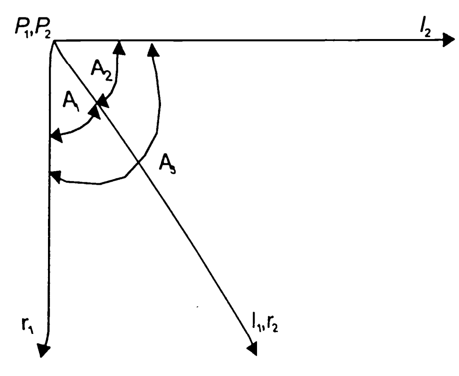

Figura 3. Suma de ángulos.

2.2 Suma de ángulos

Dado un ángulo A_1 con dos lados (r_1, l_1), su vértice (P_1) y su interior (int. A_1), pongamos en coincidencia sus vértices, y el lado l_1 de A_1 con el lado r_2 de A_2, de modo que la intersección "int." de sus interiores $A_1 \cap$ int. $A_2 = \phi$ "Fi" griega, mayúscula sea el conjunto vacío. Entonces al ángulo A_3 de lados r_1, l_2, con vértice en $P_1 = P_2$, y con interior dado por int. A_3 = int. $A_1 \cup$ int. A_2 lo llamamos la "suma de los dos ángulos A_1, A_2". Escribimos $A_3 = A_1 + A_2$ (Estamos abusando del signo "+" que se usa para hablar de tantas "sumas" de distinta naturaleza: de números, de vectores, de funciones, etc. Sólo lo hacemos por limitaciones tipográficas y prácticas), y podemos escribir sin equivoco, que

$$\begin{aligned} A_1 &\subset A_1 + A_2 \\ A_2 &\subset A_1 + A_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Decimos lo anterior cuando afirmamos que las amplitudes angulares son sumables o aditivas.

Para la suma de dos ángulos $(A_1 + A_2)$, valen las siguientes propiedades:

- Es clausurativa y unívoca: $A_1 + A_2$ es un ángulo unívocamente determinado
- El ángulo cero ϕ es el módulo (único) de esta suma:

$$A + \phi = A \tag{6}$$

- La operación es asociativa:

$$(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3) \tag{7}$$

Cuando $A_1 \supset A_2$, resulta natural preguntarse cual es el ángulo B que sumado a A_2 sea igual (por decir "congruente") con A_1. La construcción de la suma que ya describimos, permite al lector darse cuenta de inmediato cómo construir ese ángulo B, el cual indicaremos como $B =$ *ángulo* A_1 *"menos" ángulo* A_2 queriendo significar lo mismo que

$$A_2 + B = A_1 \tag{8}$$

Hemos mostrado que la clase de las medidas de los ángulos planos posee tres propiedades básicas: (1) admite una relación ecualiforme ("=") y una relación de orden ("⊂"); (2) admite una operación binaria de suma ("+"); y (3) a cada ángulo le corresponde un número racional positivo, que es de su medida. Estas son las tres propiedades que caracterizan a una magnitud física fundamental, como la define Bridgeman (ver libro clásico en la bibliografía).

Ángulo plano orientado. Todo ángulo A está en un plano que está a la vez determinado por los dos lados de aquél. Por lo tanto tiene dos caras: el haz H y el envés E, como en la hoja de una planta fanerógama. Miremos a A por el lado del haz, y pongámosle el orden de sus dos lados $\langle r, l \rangle$ de modo que para pasar de "r" a "l", barriendo el interior de A, hay que hacer rotar a r en sentido contrario a las manecillas del reloj (o sea en sentido anti-horario). Si damos vuelta al plano, y dicho plano es transparente, veremos que para ir de r a l, es necesario girar en sentido horario. Esta es la imagen especular de A y la llamamos "el ángulo contrario de A", y lo indicamos como "$\sim A$". Es claro que este es el inverso de A para la operación de suma:

$$A + (\sim A) = \phi \tag{9}$$

Es decir que si denotamos a A como $\langle r, l \rangle$ entonces denotaremos a $\sim A$ como $\langle l, r \rangle$.

De manera que si

$$A_1 = A_2 + B \tag{10}$$

entonces

$$B = A_1 + (\sim A_2) \tag{11}$$

Se puede establecer así un isomorfismo (en realidad pueden construirse infinitos "en el sentido de alef-sub cero" isomorfismos de este tipo) entre las amplitudes de los ángulos propios (no plenos) y los números racionales de manera que, dados dos o más ángulos $(A_1, A_2 \cdots)$ les hacemos corresponder sendos números racionales $(a_1, a_2, \cdots)$ de tal manera que

$$\begin{gathered} \{A\} \to \{a\} \\ A_1 = A_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \\ A_1 \supset A_2 \Leftrightarrow a_1 > a_2 \\ A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow a_1 < a_2 \\ A_1 + A_2 \Leftrightarrow a_1 + a_2 \\ \sim A_2 \Leftrightarrow -a \\ \phi \Leftrightarrow 0 \end{gathered} \tag{12}$$

salvo traslaciones paralelas o rotaciones rígidas de los ángulos.

2.3 La medida de ángulos

Unidades de medida de ángulos. Una unidad de medida para las amplitudes de ángulos se construye definiendo un procedimiento gráfico, mecánico, o de otro tipo físico, que sea preciso y reproducible, que conduzca a un ángulo U bien definido. En la historia de la humanidad se han usado numerosas unidades de medida de ángulos (diremos, por abreviar "medida de ángulos" para significar "medida de amplitudes de ángulos"), como por ejemplo:

- El ángulo recto o cuadrante, que se construye con una plomada y un nivel de agua, sin necesidad de reglas graduadas. Si hay que hablar de una unidad de medida de ángulos que sea la más natural, ésta es el cuadrante (que podemos denotar como *1 Q*). Los arpedonapas en Egipto lo sabían construir con una cuerda con 12 nudos equipolentes, más el "teorema" experimental de que $3^2 + 4^2 = 5^2$ hacen un triángulo rectángulo.

- El "grado sexagesimal", inventado por los astrónomos babilonios, hace más de 3500 años.

- El "grado centesimal", inventado por los astrónomos franceses que inventaron el metro, y el kilogramo en 1793, y que es la centésima parte de un cuadrante.

- El ángulo de inclinación del plano ecuatorial de la Tierra con el plano de la eclíptica equivalente a 23 y medio grados sexagesimales. Se lo podría llamar "un ptolomeo" porque aparece ya identificado y con esta medida en el Almagesto.

- El ángulo interior de un triángulo equilátero (o sea sesenta grados sexagesimales). Se le llama también 1 sextante.

