

# IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS CON UN MODELO BORROSO DEL TIPO TAKAGI-SUGENO

MIGUEL PEÑA

*Instituto de Automática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, Argentina*

RICARDO CARELLI

*Instituto de Automática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, Argentina*

FERNANDO DI SCIASCIO

*Instituto de Automática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, Argentina*

Recibido para revisión 5 de Febrero de 2002, aceptado 28 de Abril de 2002, versión final recibida 4 de Mayo de 2002

**RESUMEN:** En el presente trabajo se propone una metodología para la identificación de un sistema dinámico utilizando un Modelo Borroso del tipo Takagi-Sugeno. La identificación de la estructura del modelo se basa en la obtención de las derivadas parciales de la salida muestreada respecto a las entradas. Con el algoritmo de formación de grupos borrosos (Fuzzy C-Means) se obtienen los parámetros que definen los conjuntos borrosos de entrada. A partir de un algoritmo de optimización se realiza un ajuste fino de los parámetros del sistema.

**PALABRAS CLAVES:** Identificación, Modelo Borroso (Fuzzy), agrupamiento borroso.

**ABSTRACT:** In this work a methodology for identifying a fuzzy model of Takagi-Sugeno type for a dynamic system is presented. The identification for the model structure is based on partial derivatives of the output respecting the inputs. Next, using the fuzzy C-means clustering algorithm the parameters of input fuzzy sets are obtained. Finally, a fine parameter adjustment is done using an optimization algorithm.

**KEYWORDS:** System identification, Fuzzy model, Fuzzy C-means.

## 1 INTRODUCCION

La mayoría de las propuestas modernas de control están basadas en un modelo del proceso bajo consideración, por lo que el modelado y la identificación son etapas importantes en el diseño de sistemas de control. Para satisfacer los requerimientos de calidad en los productos, el sistema de control debe garantizar altos requerimientos de calidad sobre un rango amplio de condiciones de operación. Cuando se considera la totalidad del rango de operación, la mayoría de los procesos exhiben un comportamiento fuertemente no lineal y por lo tanto no pueden ser descritos empleando modelos lineales convencionales.

El concepto de identificación implica el empleo de técnicas que permiten construir modelos matemáticos a partir de la información contenida en un conjunto de datos de entrada y salida del sistema. Para aproximar los sistemas no lineales, con modelos basados en la Lógica Borrosa, se realiza la descomposición del sistema dentro de regiones y se emplea un modelo simple en cada región (Yager *et al.*, 1987).

En general, el proceso de identificación borrosa consta de tres etapas: la identificación del medio ambiente, la identificación de la estructura y la identificación de los parámetros. La identificación del medio ambiente consiste en encontrar las variables que afectan la salida en

forma significativa, esto es, determinar las variables de entrada. La identificación de la estructura depende del modelo borroso empleado y está determinada por la relación de entrada - salida. En general concierne con la determinación de la partición del espacio de entrada - salida. Las reglas de la forma Si-Entonces poseen dos estructuras: la estructura del antecedente y la del consecuente. En modelos del tipo Takagi - Sugeno (*Takagi and Sugeno*, 1985) las reglas son de la forma:

$$\begin{aligned} R^i : \text{Si : } & x \text{ es } \mathcal{A}^i(x) \\ \text{entonces : } & y^i = f^i(x) \end{aligned} \quad (1)$$

Donde  $x = [x_1 \ \dots \ x_M]$  son las entradas del sistema,  $y^i$  es la salida de cada regla,  $\mathcal{A}^i(x)$  es un conjunto borroso  $M$  dimensional. La estructura del consecuente de cada regla queda definida por la función  $f^i(x)$ . Por lo general se elige una función lineal afín de las entradas de la forma

$$f^i(x) = p_0^i + p_1^i x_1 + \dots + p_M^i x_M \quad (2)$$

donde  $p_j^i$  son escalares. La identificación de la estructura de la premisa o antecedente consiste en encontrar los distintos conjuntos borrosos que dividen al espacio de las variables de entrada. Generalmente se definen conjuntos borrosos de una dimensión para cada variable de entrada y se realiza una composición con el conectivo lógico "y", resultando

$$\mathcal{A}^i(x) = \mathcal{A}_1^i(x) \text{ y } \mathcal{A}_2^i(x) \text{ y } \dots \text{ y } \mathcal{A}_M^i(x)$$

En la Figura 1 (c), se observan los conjuntos borrosos resultantes para el caso particular de dos variables de entrada.

