

FLUJO DE GAS EN TUBERÍAS BAJO CONDICIONES NO ESTABLES

ALFONSO BUITRAGO

Ingeniero de Petróleos, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín

HUGO QUIROGA

Ingeniero de Petróleos, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín

Recibido para revisión 22 de Febrero de 2001, aceptado 19 de Junio de 2001, versión final recibida 27 de Noviembre de 2001

RESUMEN: Se presenta una breve descripción del modelo de flujo de gas en tuberías bajo condiciones no estables. Se discuten las condiciones iniciales y de frontera necesarias para aplicar el modelo al estudio de los efectos de la variación del consumo, sobre la presión y el flujo másico a lo largo de la línea. Las ecuaciones se resuelven utilizando diferencias finitas, un esquema implícito y se implementa un método iterativo tipo Picard.

PALABRAS CLAVES: Flujo no estable, Gas, Tubería.

ABSTRACT: A brief description of the equations for modeling unsteady-state gas flow through pipes is presented. Necessary initial and boundary conditions for applying the model to study the effect of demand variation on pressure and mass flow rate over the line are discussed. Equations are solved by using finite difference and an implicit scheme. A Picard-like iterative method was implemented.

KEYWORDS: Unsteady flow, Gas, Pipe.

1 INTRODUCCIÓN

El problema del flujo de gas bajo condiciones no estables ha sido materia de análisis en ingeniería desde hace algunos años. Aunque ciertos problemas de flujo se han abordado mediante aproximaciones a partir del estado estable, las suposiciones allí involucradas son demasiado fuertes, razón por la cual se deben considerar al máximo las condiciones de operación.

Aplicaciones hay muchas. A continuación, se pretende abordar el problema del flujo transiente en el caso de flujo en una tubería de gas, para determinar el comportamiento de la presión y el flujo másico a lo largo de la línea durante las horas de mayor y menor demanda.

2 MODELO MATEMÁTICO

2.1 Conceptos básicos. Ecuaciones de comportamiento de flujo

Existe flujo No Estable (NE) o flujo transiente, cuando el comportamiento de la presión y el flujo másico varían como funciones del tiempo, además de la posición. Este es el caso general de los sistemas de conducción de gas, en los cuales el flujo másico varía constantemente en los extremos de entrada y salida del gas.

Como es sabido, en una tubería el comportamiento del flujo y la presión están regulados por la demanda de gas; de forma que durante las horas de máxima demanda, la tubería se despresuriza (comportamiento conocido como vaciado), y en las horas de menor consumo se presuriza (lo que se conoce como empaquetamiento). Asimismo, el caudal en cada tramo de la misma es diferente. No se deben ignorar las propiedades de compresibilidad del gas, pues en contraposición a lo ocurrido con otros fluidos, cualquier disturbio generado en algún punto, ya sea por el cierre de una válvula o cualquier otra variación en el flujo másico, tarda en transmitirse a lo largo de la línea.

Para describir el flujo NE para un gas, son necesarias tres relaciones matemáticas: una ecuación de estado del gas, la ecuación de continuidad (balance de masa), y la ecuación de movimiento (balance de energía); además de alguna relación que considere la desviación del comportamiento ideal. Las ecuaciones de continuidad y movimiento, se obtienen a través de balances de masa y energía en un elemento infinitesimal de tubería. Las ecuaciones que se obtienen son las siguientes:

Balance de masa:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Balance de energía:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho}{g_c} \left[v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \right] + \frac{\rho g}{g_c} \operatorname{sen} \alpha + \frac{f v |v| \rho}{2 d g_c} = 0 \quad (2)$$

En estas ecuaciones: \dot{m} es flujo mísico, P es presión, ρ es densidad, t es tiempo, x es la dirección de flujo, v es la velocidad de flujo, β es la velocidad isotérmica del sonido en el gas, A es el área transversal de la tubería, d es el diámetro de la tubería, g es la constante gravitacional, g_c es un factor de corrección que relaciona masa y peso (para el sistema internacional es 1), f es el factor de fricción de Moody y α es el ángulo de inclinación de la tubería.