- El ángulo entre dos visuales vecinas, desde un centro P_0, en el interior de un triángulo, y que resuelve el "problema de Steiner de tres puntos"; vale 120°. Se construye mecánica y experimentalmente con una mesa de Varignon, usando tres pesas iguales, y sin medir ninguna longitud. Se le debería llamar "un Steiner". Se le puede construir también con un compás y una regla, sin necesidad de medir ninguna longitud.

- La pendiente de una rampa que sube 1 unidad de altura por cada dos unidades de marcha en pendiente. Los ingenieros romanos que construyeron las famosas calzadas romanas lo llamaban "pendiente de un paso en altura por dos pasos de avance". Vale 30 grados sexagesimales, o medio sextante.

- La "milésima", inventada por los artilleros de Napoleón: es el ángulo entre dos direcciones horizontales del ánima de un mismo cañón, cuando el proyectil de una cae a un lado de la otra, a una distancia de 1 metro, y el alcance de ambos tiros es 1 kilómetro. Es igual a *2 arc tg (0.001/2)* y casi igual a *arc tg 0.0001* (que se usa más en artillería).

- El paralaje de la estrella α Centauri vista desde la Tierra. Mide 0.748 segundos sexagesimales.

- El "ciclo" o ángulo llano, que bien pudiera adoptarse como unidad de medida de todos los ángulos propios (y también de los "impropios").

- El radián introducido por los geómetras europeos del siglo XVII. Puede definirse como el ángulo que subtiende un arco filiforme y circular de acero que tenga igual masa que el radio del arco, hecho en ese mismo hilo de acero. Véase que no necesitamos medir ninguna longitud. Experimentalmente se encuentra que 1 radian = 57° 17'44.8 = 57.29578°.

Hay numerosos procedimientos técnicos para construir todos los múltiplos de $U(2U, 3U, \cdots pU, \cdots)$ y todos los submúltiplos $(U/2, U/3, U/q, \cdots)$, (Es obvio que $p \cdot U = U + U + \cdots + U$, tomado p veces a U: y que U/q es el ángulo V tal que $U = q \cdot V$. Queda claro así que significa $(p/q) \cdot U$ siendo "p" y "q" números enteros). Esos procedimientos permiten construir los ángulos de la forma $(p/q) \cdot U$. Para no extendernos sin necesidad, basta recordar que el ángulo $U/2$ se construye trazando la bisectriz de U, usando solamente un compás sin graduaciones, o colocando un foco de luz entre dos espejos. Un ángulo del mundo real se puede dividir en 3 ángulos iguales, con altísima precisión, usando procedimientos mecánicos, eléctricos o fotométricos. El problema euclidiano de la trisección del ángulo no existe para un ingeniero, ni para un físico, dotados de instrumentos de campo o de laboratorio.

Medir un ángulo A con la unidad U es comparar experimentalmente a A con las fracciones $(p/q) \cdot U$ hasta encontrar una sola de éstas que sea congruente con A, con la exactitud que se exija y dentro de lo que la tecnología experimental permita.

Escribimos así:

$$A = (p/q) \cdot U \text{ (como igualdad entre ángulos)}$$

o también

amp A= (p/q) . amp U (como igualdad entre sus medidas)

Es apenas obvio que si $A_1 = r_1 \cdot U$ y si también $A_2 = r_2 \cdot U$, entonces:

Si $A_1 = A_2$, necesariamente es $r_1 = r_2$

Si $A_1 \supset A_2$, necesariamente es $r_1 > r_2$

Si $A_1 \subset A_2$, necesariamente es $r_1 < r_2$

Nótese que otra vez hemos abandonado el signo "θ" para indicar la congruencia entre ángulos, y estamos adaptando el signo "=" también para ese fin, como se hace con las medidas de otras magnitudes físicas. Por ejemplo, como cuando ponemos "masa de una partícula = 650 gramos", así mismo ponemos: "amplitud de un ángulo = 30 grados sexagesimales", usando en ambos casos el mismo signo "=" de igualdad.

Es un hecho de experiencia universal que, dado un ángulo A cualquiera, y una unidad U cualquiera de medida angular, existe un número racional (p/q) tal que

$A = (p/q) \cdot U$, dentro de la exactitud o "resolución" que la técnica a su alcance le permita al experimentador. Es lo que se puede denominar "el principio de mensurabilidad del mundo físico", aplicado a los ángulos del mundo real.

De esta manera es como escribimos:

1 ángulo recto (o bien 1 cuadrante) = 90° =
(3/2) x 1 sextante + (3/4) x 1 Steiner

1 ángulo plano = 2 ángulos rectos (2 Q)

1 hora de rotación terrestre = 15 grados sexagesimales

1 ángulo pleno (ó 1 ciclo) = 360° = 2 π radianes

1 milésima de artillería = arct tg. 0.001 = (1/6400) de giro completo

Paralaje de α del Centauro = 0.748" sexagesimales

De hecho, es posible formar una tabla de equivalencias entre numerosas unidades de medida de ángulos sin recurrir a ninguna unidad de medida de longitud, ni de masa, ni de tiempo. Eso demuestra que el Ángulo es una unidad física fundamental, y que no es una "magnitud sin dimensiones" ni una "magnitud derivada" como dice sin acierto el Sistema Internacional de Medidas SI.

Nótese que varias unidades de éstas se pueden construir físicamente, con la exactitud que sea necesaria, sin necesidad de hacer ninguna medición de longitud, usando reglas sin graduar y compases sin graduar. Es el caso de "1 cuadrante" o de "1 sextante" (1/6 del ángulo pleno o sea 60°), y, por supuesto, del paralaje de α - Centauri.

La medida $r \cdot U$ de un ángulo A, $A = r \cdot U$ se puede obtener experimentalmente mediante la siguiente sucesión iterativa, de operaciones:

a. Comparar A y U . Tres resultados son posibles
a.1 Si $A = U$ entonces $r = 1$. Problema resuelto
a.2 Si $A \supset U$ entonces la parte entera de r ($[r]$) es un número natural N positivo.
a.3 Si $A \subset U$, entonces $r < 1$ y $[r] = 0$
b. Sumando U consigo mismo, determino el valor de N
c. Si $N \cdot U = A$, entonces $r = N$. Problema resuelto
d. Si $N \cdot U \subset A$, aun cuando $(N+1) \cdot U \supset A$, entonces construyo $A - N \cdot U$ (que es $\subset U$) y escribo que $[r] = N$

Los pasos descritos hasta a.3 nos conducen a medir un ángulo (sea A en el caso a.3, sea $A - N \cdot U$ en el caso d) que es menor que U . Entonces:

e. Construyo la mitad de U trazando su bisectriz: $(1/2) \cdot U$. Y mediante bisectrices sucesivas construyo $(1/4) \cdot U, (1/8) \cdot U, \cdots, (2^{-k}) \cdot U, (2^{-k-1}) \cdot U, \cdots$
f. Comparo el ángulo-residuo del anterior A_1 y encuentro cuántas veces cabe $(1/2) \cdot U$ dentro de él. Que sean k_1 , dejando un ángulo-residuo $A_2 > 0$. Siendo $A_2 = 0$ el problema queda resuelto.
g. Comparo el ángulo residuo A_2 con U , etc.