En los modelos del tipo Takagi-Sugeno, los parámetros del consecuente son los de las funciones que los definen. Para la premisa, los parámetros son los que definen los conjuntos borrosos que particionan el espacio de entrada.

En principio, la identificación del medio ambiente, la estructura y los parámetros no

pueden realizarse en forma separada. Esto hace que el proceso de identificación se torne muy complejo y en general se deben realizar varias aproximaciones para obtener el resultado deseado.

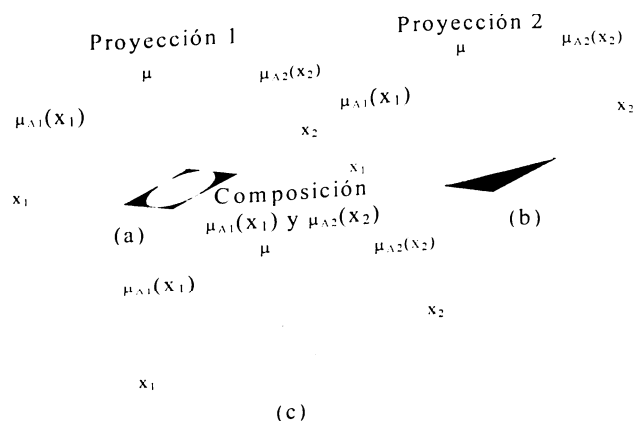


Figura 1. Proyección y composición de conjuntos borrosos.

Existen varias alternativas para obtener los conjuntos borrosos que realizan la partición del espacio de entrada. En la propuesta original de Takagi y Sugeno la metodología de identificación empleada es de carácter iterativo. En primer término se asumen los parámetros y la partición de las premisas y a continuación se determinan los parámetros del consecuente de forma óptima con el método de mínimos cuadrados de acuerdo a la premisa asumida. Si los resultados de la identificación no son satisfactorios, se reajustan las premisas y se repite el procedimiento en forma iterativa. La implementación de este tipo de esquema no es sencilla, ya que el problema de determinar la función de pertenencia óptima implica un problema de programación no lineal. Otra posibilidad consiste en considerar cada variable de entrada en forma independiente y realizar una partición de la misma con algún método de optimización. Posteriormente se realiza una composición a través de las distintas entradas empleando todas las posibles combinaciones de los conjuntos borrosos de las distintas entradas. Esta forma presenta el inconveniente de que el número de reglas crece en forma exponencial con el número de entradas. La propuesta presentada en (*Sugeno and Yasukawa*, 1993) realiza una partición sobre la

salida y por la asignación del valor de pertenencia al dato de entrada se obtiene un conjunto borroso de dimensión  $M$ . A partir de este se realiza una proyección sobre cada una de las entradas obteniendo los conjuntos borrosos de la premisa de las reglas. Este método posee la ventaja que el número de reglas resultante es menor que el anterior. Por otra parte, el método posee el inconveniente de perder información importante en el proceso de proyección del conjunto borroso de dimensión  $M$  sobre las entradas. En la Figura 1 (a) y (b) se observan dos conjuntos borrosos bidimensionales que en el proceso de proyección sobre las variables  $x_1$  y  $x_2$  presentan los mismos conjuntos borrosos unidimensionales. En el proceso de composición con el conectivo lógico "y" (implementado con el mínimo) el conjunto borroso resultante es el que se observa en la Figura 1 (c) que presenta diferencias considerables con respecto a los originales.