La ecuación de estado sirve para expresar las ecuaciones anteriores en términos de las mismas variables dependientes (flujo mísico y presión); además sirve de enlace con el parámetro que tiene en cuenta la desviación de la idealidad. Este enlace puede hacerse escribiendo la ecuación de estado en función de la velocidad isotérmica del sonido en un gas β , la cual para un mismo gas sólo depende de la temperatura.

$$\frac{P}{\rho} = \frac{ZRT}{M} = \frac{\beta^2}{g_c} \quad (3)$$

La velocidad de un gas se puede obtener como:

$$v = \frac{\dot{m} \beta^2}{A P g_c} \quad (4)$$

En la ecuación (3), Z es el factor de compresibilidad del gas, M es el peso molecular, T es temperatura y R es la constante universal de los gases.

Reemplazando la ecuación (4) y la densidad despejada de la ecuación (3) en las ecuaciones (1) y (2), se obtienen las ecuaciones de continuidad y movimiento como las presenta (Kumar, 1987). Estas dos ecuaciones componen el modelo matemático a resolver:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\beta^2}{A g_c} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{A g_c} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{P g}{2} \operatorname{sen} \alpha + \frac{f \dot{m} |v| \beta^2}{2 d A^2 g_c^2 P} = 0 \quad (6)$$

Debe considerarse que se han desarrollado relaciones matemáticas diferentes a estas para describir el comportamiento de flujo no estable, a las cuales se ha llegado mediante análisis paralelos al adelantado por Kumar. Un modo de escritura de las ecuaciones también utilizado, es el de variables adimensionales (Castro, 1998 y De Nevers, 1983).

2.2 Condiciones iniciales y de frontera

Para que el problema matemático sea bien planteado es necesario establecer las condiciones que definen el comportamiento del flujo mísico y la presión, tanto en el espacio como en el tiempo.

Como condiciones iniciales pueden especificarse: para la presión, una presión constante a lo largo de la línea o una distribución de presión en flujo estable; y para la masa, flujo mísico constante o cero.

Presión constante en la línea y flujo mísico cero, equivale a una condición inicial de no flujo en la línea. Flujo mísico constante y una distribución de presión bajo flujo estable, equivale a tener una condición inicial de flujo estable en la línea. La distribución inicial de presión para este tipo de condición inicial se puede obtener utilizando las ecuaciones que describen el comportamiento del flujo estable. Una de las ecuaciones más utilizadas para flujo estable es la de Weymouth:

$$q_b = C_w \frac{T_b}{P_b} \left(\frac{d^{16/3}}{\gamma_g ZTL} \right)^{0.5} (P_1 - P_2)^{0.5} \quad (7)$$

Donde q_b , T_b y P_b son caudal, temperatura y presión a condiciones base (273.15 K y 101.325 KPa) respectivamente, γ_g es la gravedad específica del gas, L es la longitud del tramo de tubería, P_1 y P_2 son las presiones en los extremos del tramo de tubería, y C_w es una constante que depende de las unidades utilizadas para las variables de la ecuación. Cuando se usan las unidades básicas del sistema internacional, la constante tiene un valor de 137.114. Otras ecuaciones presentan formas similares, y la utilización de una u otra está supeditada a las condiciones de operación y tamaño de la tubería.

Finalmente, se necesitan dos condiciones de frontera, una para cada variable independiente que permitan que la solución sea única; éstas se pueden escoger entre flujo mísico a la entrada o a la salida y presión a la entrada o a la salida. Utilizar como condiciones de frontera, por ejemplo, el flujo mísico a la entrada y a la salida de la tubería genera un problema mal planteado, ya que un flujo mísico puede ser generado por determinado ΔP , y mientras no se especifique alguna de las dos presiones el problema tiene infinitas soluciones. La selección de las condiciones de frontera debe depender de cuáles condiciones son más fáciles de medir en la práctica. Para el caso que se está tratando de empaquetamiento o vaciado de una tubería, se eligieron como condiciones de frontera: una presión de inyección constante a la entrada y el flujo mísico a la salida de la tubería como una función del tiempo (condiciones tipo Newman), ya que son fácilmente medibles en la práctica. El flujo mísico como función del tiempo puede expresarse por medio de aproximaciones numéricas, las siguientes tratan de modelar el comportamiento del flujo mísico en una línea de conducción de gas durante un día:

Para $0 \leq t \leq 8$:

$$\dot{m}_f^{n+1} = \dot{m}_f^0 + (\dot{m}_{\max} - \dot{m}_{\min}) \operatorname{sen} \left(\pi + t \frac{\pi}{4} \right) \quad (8)$$

Para $8 \leq t \leq 10$ y $22 \leq t \leq 24$

$$\dot{m}_f^{n+1} = \dot{m}_f^0 \quad (9)$$

Para $10 \leq t \leq 22$

$$\dot{m}_f^{n+1} = \dot{m}_f^0 + (\dot{m}_{\max} - \dot{m}_{\min}) \operatorname{sen} \left(\pi \frac{t+6}{4} \right) \quad (10)$$

En estas ecuaciones el tiempo está dado en horas. De esta forma se tienen varios picos máximos y mínimos, y el tiempo mínimo para pasar de la tasa máxima mínima \dot{m}_{\min} a la máxima \dot{m}_{\max} o viceversa es de 4 horas. Los máximos representan las horas de mayor consumo, las cuales son: en la madrugada, al mediodía y temprano en la noche. Los mínimos representan las horas de menor consumo, es decir, en la mañana, en la tarde y tarde en la noche. Se utilizó una función sinusoidal para una transición suave entre picos.

3 SOLUCIÓN NUMÉRICA

Como se ve en las ecuaciones (5) y (6), se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no homogéneas de primer grado con coeficientes no lineales, difícilmente solucionables por métodos analíticos, por lo cual se acude a una solución numérica en diferencias finitas, con nodo centrado y un esquema implícito.

Kumar propone despreciar el segundo y tercer término de la ecuación (6) para obtener una solución más sencilla.

Algunos trabajos (Castro, 1998) solucionan las ecuaciones mediante esquemas explícitos, mientras que otros autores (Wylie, 1970 y Wylie, 1971) utilizan el método de las líneas características. En el presente estudio se aborda el problema de la solución utilizando un esquema implícito, el cual proporciona una mayor estabilidad numérica.

Con la suposición de que la tubería es completamente horizontal, la ecuación (6) puede ser escrita más convenientemente de la siguiente forma:

$$Ag_c \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} = - \frac{f \dot{m} |\dot{m}| \beta^2}{2dAg_c P} \quad (11)$$

Ya que los coeficientes de las derivadas con respecto a la posición en las ecuaciones (5) y (11) son positivos, conviene utilizar una aproximación regresiva a las derivadas, por criterios de estabilidad.

El sistema discretizado (ver Apéndice), en el cual los coeficientes no lineales se evalúan explícitamente, queda finalmente así:

$$\dot{m}_{i-1}^{n+1} = \dot{m}_i^{n+1} + \frac{\Delta x}{A' \Delta t} [P_i^{n+1} - P_i^n] \quad (12)$$

$$P_i^{n+1} = \left[F(\dot{m}_i^{n+1}, P_i^{n+1}) - \frac{(\dot{m}_i^{n+1} - \dot{m}_i^n)}{\Delta t} \right] \frac{\Delta x}{B'} + P_{i-1}^{n+1} \quad (13)$$

Los términos A' , B' y $F(\dot{m}_i^{n+1}, P_i^{n+1})$ se definen en el Apéndice. El sistema se escribe de esta forma para ser solucionado por un método iterativo tipo Picard, en el cual cada iteración se hace por separado para cada variable. El procedimiento es el siguiente:

- Con valores iniciales supuestos para las presiones, que pueden ser los mismos calculados en las condiciones iniciales, se hace una iteración con la ecuación (12) para obtener todos los flujos másicos, desde el nodo final hasta el inicial recorriendo todos los nodos.
- Con valores obtenidos para el flujo másico en el paso anterior, se hace una iteración con la ecuación (13) para obtener todas las presiones, desde el nodo inicial hasta el final recorriendo todos los nodos.
- Los valores calculados en los dos pasos anteriores se comparan con los que se tenían al inicio. Si cumplen el criterio de error establecido, se ha llegado a la solución; de lo contrario estos valores calculados pasan a ser los supuestos y se repiten los dos pasos anteriores, hasta que el criterio de error sea satisfecho y por lo tanto se consiga una solución.

Nótese que la ecuación (12), se debe solucionar para el flujo másico desde el final de la tubería hacia el principio, ya que se tiene como condición de frontera el flujo másico a la salida de la tubería. En cambio, la expresión para el cálculo de la presión (ecuación (13)), se debe solucionar desde el inicio hacia el final de la tubería, ya que la condición de frontera para la presión está establecida a la entrada.

4 ESQUEMA DE SOLUCIÓN

La propuesta inicial de solución era utilizar el sistema propuesto por Kumar en el cual se propone despreciar el segundo y tercer términos de la ecuación (6) y escribirlo de la siguiente forma:

$$2P \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f \dot{m} \beta^2}{dA^2 g_c^2} \dot{m} = 0 \quad (14)$$

Así, el sistema a resolver era el formado por las ecuaciones (5) y (14). Para discretizar estas ecuaciones se había utilizado una aproximación progresiva. En la ecuación (14)

se habían discretizado $\partial P / \partial x$ y \dot{m} implícitamente, y los términos que los acompañan explícitamente, esto con el fin de obtener un sistema lineal. El sistema lineal obtenido se escribió en forma matricial, con el objetivo de intentar una solución con métodos iterativos tipo Gauss- Seidel o SOR (Successive Over Relaxation). Para escribir el sistema en forma matricial se tomaron primero todos los flujos másicos como incógnitas y luego las presiones. La matriz resultante presenta la siguiente forma para una tubería con cuatro tramos y cinco nodos:

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_2 & \dot{m}_3 & \dot{m}_4 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \lambda_1 & & & & 1 & & & \\ -\lambda_2 & \lambda_2 & & & & 1 & & \\ -\lambda_3 & \lambda_3 & & & & & 1 & \\ & -\lambda_4 & & & & & & 1 \\ \gamma_1 & & -\alpha_1 & \alpha_1 & & & & \\ \gamma_2 & \gamma_2 & & -\alpha_2 & \alpha_2 & & & \\ \gamma_3 & \gamma_3 & & & -\alpha_3 & \alpha_3 & & \\ \gamma_4 & & & & & -\alpha_4 & \alpha_4 & \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\lambda_i = \frac{\beta_i^2 \Delta t}{A g_c \Delta x}, \quad \alpha_i = \frac{P_i^n + P_{i+1}^n}{\Delta x}, \quad \gamma_i = \frac{\beta_i^2 f |m_i^n + m_{i+1}^n|}{4 d A^2 g_c^2}$$

En este sistema se habían tomado como condiciones de frontera el flujo másico a la entrada y a la salida de la tubería, por eso no aparecen \dot{m}_1 y \dot{m}_5 como incógnitas en la matriz anterior. Tomar las dos condiciones de frontera para una misma variable es un error, ya que genera un problema mal planteado como se explicó antes. Se debe tomar una condición de frontera para cada variable.