El procedimiento termina cuando se obtiene un ángulo-residuo que los instrumentos y los procedimientos no logran distinguir del ángulo nulo ϕ. En ese momento puedo escribir que:

$$A = \left(N + k_1/2 + k_2/4 + \cdots k_m/2^m\right) \cdot U \qquad (13)$$

y en la vida práctica, finalmente cambio de base binaria (2^{-m}) a base decimal (10^{-m}) mediante los procedimientos aritméticos que son bien conocidos. Ya en escritura decimal se expresa:

$$r = N \cdot h_1 h_2 h_3 \cdots h_j \text{ (en base decimal)}$$

$$A = r \cdot U \qquad (14)$$

Nótese los siguientes hechos:

- Todo ángulo A es medible con cualquier ángulo-unidad U que no sea nulo, y se podrá escribir $A = r \cdot U$, siendo r un número natural.

- El ángulo nulo ϕ , es siempre $\phi = 0 \cdot U$ con cualquier ángulo unidad U .

- Si A_1 y A_2 son dos ángulos propios cualesquiera no congruentes, y si $A_1 \supset A_2$, entonces y sólo entonces $r_1 > r_2$.

- Si A_1 es ángulo orientado en sentido contrario de otro ángulo A_2 , si $A_1 = r_1 \cdot U$, sí $A_2 = r_2 \cdot U$, entonces r_1 r_2 es negativo.

- La clase de los "r" que corresponde a todos los ángulos propios e impropios, medibles en un plano es la misma clase Q de los números racionales, sin importar cual es la unidad de medida U que se haya escogido.

- El "producto $r \cdot U$ "entre el ángulo racional "r" y el ángulo-unidad "U " (que no es ningún número, sino un ángulo del mundo real) es un "producto operacional" como lo define Bridgeman en su libro clásico *Dimensional Analysis* (ver bibliografía)

De lo ya dicho hay que destacar varios hechos:

- Carece de sentido decir que "A mide r" sin especificar el ángulo Unidad U con que se mide.

- La definición de lo que es la medida de la "amplitud de un ángulo" no requiere para nada entender ni medir lo que es la “distancia entre dos puntos” ni referirse a ésta noción. Tampoco depende para nada de la noción de segmentos de recta (que sean medibles).

- La medida de un ángulo está formada estrictamente por el producto operacional de un número racional y un “ángulo-unidad”. No envuelve para nada ninguna “distancia entre puntos” ni ningún segmento de recta.

- La operación de medida de un ángulo y su resultado $(r \cdot U)$ no dependen de la métrica con que definamos y midamos la noción de distancia. La medida de un ángulo se refiere a un determinado ángulo, elegido a voluntad, y por conveniencias prácticas, al que llamamos “ángulo-unidad”.

El “radián” es un ángulo-unidad, ni mejor ni peor que otros varios. Tiene comodidades técnicas pero tiene otras incomodidades. Esta unidad no es ni única ni indispensable, y a veces es incómoda e inútil. Así ocurre en áreas científicas y técnicas como la refractometría, la polariscopía, la astronomía de posición, la geodesia, la topografía y la cartografía. Obsérvese que un radián podría ser definido como el ángulo en el centro que está subtendido por un arco circular de alambre de cobre que tenga la misma resistencia eléctrica en ohmios que un trozo de ese alambre que sea igual en longitud al radio del círculo. Pero lo que no es lícito decir es que “un ángulo es un cuociente entre resistencias óhmicas”. Como tampoco lo es decir que “un ángulo es un cuociente entre longitudes”.

- Los arpedonaptas egipcios, los astrónomos babilonios, los navegantes de siempre, los topógrafos y los ingenieros han usado, medido y operado la aritmética de los ángulos desde hace siglos, sin necesidad de disponer de unidades de medida o de fórmulas para definir o calcular distancias.

- Desde el principio de la civilización el hombre ha usado aparatos para medir ángulos, que no requieren cintas métricas ni cordeles graduados para operar. Son, por ejemplo: compases, transportadores, brújulas, cuerdas tensas o laxas sin graduación, líneas de vista, posiciones de estrellas, el tamaño aparente del sol, astrolabios, espejos, cuadrantes, sextantes, radiogoniómetros, esferas armilares, telescopios, dioptras de los romanos, gromas en el siglo XV, “bastoncillos de navegante” en la Edad Media y otros más.

Resulta entonces conceptualmente erróneo decir que “la medida de un ángulo A es el cuociente de la longitud del arco que subtiende en el centro de la circunstancia, dividida por la del radio de la circunferencia”. Ese cuociente no es la medida del ángulo. Es solamente el número racional “p/q” que acompaña al factor “1 radián” en la medida “ $A=(p/q)$ radianes”. Es decir: “p/q” no es la medida de A, sino el cuociente “ $A \div 1$ radián”. Es incorrecto escribir “ $A=(p/q)$ ” cuando lo que se quiere decir estrictamente es “ $A=(p/q)$ radianes”.

Por lo anterior resulta equivocado decir que “un ángulo no tiene dimensiones físicas”. Si que la tiene: es la dimensión física “Ángulo”, que es tan autónoma, tan útil y tan importante como la dimensión física “Masa” o la de “Tiempo”, o la de “Carga Eléctrica”. Lo que no tiene dimensión física es el número “p/q”. Pero este número no es la medida de A sino uno de los dos factores que dan de manera apropiada la medida de A : “p/q” y “radián”, por ejemplo, (que multiplica operacionalmente a “p/q” en el sentido en que “gramo” multiplica operacionalmente al número “650” cuando decimos “masa = 650 gramos”.

La clase de todas las medidas de amplitudes de ángulos es por definición, la magnitud física “Angulo *(A)*”. De la misma manera en que, por ejemplo, la clase de todas las medidas de longitudes es, por definición, la otra magnitud física “Longitud *(L)*”. Así se confirma una vez más que “Ángulo” es una magnitud física tan autónoma y tan fundamental como “Masa”, como “Longitud”, como “Carga Eléctrica”, o como otra de las demás que reconocemos como tales en el mundo físico.