En el presente trabajo se propone una alternativa para la identificación de la estructura del modelo de Takagi-Sugeno. Se consideran en forma conjunta la estructura de la premisa y los parámetros, tanto del antecedente como del consecuente de las reglas. A través de funciones de normalización, tanto de las entradas como de la salida, se mejora el desempeño del modelo. El método propuesto no es recursivo ya que fijando el número de reglas se realiza en forma secuencial no iterativa. La propuesta de identificación de la estructura está basada en la obtención de las derivadas parciales de la salida muestreada respecto a las entradas y posteriormente con el método de formación de grupos borrosos "Fuzzy C-Means" desarrollado en (Bezdek, 1987), se obtienen los parámetros que definen los conjuntos borrosos de entrada. Una vez obtenida una primera aproximación del modelo, a través de un algoritmo de optimización, se realiza un ajuste fino del modelo. Se diferencia del presentado en (Peña *et al.*, 1998) en que se mejoran las funciones de normalización, se desarrolla el ajuste fino del modelo y se analizan la zona de validez del modelo.

En la segunda sección se presenta el modelo borroso empleado, se da una justificación del método, se desarrolla la propuesta realizada y por

último se analiza la zona de validez del modelo. En la tercera sección se presentan ejemplos de aplicación del algoritmo propuesto. El trabajo finaliza con un análisis de los resultados obtenidos, dándose las conclusiones y recomendaciones para futuros trabajos.

## 2 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN

### 2.1 Modelo empleado

En el modelo borroso propuesto por Takagi y Sugeno, la estructura del antecedente describe regiones borrosas en el espacio de entrada, y la del consecuente presenta funciones lineales (no borrosas) de las entradas del modelo. Las reglas son de la forma dada en (1), con la modificación que se usan funciones de normalización sobre las entradas y la salida, resultando en:

$$R^i: \text{Si: } x_n \text{ es } \mathcal{A}^i(x_n) \\ \text{entonces: } y_n^i = f^i(x_n)$$

La salida del modelo " $y_n$ ", se calcula como un promedio ponderado de la contribución de cada regla

$$y_n = \sum_{i=1}^L w^i(x_n) y_n^i \quad \sum_{i=1}^L w^i(x_n) \quad (3)$$

Donde  $L$  es el número de reglas y  $w^i$  es el grado de pertenencia (grado de cumplimiento) de la  $i$ -ésima regla del antecedente. Las entradas y la salida normalizadas ( $x_n, y_n$ ) se obtienen como

$$x_n = g_x(x), \quad y_n = g_y(y) \quad (4)$$

Las funciones de normalización tienen por objeto el aumento del desempeño del modelo. Tienen como característica que normalizan los datos al universo de discurso  $[0,1]$  y son monótonas crecientes. La función de normalización de la salida debe tener inversa. En la Figura 2 se observa el esquema implementado.

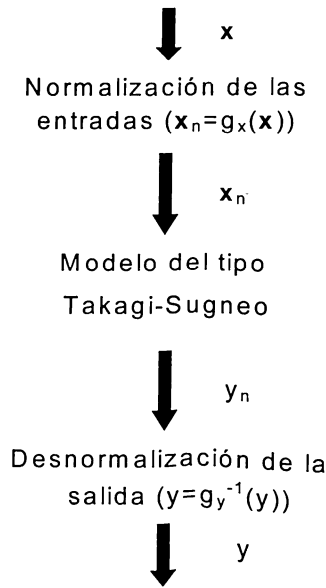


Figura 2. Esquema del modelo usado.