Por otro lado, esta matriz presenta un problema, y es que una de las entradas en la diagonal principal es cero, lo cual hace difícil la aplicación de métodos de solución del tipo Gauss-Seidel o SOR. Por lo tanto se optó por hacer permutación de filas y la matriz quedó con la siguiente forma, solucionando así el problema anterior:

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_2 & \dot{m}_3 & \dot{m}_4 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \lambda_1 & & & & 1 & & & \\ -\lambda_2 & \lambda_2 & & & & 1 & & \\ -\lambda_3 & \lambda_3 & & & & & 1 & \\ \gamma_1 & & -\alpha_1 & \alpha_1 & & & & \\ \gamma_2 & \gamma_2 & & -\alpha_2 & \alpha_2 & & & \\ \gamma_3 & \gamma_3 & & & -\alpha_3 & \alpha_3 & & \\ \gamma_4 & & -\lambda_4 & & & 1 & & \\ & & & & & & -\alpha_4 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Durante mucho tiempo se intentó resolver el anterior sistema utilizando Gauss-Seidel o SOR con diferentes tamaños de paso de tiempo y espacio, pero nunca hubo convergencia. El error consiste en que este sistema no admite una solución iterativa con los métodos del tipo Gauss-Seidel o SOR, ya que estos métodos no funcionan con matrices que no son diagonalmente dominantes, como las que se obtienen con estos sistemas. Razón por la cual hubo un cambio radical en el sistema de solución.

Para solucionar las ecuaciones (12) y (13) con el método iterativo tipo Picard, se aplicó una rutina ejecutada en VISUAL FORTRAN '97®. La rutina esta compuesta de una parte de procesamiento de datos, en la que se obtienen todos los parámetros necesarios en las ecuaciones (12) y (13), tales como A' , B' y $F(\dot{m}_i^{n+1}, P_i^{n+1})$; y una parte de solución, en la que se resuelve el sistema de ecuaciones. El diagrama de flujo de la parte de solución puede verse en la Figura 1.

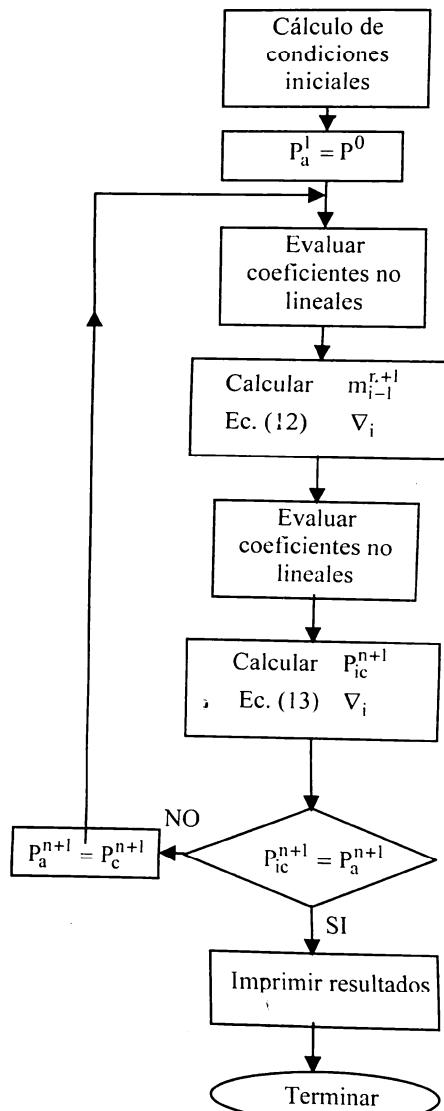


Figura 1. Diagrama de flujo para la solución numérica

Para aplicar el sistema numérico se requiere primero que todo, evaluar las condiciones iniciales; lo cual se hace en el procesamiento de datos, mediante una ecuación de flujo de gas para estado estable como se dijo anteriormente. Se deben establecer también, las condiciones de frontera adecuadas.

Los valores del factor de compresibilidad del gas Z para la ecuación de flujo (ecuación (7)) se obtuvieron con la correlación de Starling (McCain, 1991), utilizando una técnica iterativa de punto fijo, la cual resulta en un doble sistema de ensayo y error: primero se hace una suposición para los valores de Z , los cuales pueden ser iguales a uno; luego se calculan las presiones con la ecuación de flujo estable (ecuación (7)). Una vez obtenidos los valores de las presiones, se evalúan los valores de Z con la ecuación de Starling por ensayo y error. Los valores calculados de Z se comparan con los supuestos; la solución se obtiene cuando se cumple el criterio de error establecido, de lo contrario con los valores calculados de Z se re-evalúan las presiones con la ecuación de flujo estable y se repite el proceso hasta que se cumpla el criterio de error. Esto implica un proceso de ensayo y error dentro de otro.