2.4 La magnitud física fundamental

Es pues equivocado escribir que la magnitud física “Ángulo plano” *(A)* es la magnitud cero-dimensional

$$A = L^o M^o T^o Q^o G^o \tag{15}$$

refiriéndose a las otras magnitudes físicas fundamentales:

L = Longitud
M = Masa
T = Duración (o Tiempo)
Q = Carga eléctrica
G = Temperatura (aunque algunos físicos le niegan su carácter de magnitud física fundamental)

Lo que hay que escribir, a propósito de esto, es que:

$$A = N^0 A^1 \Omega^0 L^0 M^0 T^0 E^0 G^0 \tag{16}$$

en donde A es una magnitud física autónoma (con exponente “uno”, a la derecha) y en donde

N = Número cardinal (a veces llamado Nuja).
Ω = Ángulo sólido (que es otra magnitud física fundamental que los libros de Física y de Análisis Dimensional ni siquiera mencionan).

2.5 La constante universal de Euclides

Cuando estamos frente a una circunferencia de Radio R, y tenemos un ángulo central A que subtiende un arco con longitud L, es incorrecto escribir:

$$"L = A \cdot R" \tag{17}$$

Lo que debemos escribir es:

$$L = E \cdot A \cdot R \tag{18}$$

en donde E es una constante universal que podemos calcular fácilmente si aplicamos esta fórmula a la circunferencia completa:

$$2\pi R = E\cdot(2 \text{ ángulos planos})\cdot R = E\cdot(1 \text{ ciclo})\cdot R = E\cdot(360^\circ)\cdot R$$

y por lo tanto

$E = \pi(1$ ángulo plano$)$ = $(\pi/180)/$ (grado sexagesimal) $= 2\pi/(1\text{giro}) = 2\pi/(360^o) =$ 3.141592653589793238.../180) $\div$ (1 grado sexagesimal) = $1.745329252\text{x}10^{-2}$ (grado sexagesimal)$^{-1}$

y también

$$E = 1(\text{radián})^{-1}$$

Esta constante fue señalada desde 1955 (que aquí sepamos) por nuestro maestro, el Profesor Carlos Federici Casa, en la Universidad Nacional sede de Bogotá, (con un valor un poco distinto) pero hasta hoy no la han introducido a los libros de texto de Física que son usados en universidades colombianas.

Él le dio el nombre de "constante de Euclides" (En realidad el Profesor Federici la expresaba como "2π/radián". Creemos que nuestra expresión "2π/ciclo" es más apropiada por la forma de obtenerla y por otras razones). Está incorporada tan estrecha y misteriosamente al diseño del Universo como lo está la carga eléctrica del electrón:

$$e = 1.60217733(49)\cdot 10^{-19} \text{ coulomb}$$

Lo que hay que escribir, en lugar de la "igualdad" incorrecta, es la igualdad correcta

$$L = E\cdot R\cdot A = R\cdot A/(1 \text{ radián}) \quad (19)$$

porque $E = 1$ radián^{-1}. El "radián" fue inventado ad-hoc pero sin mucha claridad para darle a E una escritura sencilla. No es que sea una "medida natural de los ángulos". No es ni más ni menos "natural" que el grado sexagesimal, o que la "milésima" de los artilleros, o que el grado centesimal.

Durante muchos siglos los hombres han medido y usado ángulos. Existe pues una ciencia autónoma e independiente de otras ciencias físicas, que es la del conocimiento, el trazado, la medición y el cálculo con ángulos planos. Esta ciencia se llama la "goniometría plana". Esta ciencia usa plomadas, niveles, transportadores, brújulas, teodolitos, cuadrantes, sextantes, octantes, gromas, radiogoniómetros, dioptras romanas, telescopios ópticos, radio-telescopios, refractómetros, tornillos micrométricos angulares, rayos de luz, espejos, etc. Y cuando esto ocurre, puede hablarse también, alternativamente, de mediciones de masas, o de áreas, o de cargas eléctricas, etc. Sin que ello signifique que la dimensión física Ángulo sea forzosamente reductible a ninguna otra de esas magnitudes.

Es pues inexacto escribir, al referirse a un ángulo x, que:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad (20)$$

como lo hacen todos los centenares de textos de cálculo que vemos en Colombia (y quizá en el mundo). Lo que hay que escribir es

$$\text{sen } x = \frac{x}{1 \text{ radian}} - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{radian^3} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{radian^5} - \cdots \quad (21)$$

o lo que es mucho mejor

$$\text{sen } x = Ex - \frac{E^3x^3}{3!} + \frac{E^5x^5}{5!} \quad (22)$$

Tampoco es exacto escribir (y que nos perdone Euler), que:

$$e^{ix} = \cos x + 1\cdot \text{sen } x \quad \left(con\ i = \sqrt{-1}\right)$$

debe escribirse

$$e^{iEx} = \cos x + i\cdot \text{sen } x \quad (23)$$

porque $E\cdot x$ es un número sin dimensiones $\left(A^oL^oM^oT^oQ^o\cdots\right)$, mientras que x es una magnitud angular, perteneciente a la dimensión Ángulo Plano $\left(A^1L^oM^oT^o\cdots = A\right)$, y el exponente del número e de Euler y Nopier debe ser cero-dimensional.

Cuando vemos un volante cilíndrico de radio R que gira con velocidad angular ω (omega) y que acelera con aceleración angular α, debemos escribir que la velocidad tangencial de un punto en superficie es

$$v = E\cdot\omega\cdot R \quad (24)$$

y que su aceleración tangencial es

$$a_t = E\cdot\alpha\cdot R \quad (25)$$

mientras que su aceleración centrípeta o radial es

$$a_R = E^2\omega^2 R \quad (26)$$

Su energía será $K = (1/2)J\,E^2\omega^2$ donde J es el momento de inercia del volante.

Este autor conoce decenas y decenas de buenos libros de Física, y de Mecánica, elemental o avanzada, que se equivocan de buena fé escribiendo

$$\text{“}v = \omega\cdot R\text{”}$$
$$\text{“}a_t = \alpha\cdot R\text{”}$$
$$\text{“}a_R = \omega^2 R\text{”}$$
$$\text{“}K = (1/2)I\,\omega^2\text{”} \quad (27)$$

debido a que todos parten del error de que "el ángulo es una magnitud física sin dimensiones" o del error de que "la medida de un ángulo es un cuociente de longitudes".