Sobre el factor de fricción f incluido en la ecuación (14), éste se calculó con la misma expresión que utiliza Weymouth para su ecuación, la cual para un diámetro en centímetros es:

$$f = \frac{1}{22.906d^{1/3}} \quad (15)$$

Los términos no lineales A' , B' y $F(\dot{m}_i^{n+1}, P_i^{n+1})$ de las ecuaciones (12) y (13) se evalúan cada que se obtiene un nuevo valor para P y \dot{m} .

5 CASO DE APLICACIÓN

Los siguientes son los datos de entrada que se utilizaron en la ejecución de la rutina. Aunque los datos no son reales, son típicos de una línea de transmisión de Gas:

$$P \text{ entrada} = 8270 \text{ KPa} = 1200 \text{ lpc.}$$

$$Q \text{ (a CN)} = 5.5 \times 10^5 \text{ m}^3/\text{hr} = 2.42 \times 10^6 \text{ gal/min.}$$

Longitud de la tubería = 10 Km.

Diámetro de la tubería = 0.508 m = 20 pul.

Temperatura de flujo = 283.15 K = 10°C.

Composición del Gas (fracción molar):

Metano = 0.74

Etano = 0.21

Propano = 0.05

El flujo másico máximo y mínimo para las condiciones de frontera se tomó como una fracción del flujo másico inicial, así:

$$\dot{m}_{\max} = 1.2\dot{m}_f^0$$

$$\dot{m}_{\min} = 0.8\dot{m}_f^0$$

6 RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los resultados obtenidos para la distribución inicial de presiones en la tubería se muestran gráficamente en la Figura 2.

El programa se ejecutó para varios intervalos de tiempo. Aquí se presentan los resultados para tres tiempos representativos: 0.5 hr, 2.0 hr y 6.0 hr. Se escogieron estos tiempos ya que: en $t = 2.0$ hr se produce la tasa de flujo mínima; en $t = 6.0$ hr se da la tasa de flujo máxima, y $t = 0.5$ hr es un tiempo cercano al inicio. Los resultados obtenidos para la presión y el flujo másico en estos tiempos se pueden ver de forma gráfica en las Figuras 3 y 4 respectivamente. En estas figuras también se incluyen los resultados de las condiciones iniciales ($t = 0$ hr).

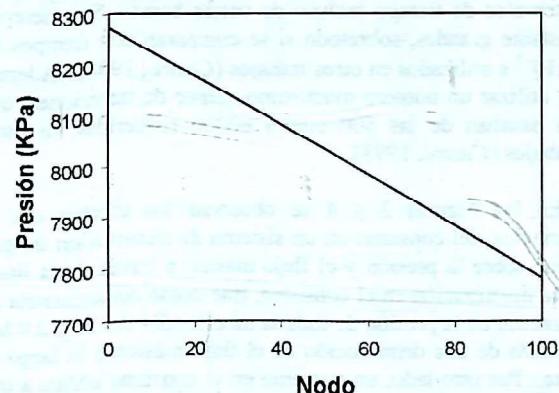


Figura 2. Distribución de Presiones Inicial

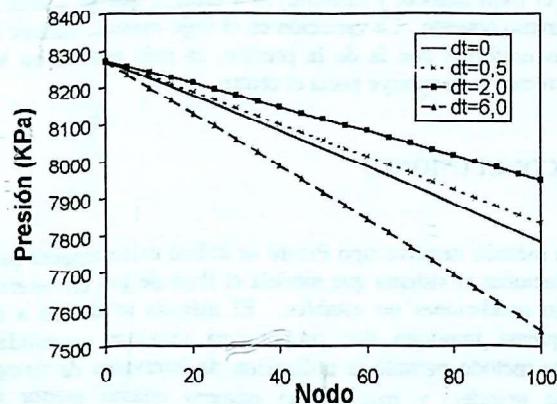


Figura 3. Distribución Final de Presiones

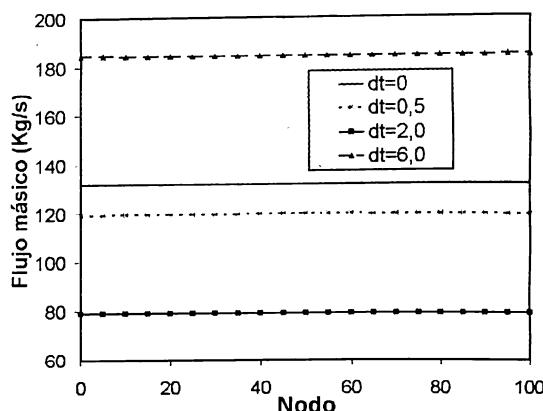


Figura 4. Distribución Final de Flujo másico

Con el caudal de entrada se obtiene un flujo másico inicial de 131.7633 Kg/s, el cual es constante a través de toda la línea. Para cada tiempo siguiente, el flujo másico a la salida de la tubería se calcula por medio de las ecuaciones para las condiciones de frontera (ecuaciones (8)-(10)).

El programa en cuestión funciona adecuadamente para intervalos de tiempo incluso de varias horas. Son tiempos bastante grandes, sobretodo si se comparan con tiempos de 3×10^{-5} s utilizados en otros trabajos (Castro, 1998). Además de utilizar un número muchísimo menor de iteraciones, que no pasaban de las 500 contra 60000 requeridas en otros trabajos (Castro, 1998).

En las Figuras 3 y 4 se observan los efectos que la variación del consumo en un sistema de transmisión de gas, tiene sobre la presión y el flujo másico a través de la línea. Una disminución en el consumo, trae como consecuencia un aumento en la presión de toda la tubería ($dt= 0.5$ hr y 2.0 hr), además de una disminución en el flujo másico a lo largo de ésta. Por otro lado, un aumento en el consumo obliga a una disminución en la presión a través de la línea ($dt= 6.0$ hr), y un aumento en el flujo másico. Los cambios en la presión son más drásticos en el extremo donde se produce el cambio en el flujo másico, y disminuyen a medida que se acerca al extremo opuesto. La variación en el flujo másico, aunque es más uniforme que la de la presión, es más notoria en los extremos y disminuye hacia el centro.

7 CONCLUSIONES

Un método iterativo tipo Picard se utilizó exitosamente para solucionar el sistema que modela el flujo de gas en tuberías bajo condiciones no estables. El método se aplicó a un esquema implícito que proporciona máxima estabilidad. Este método permite la utilización de intervalos de tiempo más grandes, y requiere un número mucho menor de iteraciones que las requeridas en trabajos anteriores, lo cual aumenta considerablemente la eficiencia del simulador.

El sistema no admite una solución con métodos iterativos del tipo Gauss- Seidel o SOR, ya que la matriz de coeficientes resultante no es diagonalmente dominante.

Los datos y condiciones de límite utilizados permiten simular el efecto que la variación del consumo en un sistema de transmisión de gas, tiene sobre la presión y el flujo másico a través de la línea. Este proceso puede ayudar a prevenir daños en tuberías por presiones indebidas o a controlar el flujo en una línea de transmisión de gas.