Además, la velocidad areal del círculo que forma la base del cilindro es

$$S = (1/2)E\cdot\omega\cdot R^2 \qquad (28)$$

y no

$$\text{“}\, S = (1/2)\omega R^2 \,\text{”} \qquad (29)$$

porque el área de un sector circular en el espacio de los ingenieros y de los físicos es

$$(1/2)E\cdot A\cdot R^2$$

y no es

$$\text{“}\,(1/2)A\cdot R^2\,\text{”}$$

como dicen los textos de física y de geometría métrica.

A propósito de este volante: Los libros de Física escriben que la frecuencia de rotación es f y que se relaciona con ω por la fórmula

$$\omega = 2\pi f \qquad (32)$$

de lo cual les resulta de manera errónea que la dimensión de la variable "frecuencia" es el inverso de la magnitud "Tiempo":

$$[f] = T^{-1} \qquad (33)$$

Usted como ingeniero o físico puede medir "números de rotaciones" y sumarlos y restarlos; y puede medirlos en "unidades enteras" o en "docenas" o en "millardos" o en otra unidad que se desee, y que sea útil para medir cardinalidades, las cuales forman una magnitud física fundamental que escribimos como N y llamamos "Nuja". Las dimensiones correctas de una frecuencia son

$$[f] = NT^{-1} \qquad (34)$$

Por lo tanto, la manera correcta como debe escribirse la relación entre ω y f es

$$\omega = f/(E\cdot N) \qquad (35)$$

Esta fórmula si es dimensionalmente homogénea porque

$$[\omega] = AT^{-1};\ [E] = A^{-1};[f] = NT^{-1};[N] = N \qquad (36)$$

Una espira de conductor (como cobre, aluminio, o plata) que tenga forma circular, pero que no es completa, y que por eso sólo abarca un ángulo A menor de 360°, crea en su centro un campo magnético cuya inducción magnética se debe escribir como

$$B = \frac{\mu_o I A E}{4\pi R} \qquad (37)$$

en donde I es la intensidad de la corriente, E es la constante de Euclides, y μ_o es la permeabilidad del vacío (si no hay materiales magnéticos dentro de la espira).

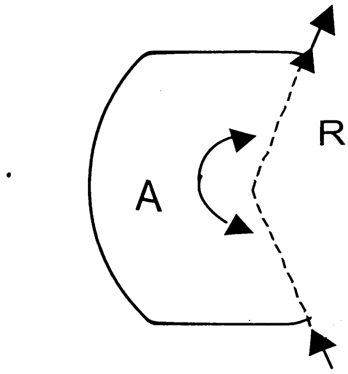

Figura 4

Los libros más avanzados de Física escriben que el campo en el centro de dicho arco de espira vale

$$B = \frac{\mu_o I A}{4\pi R} \qquad (38)$$

pero advierten que "previamente hay que reducir el ángulo A a radianes". (Véase por ejemplo el gran libro clásico de Electricidad y Magnetismo de Harnwell, citado en la bibliografía, en su página 313).

Si fuera necesario especificar en cada fórmula, para cada variable física, qué unidad de medida debe tener (una sola entre las infinitas que le son posibles), habría que re-escribir todos los libros de Física, y no existiría el concepto de magnitud física ni el de sus dimensiones.

La fórmula correcta es la de la ecuación 37. En efecto, cuando se trata de una espira completa, se tiene A = 360° y $E = \pi/180^o$, y resulta (sin tener que hablar de radianes):

$$B = \frac{\mu_o I}{2R} \qquad (39) \qquad \text{(Ley de Biot-Savart)}$$

que es lo correcto. Si la ecuación 38, que es la de los libros usuales, fuera la correcta obtendríamos el resultado

$$\text{“}\, B = \frac{\mu_o I \times 360^o}{4\pi R} \,\text{”} \qquad (40)$$

que es evidentemente absurda. Salvo que antes expresáramos a A en radianes (y no en grados); a I en amperios (y no en stat-amperios); y a R en metros (y no en pulgadas, por ejemplo), todo lo cual sería un galimatías.

2.6 El ángulo y el Teorema Pi

El péndulo galileano. Se trata de calcular el período de oscilación τ de un péndulo de longitud l, con masa w y en un lugar geográfico donde la aceleración de la gravedad es g. Los textos usuales de Física y de Análisis Dimensional lo "resuelven" impropiamente. Parten de tres supuestos gratuitos:

- Que el período no depende de la amplitud máxima (α) de las oscilaciones, lo cual es erróneo, frente a la realidad experimental.

- Que no existe la magnitud física fundamental Ángulo Plano (A) sino que las únicas dimensiones fundamentales pertinentes son en este fenómeno la Longitud (L) y el Tiempo (T). Esto no es correcto.

- Que la masa m no influye en la solución. Esto es correcto, pero los libros usuales no lo demuestran.

El problema se debe tratar como sigue. El Teorema Pi asegura que la relación que buscamos tiene la forma de

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \cdots) = 0 \tag{41}$$

y que cada argumento π es un producto cero-dimensional de algunas de las variables τ, l, m, g y de la constante universal E. Como norma metodológica involucraremos la constante universal E en este problema y en todos los que se refieran a configuraciones angulares o a movimientos cíclicos, de la misma manera que hay qùe incorporar la carga eléctrica del electrón (e) al análisis dimensional de problemas referentes a la teoría electrónica de la materia; o involucrar la constante universal de Boltzmann ($k=R/N$) al análisis dimensional de problemas de la mecánica estadística y de la termodinámica microscópica.

Nótese que las dimensiones de la frecuencia de oscilación $f = 1/\tau$ son

$$[f] = A T^{-1}$$

porque la oscilación pendular es un movimiento cíclico y angular. Por lo tanto

$$[\tau] = T A^{-1}$$

Es impropio escribir $[\tau] = T$, como hacen los físicos y sus textos.

Por otra parte:

$$[l] = L \qquad [g] = L T^{-2}$$

$$[\alpha] = A \qquad [E] = A^{-1} \tag{42}$$

así que cada π se escribe

$$\pi = \tau^m l^n g^p \alpha^q E^r w^s \tag{43}$$

siendo

$$[\pi] = A^o L^o M^o T^o \tag{44}$$

Aplicando el método algebraico usual, debido a Lord Rayleigh, encontramos que

$$p = m/2; \quad n = -m/2; \quad r = q - m; \quad s = 0$$

Resultan así los productos cero-dimensionales básicos:

$$\pi_{-1} = \tau l^{-1/2} g^{1/2} E^{-1} \quad ; \quad \pi_2 = \alpha E \quad ; \quad \pi_3 = w^0$$

y la solución general es:

$$\pi_1 = k \cdot \psi(\pi_2) \tag{45}$$

donde k es una constante específica y sin dimensiones, y Ψ es una función específica. El análisis dimensional no dá explícitamente ni a k ni a Ψ como es bien sabido.

Nuestra solución es, pues

$$\tau = k \cdot E\sqrt{l/g} \cdot \psi(a E) \tag{46}$$

y sustituyendo a E por su valor en números y en unidades:

$$\tau = k \cdot 2\pi (ciclo)^{-1} \cdot \sqrt{l/g} \cdot F(\alpha) \qquad \text{donde} \qquad F(\alpha) = \psi(a E)$$

y las unidades de τ resultan en unidades de tiempo por cada ciclo, que es lo adecuado. Una elemental comprobación experimental hace ver que $\lim_{\alpha \to 0} F(\alpha) = 1$

La solución dimensional convencional es la bien conocida fórmula

$$\tau = k \cdot 2\pi\sqrt{l/g} \tag{47}$$

que es dimensionalmente inapropiada y matemáticamente inexacta. La Mecánica avanzada permite deducir que, en nuestra solución, los factores que quedan por definir, k y F, son

$k = 1$ (número sin dimensiones físicas),

$$F(\alpha) = 1 + (1/4)\,\mathrm{sen}^2\,(\alpha/2) + (9/6)\,\mathrm{sen}^4\,(\alpha/2) + \cdots$$

y la constante E queda incorporada a los valores de los ángulos

Este ejercicio pone de presente varios hechos:

- Que en el mundo de la mecánica no basta con las tres magnitudes fundamentales M, L, T, que es la idea equivocada que admiten tácitamente o expresamente todos los libros de Física que tratan estos temas.

- Que en problemas que se refieren a rotaciones y movimientos periódicos es necesario y útil incorporar la magnitud fundamental A en su análisis dimensional.

- Que al hacerlo así, se encuentra un resultado del Teorema Pi que es más completo y más conforme con la realidad que al ignorar a A como lo hacen los textos usuales de la materia. Esto se debe a que la base completa de las dimensiones fundamentales es

$$\{N, L, M, T, A, \Omega, Q, G\}$$

(donde Q es aquí la dimensión Carga Eléctrica y G es la dimensión Temperatura), y tiene más dimensiones como espacio vectorial que las bases incompletas que usan los textos usuales de Física cuando aplican el Teorema Pi.

- Que incorporando la magnitud fundamental A y la constante universal E, el análisis dimensional produce automáticamente el número 2π que aparece en las fórmulas sobre movimientos angulares y sobre fenómenos periódicos, número que no se puede encontrar por medio de dicho análisis cuando se acepta (erróneamente) que los ángulos físicos "son magnitudes sin dimensiones".

Nicolo Tartaglia y Galileo Galilei estudiaron el problema balístico del proyectil que dispara un cañón, ignorando la resistencia del aire. El alcance horizontal del tiro es R cuando la inclinación del ánima del cañón es α, la aceleración local de la gravedad es g, la masa del proyectil es m, y la velocidad del proyectil en la boca del cañón es v. El análisis dimensional tradicional ignora a α (lo que es erróneo) y a m (lo que es gratuito).

Aquí las dimensiones físicas son:

$$[R] = L \qquad [m] = M$$

$$[v] = LT^{-1} \qquad [g] = L\,T^{-2}$$

$$[\alpha] = A \qquad [E] = A^{-1}$$

y los productos cero-dimensionales resultan ser:

$$\pi_1 = Rv^{-2}g \quad ; \quad \pi_2 = \alpha E \quad ; \quad \pi_3 = m^0$$

Por lo tanto

$$R = k \cdot \left(v^2/g\right)\psi(\alpha E) \qquad \text{o sea} \qquad R = \left(v^2/g\right)\cdot F(\alpha)$$

siendo k una constante numérica que aún no está determinada. Los experimentos balísticos de los artilleros muestran que

$$F(0) = 0$$

$$F'\left(45^o\right) = 0 \ \ (R \text{ es máxima con } \alpha = 45^o)$$

$$F\left(90^o\right) = 0$$

El análisis dimensional clásico no muestra que existe la función Ψ, porque parte de la hipótesis errónea de que α es una magnitud "sin dimensiones"

La mecánica clásica da el resultado

$$R = \left(v^2/g\right)\cdot \operatorname{sen} 2\alpha \qquad (48)$$

Nuestro resultado está más cerca de esto que el de los libros usuales de Física. Estos últimos desconocen la magnitud física fundamental Ángulo (A) y por eso no pueden resolver correctamente este sencillo pero importante problema.

Es bien conocido el problema del péndulo cónico. Un hilo está atado a un punto fijo 0 en el ámbito del laboratorio. No hay resistencia del aire. Al otro extremo está atada una masa W. El hilo rota en el espacio, alrededor de un eje vertical imaginario que pasa por el punto fijo, describiendo la superficie de un cono circular. El ángulo entre el hilo y la vertical es α en todo momento. La experiencia muestra que las variables relevantes son:

W :La masa de la lenteja pesada del péndulo
ω :La velocidad angular de rotación del péndulo alrededor del eje vertical
l :La longitud de la cuerda que soporta la lenteja
G :La aceleración de la gravedad en el laboratorio
α :El ángulo ya descrito
E :La constante de Euclides, inherentemente ligada a todo fenómeno de rotación

Las magnitudes físicas fundamentales son:

M: Masa
L : Longitud, orientada en la dirección vertical de 0 hacia abajo
T : Duración (Tiempo)
A : Ángulo (que los libros de física y los profesores no reconocen)

Las dimensiones físicas son:

$$[W] = M$$
$$[\omega] = AT^{-1}$$
$$[l] = L \cdot \sec\alpha$$
$$[g] = LT^{-2}$$
$$[\alpha] = A$$
$$[E] = A^{-1}$$

Los monomios cero-dimensionales son:

$$\pi = A^o L^o M^o T^o = W^w \omega^m l^n g^p \alpha^q E^r = M^w A^{m+q-r} L^{n+p} T^{-m-2p}$$

de donde se tiene que

$$w = 0$$

$$m + q - r = 0$$

$$n + p = 0$$

$$m + 2p = 0 \qquad (49)$$

En consecuencia

$$w = 0 \qquad n=m/2 \qquad p = m/2 \qquad r = m + q$$

La rotación del péndulo no depende de W en su velocidad angular, porque el exponente w es nulo.