NOMENCLATURA

A	Área de flujo
d	Diámetro de la tubería
f	Factor de fricción de Moody
g	Aceleración debida a la gravedad
g_c	Factor de corrección que relaciona masa y peso
L	Longitud de la tubería
m	Flujo másico
P	Presión
P_b	Presión a condiciones base
q_b	Caudal a condiciones base
t	tiempo
T	Temperatura de flujo
T_b	Temperatura a condiciones base
v	Velocidad del gas.
x	posición
Z	Factor de compresibilidad del gas
β^2	Velocidad isotérmica del sonido en un gas
γ_g	Gravedad específica del gas
<u>Subíndices</u>	
i	Nodo i
$i+1$	Nodo $i+1$
$i-1$	Nodo $i-1$
f	Nodo de salida
max	Máximo
min	Mínimo
<u>Superíndices</u>	
n	Tiempo n
$n+1$	Tiempo $n+1$
0	Inicial

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a Ph.D.: Gildardo Osorio y Abel Naranjo, profesores de la Unidad de Petróleo y Gas Natural, por sus aportes y colaboración.

APÉNDICE. Discretización regresiva de las ecuaciones (5) y (11)

De la ecuación (5):

$$A' \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (A1)$$

en donde:

$$A' = \frac{\beta^2}{Ag_c} \quad ?$$

De la ecuación (11):

$$B' \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial t} = f(m, P) \quad (A2)$$

En donde se ha supuesto tubería horizontal ($\sin \alpha = 0$), y adicionalmente:

$$B' = Ag_c$$

$$f(m, P) = - \left[\frac{fm m \beta^2}{2dAg_c P} \right]$$

Debido a que $A' > 0$ y $B' > 0$, $\frac{\partial m}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial t}$ se discretizan con una aproximación regresiva.

$$A' \frac{[m_i^{n+1} - m_{i-1}^{n+1}]}{\Delta x} + \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} = 0 \quad (A3)$$

$$B' \frac{[P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}]}{\Delta x} + \frac{m_i^{n+1} - m_i^n}{\Delta t} = f(m_i^{n+1}, P_i^{n+1}) \quad (A4)$$

Resolviendo para presión y flujo másico se obtiene:

$$m_{i-1}^{n+1} = m_i^{n+1} + \frac{\Delta x}{A' \Delta t} [P_i^{n+1} - P_i^n] \quad (A5)$$

$$P_i^{n+1} = \left[f(m_i^{n+1}, P_i^{n+1}) - \frac{(m_i^{n+1} - m_i^n)}{\Delta t} \right] \frac{\Delta x}{B'} + P_{i-1}^{n+1} \quad (A6)$$

REFERENCIAS

- Castro, A. y Vásquez, P., *Simulación de los procesos de presurización y despresurización en una tubería de Gas Natural*. [Tesis de grado]. Medellín: Universidad Nacional de Colombia, 1998.
- De Nevers, N. and Day, A., *Packing and drafting in natural gas pipelines*, J. Petroleum Tech., 655-658, Marzo 1983.
- Kumar, S., *Gas production engineering*, Gulf publishing, Houston, 1987.

McCain, W., *Reservoir-fluid property correlations*. State of the art, SPERE, 266-272, Marzo 1991.

Naranjo, A., *Flujo de gas bajo condiciones no estables*, Universidad Nacional de Colombia, Medellín

Naranjo, A., *Flujo de gas bajo condiciones estables*, Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Özisick, M. N., *Finite Difference Methods in Heat Transfer*, Pág. 163

Stoner, M., *Steady-state analysis of gas production, transmission and distribution systems*, SPE Paper 2554, 1969.

Stoner, M., *Sensitivity analysis applied to a steady state model of natural gas transportation systems*, SPE Journal, 115 - 125, Abril 1972.

Taylor, T., Wood, N. and Powers, J., *A computer simulation of gas flow in long pipelines*, SPE Journal, 297 - 302, Diciembre 1962.

Wylie, E., and Streeter, V., *Natural gas pipeline transients*, SPE Journal, 357 - 364, Diciembre 1970.

Wylie, E., Stoner, M., and Streeter, V., *Network system transient calculations by implicit method*, SPE Journal, 356 - 362, Diciembre 1971.

Zhou, J. and Adewumi, M., *Simulation of transients in natural gas pipelines*, SPEPF 202-208, Noviembre 1996.