Resultan así dos monomios cero-dimensionales no triviales, que son

$$\pi_1 = \omega l^{1/2} g^{-1/2} E \cdot \sec\alpha^{1/2} \quad ; \quad \pi_2 = \alpha E \tag{50}$$

Según el Teorema Pi, y despejando a ω :

$$\omega = \left(\sqrt{g/l}\,/E\right) \cdot \sqrt{\sec\alpha} \cdot \psi(\alpha E) \tag{51}$$

El período es la duración para recorrer un ciclo. Por tanto

$$\tau = (1 \cdot ciclo) \div \omega = 2\pi\sqrt{l/g} \cdot \sqrt{\cos\alpha} \cdot F(\alpha) \tag{52}$$

donde $F(\alpha) = 1/\psi(aE)$. Despejando $F(\alpha)$, tenemos

$$F(\alpha) = \frac{\sqrt{g/l}}{E \cdot \omega \cdot \sqrt{\cos\alpha}} = \frac{\tau}{E \cdot (1 ciclo)\sqrt{\cos\alpha}} = \frac{\tau}{2\pi\sqrt{\cos\alpha}}$$

Midiendo experimentalmente y con precisión ϖ, τ y α, para varias velocidades angulares de rotación, se encuentra sin mucho trabajo que

$$F(\alpha) = 1$$

Así, usando solamente el Análisis Dimensional y un poco de experimentación se llega a la fórmula que da la Mecánica Clásica usando sus propios métodos y el Teorema de Huygens sobre la fuerza centrífuga:

$$\tau = 2\pi\sqrt{l/g} \cdot \sqrt{\cos\alpha} \tag{53}$$

Nótese que:

– Los libros de Física ignoran la dimensión A y por eso, si tratan de obtener la fórmula anterior, les resulta la expresión muy incompleta (prácticamente inútil o errónea):

$$\tau = k\sqrt{l/g}$$

siendo k una constante cero-dimensional no cuantificada.

– Con nuestro método aparece de manera natural el factor 2π que necesita la fórmula del período.

En todo lo anterior estamos considerando, en principio, que los ángulos pueden ser, en la medida de su amplitud, de todos los valores desde cero hasta infinito ($\phi \subset A \subset$ cualquier otro ángulo, por "grande" que los prescribamos). En el trabajo técnico o experimental, suele ocurrir que solamente se manejen ángulos cuyo interior no excede de 360° (o sea 4 rectos), inclusive para la suma de dos o más de ellos. Por ejemplo: en cristalografía, o en astronomía, o en dibujo mecánico sólo se manejan ángulos no "mayores" de 4 rectos. Todo lo que anteriormente hemos dicho sigue siendo válido, salvo que al escribir la congruencia "A_1 es congruente con A_2" hay que agregar: "con el módulo 4 rectos":

$$A_1 = A_2 \ (mod\ 4\ rectos)$$

Si queremos pensar en ángulos mayores de 4 rectos, sin acudir a lo anterior y distinguir entre A y $A+4$ rectos, acudiremos a lo que en Análisis de Variable Compleja se llama la superficie de Riemann al estudiar las funciones del tipo $w = z^k$ donde k es un número natural y z es el valor de una variable compleja. No ahondamos en este tema para no salirnos de lo fundamental de este artículo. El lector que los desee puede referirse a un buen libro sobre variable compleja y sus funciones analíticas.

2.7 Rotaciones, ángulos y ciclos

Definición. Una rotación es el movimiento de una semirrecta, en un mismo plano, alrededor del extremo fijo de esa línea. Este es un concepto cinemático y diacrónico de un ángulo. Decimos además que el ángulo es positivo si la rotación es levógira (anti-horaria) y que es negativo si la rotación es dextrógira (horaria). Positivo es el ángulo que barre la visual de un observador que comienza mirando al Este y luego gira hacia la izquierda, para mirar al Norte. Positivo es el giro que debe darse a un tornillo de rosca derecha para destornillarlo. Si se ejecuta una rotación levógira con amplitud angular A, el ángulo $\sim A$ es una rotación pero realizada en sentido contrario (dextrógira).

Por razones técnicas y prácticas, en estas situaciones hay que considerar ángulos mayores que 4 rectos (o sea, mayores que 1 ciclo). Además, obviamente, hay que considerar dos sentidos posibles (positivo o levógiro, y negativo o dextrógiro).

Es claro que la clase de las rotaciones angulares alrededor de un punto P en un plano, forma un espacio vectorial unidimensional con el cuerpo Q de los números racionales.

Las rotaciones en un plano o en el espacio son movimientos de naturaleza geométrica y de naturaleza física que están profundamente asociados a los desplazamientos de un punto a lo largo de una recta, pero de naturaleza distinta. Los primeros dan origen a la noción de Ángulo; mientras que los segundos dan origen a la noción de Longitud. Por eso Ángulo y Longitud son magnitudes físicas distintas, irreductibles una o otra como tales, y ambas de carácter fundamental en el mundo físico.

Cuando una semirrecta r gira hacia la izquierda alrededor de su extremo O, en un mismo plano, y barre 360° sexagesimales (esto es cuatro cuadrantes estáticos) decimos que ejecuta una rotación angular positiva de un ciclo (Los ingenieros y técnicos mecánicos le dicen "una revolución", por lo común). Hablamos aquí de un ángulo de naturaleza diacrónica o cinética. Más exactamente diríamos "giro-cinética". Y si la semirrecta gira n veces alrededor de P, barrerá un ángulo que ya no es propio, y escribiremos que este ángulo mide

$$n \times 360 \text{ grados sexagesimales} = n \times 2\pi \text{ radianes} =$$
$$4n \text{ cuadrantes} = 6\,n \text{ sextantes} =$$
$$n \times 15.31914894 \text{ "ptolomeos" (o eclípticas, si se refiere)}$$

Si f es el número de ciclos por segundo, y ω es la velocidad angular de la semirrecta r, en cualquier unidad de ángulo por segundo, como debe entenderse, escribiremos que para un lapso de tiempo t el ángulo barrido es

$$\omega.\, t = k \cdot f \cdot t \qquad o\ sea \qquad \omega = kf$$

en donde k es el número de estas unidades angulares a que equivale 1 ciclo. Es fácil ver que

$$k = 360^o/\text{ciclo} = 2\pi \text{ radianes/ciclo} =$$
$$15.31914894 \text{ "ptolomeos"/ciclo} = (2\pi/E) \text{ ciclo}^{-1}$$

Los libros de Física escribe la expresión "$\omega = 2\pi f$", omitiendo subrepticiamente la aclaración indispensable de que esto sólo es cierto si ω se expresa en la muy artificial unidad de "radianes/segundo"; y esto lo omiten para enredarse en su supuesto incorrecto de que "los ángulos son una magnitud física si dimensiones".

En otro artículo esperamos tratar de los ángulos sólidos como magnitud física fundamental.

REFERENCIAS (Comentadas)

Birkhoff, G. *Hydrodynamics,* Princeton N.J, Princeton University Press, 1950. Usa ampliamente el análisis dimensional para analizar y resolver problemas de mecánica de líquidos.

Buckingham, E. *On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations*, En Physical Review, Vol. IV (1914), pp. 345-376. Primera demostración formal del Teorema Pi.

Bridgeman, P. *Dimensional Analysis,* New Haven and London, Yale University Press, 1931. La definición operacionalista de las magnitudes físicas fundamentales, por primera vez. Trata además todo el tema de su título.

Drobot, S. On the Foundations of Dimensional Analysis, En *Studia Mathematica*, Vol. XIV, pp. 84-99. Presenta claramente la estructura del Análisis Dimensional, partiendo de interpretar un sistema de magnitudes físicas como un espacio vectorial.

Federici, C. *El Algebra de Magnitudes*. Manuscrito inédito, Bogotá, Hacia 1954 ó 1955. Excelente exposición sistemática del Análisis Dimensional como una "Algebra de Magnitudes". Presenta la idea, entonces totalmente novedosa, de incluir el Ángulo Plano y la Temperatura como magnitudes físicas fundamentales, en pié de igualdad con la Longitud, la Masa, el Tiempo y la Carga Eléctrica. Infortunadamente este valioso documento nunca fue publicado como libro impreso, hasta donde sabemos.

Fourier, J. *Théorie Analytique de la Chaleur,* Paris, 1822. Primera identificación del concepto de las magnitudes físicas fundamentales.

Harnwell, G. *Principles of Electricity and Electromagnetism*, New York, Mc Graw Hill, 1949. En sus páginas 312 y siguientes trata de la conocida ley de Biot – Savart y, como ejemplo, del tema del campo magnético producido por un conductor eléctrico en espira, del que hablamos en este artículo.

Hill, W. *Teoría General de las Magnitudes Física,* Rosario (Argentina), Publicaciones de la Universidad de Rosario. 1941. Es un pequeño pero importante folleto que señala que la expresión de las dimensiones de una magnitud física en términos de magnitudes físicas fundamentales (*L, M, T, Q*) puede interpretarse como un vector en un espacio de varias dimensiones.

Landolt, M. *Grosse, Masszahl und Einheite,* Zurich, 1952. Muy buen tratado sobre la medida de magnitudes. Aclara muy bien los tres conceptos distintos, aunque relacionados de "medida de una magnitud", "número de medida" y "unidad de medida"; así como el "producto" del número racional con la unidad específica que da lugar a la "medida de la magnitud".

Langhaar, H. *Analyse Dimensionnelle et Theorie des Maquettes,* (Traducción al francés del inglés original Dimensional Analysis and Theory of Models, del mismo autor, 1951, por C. Charcoset), Paris, Ed. Dunod. 1956. Texto breve y excelente sobre la materia.

Lin, C. and Segel, L. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, New York, Macmilla Publishing Co, 1974. Muy buen libro sobre el tema de su título. Presenta en 10 páginas el Análisis Dimensional desde el punto de vista de la constitución de ecuaciones diferenciales en Física, que tengan variables cero-dimensionales. No menciona el importante método de Lord Rayleigh. Da como magnitudes físicas fundamentales a la Longitud, la Masa, el Tiempo y la Temperatura. Olvida o ignora que también lo son el Ángulo Plano, el Ángulo Sólido, la Carga Eléctrica y la Nuja. No menciona el Teorema Pi, ni a ninguno de sus tres autores. Ni enseña a usarlo para deducir fórmulas o leyes físicas con base en la experimentación.

Mc Graw Hill. *Encyclopedia of Physics.* (Sybil P. Parker, editor jefe), New York, Mc Graw Hill, 1993. Excelente diccionario enciclopédico de toda la física, de 1624 páginas y completamente al día de 1993. Pero le da tan poca importancia al Análisis Dimensional (muy equivocadamente), que al artículo sobre este tema que es vital para los físicos e ingenieros, solamente le destina 3 páginas. Como magnitudes físicas fundamentales sólo menciona a *L*, a *M*, a *T* y a *Q*. Ignora totalmente la magnitud fundamental Ángulo Plano (*A*). Ignora también el Ángulo Sólido y la Temperatura. Enuncia someramente el Teorema Pi y ni siquiera menciona al más conocido de sus autores, Edgar Buckingham. Lamentable.

Oberdorfer, G. *Die Mass-systeme in Physik und Technik,* Viena, 1956. Muy buena exposición didáctica sobre la operación de medir, en el mundo de la Física y de la Tecnología; sobre unidades de medida; sobre sistemas.

Palacios, J. *Análisis Dimensional,* Madrid. España – Calpe, 1956. Es un buen texto didáctico sobre el tema. El único que es de autor español, hasta donde sabemos.

Poveda, G. *Los Sistemas de Magnitudes Físicas como Espacios Vectoriales,* En Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Matemáticas, 1968. Analiza el espacio vectorial de las magnitudes físicas y usa los teoremas fundamentales de los sistemas de ecuaciones lineales para demostrar el Teorema Pi.

Rayleigh, L. *The Principle of Similitude*, En Nature. Vol. XLV (1915), pp. 65-68. Formaliza el método algebraico para formar productos cero-dimensionales de unidades, y sobre magnitudes físicas medibles.

Riabouchinsky, D. *Hydrodinamique et Analyse Dimensionelle,* Moscou. Publication de l'Institut Aerodynamique, 1912.

Riabouchinsky, J.L. *L'Aerophile,* Paris, 1911. Primer tratamiento analítico-dimensional de problemas de mecánica de fluidos, usando el Teorema Pi sin darle ese nombre.

Serway, R. *Physics for Scientists and Engineers*, Philadelphia, Saunders College Publishing, 1992.

Vaschy, A. *Théorie de l'Electricit,.* Paris, 1896. Primer tratamiento dimensional de las magnitudes eléctricas. Primer enunciado del actual Teorema Pi.

Un buen texto de Física General, muy usado hoy. Bastante reciente. Dedica dos páginas a un lánguido comentario sobre el inmenso Análisis Dimensional. Menciona como magnitudes físicas fundamentales a *L*, *M* y *T*. Ni siquiera menciona a *Q*. Podrían agregarse decenas de otros textos de Física como ejemplos en esta lamentable negligencia hacia este tema del Análisis Dimensional, que es tan importante y tan útil para ingenieros, físicos y otros profesionales.

Nota:
Salvo la obra del *Profesor Federici*, en ninguna de estas obras se menciona la magnitud física Ángulo Plano como magnitud fundamental, ni se usa este hecho para resolver problemas de Análisis Dimensional.