## 2.2 Justificación del método

Se supone un sistema representado por una función continua arbitraria de  $M$  entradas y una salida dado por

$$y_n = f(\mathbf{x}_n)$$

donde  $\mathbf{x}_n = [x_{I_n} \dots x_{M_n}]$ . Sobre este sistema se realiza un experimento, obteniéndose  $N$  muestras de la forma  $[\mathbf{x}_n(i), y_n(i)]$  para  $i=1$  a  $N$ . La intención es aproximar la función  $f(\mathbf{x}_n)$  (con el grado de precisión necesaria) mediante un modelo borroso del tipo Takagi - Sugeno de la forma:

$$y_n = \sum_{i=1}^L \varphi^i(\mathbf{x}_n) (p_0^i + p_1^i x_{I_n} + \dots + p_M^i x_{M_n}) \quad (5)$$

$$\text{donde } \varphi^i(\mathbf{x}_n) = w^i(\mathbf{x}_n) / \sum_{j=1}^L w^j(\mathbf{x}_n)$$

Como aclaración, se puede obtener un modelo borroso con  $N$  reglas, que represente en forma *exacta* a la señal muestreada, si se define de la forma:

$$y_n(q) = \sum_{i=1}^N \varphi^i(\mathbf{x}_n(q)) y_n(i)$$

$$w^i(\mathbf{x}_n(q)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x}_n(q) = \mathbf{x}_n(i) \\ 0 & \text{si } \mathbf{x}_n(q) \neq \mathbf{x}_n(i) \end{cases}$$

para  $q$  de 1 a  $N$ . Se define un entorno  $E(\mathbf{x}_n(i))$  alrededor de cada punto de muestra  $\mathbf{x}_n(i)$  de tal manera que la intersección de los entornos para las distintas muestras es vacía. Un dato cualquiera  $\mathbf{x}_n(q)$  (distinto de los valores muestreados) pertenece al entorno del punto  $\mathbf{x}_n(i)$  al que presenta la menor distancia. Para  $\mathbf{x}_n(q)$  se puede realizar una aproximación de primer orden mediante el desarrollo de la serie de Taylor

$$y_n(q) \approx \sum_{i=1}^N \varphi^i(\mathbf{x}_n(q)) \left\{ y_n(i) + \frac{\partial y_n}{\partial x_{I_n}}(i) (x_{I_n}(q) - x_{I_n}(i)) + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_{M_n}}(i) (x_{M_n}(q) - x_{M_n}(i)) \right\}$$

$$w^i(\mathbf{x}_n(q)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x}_n(q) \in E(\mathbf{x}_n(i)) \\ 0 & \text{si } \mathbf{x}_n(q) \notin E(\mathbf{x}_n(i)) \end{cases}$$

Donde  $\partial y(i)/\partial x_j$  es la derivada parcial de la salida, respecto de la entrada  $x_i$  evaluada en el punto  $[\mathbf{x}(i), y(i)]$ . Operando se llega a:

$$y_n(q) \approx \sum_{i=1}^N \varphi^i(\mathbf{x}_n(q)) (p_0^i + p_1^i x_{I_n}(q) + \dots + p_M^i x_{M_n}(q))$$

donde:

$$p_0^i = - \frac{\partial y_n}{\partial x_{I_n}}(i) x_{I_n}(i) - \dots - \frac{\partial y_n}{\partial x_{M_n}}(i) x_{M_n}(i) + y_n(i)$$

$$p_j^i = \frac{\partial y_n}{\partial x_{j_n}}(i)$$

(6)

Este modelo borroso con  $N$  reglas (1 regla para cada muestra) puede aproximar mediante interpolación cualquier salida para entradas cercanas a los puntos de muestra. Además tiene la forma del modelo borroso dado por Takagi y Sugeno. Se refiere en adelante a estas  $N$  reglas

como *reglas básicas*. Se puede considerar que cada regla básica queda especificada por el vector de dimensión  $2M+1$  dado por

$$\mathfrak{g}_{(i)} = \begin{bmatrix} x_{1n}(i) \dots x_{Mn}(i) y_n(i) \frac{\partial y_n}{\partial x_{1n}}(i), \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_{Mn}}(i) \end{bmatrix}$$

Se define la distancia entre dos reglas básicas como la distancia entre los vectores que la especifican, esto es:

$$d(R^i - R^j) = \mathfrak{g}_{(i)} - \mathfrak{g}_{(j)}$$

Donde  $\cdot$  indica una norma y  $R^i$  especifica la regla  $i$ . Si la distancia entre dos reglas es menor, esto es que los parámetros que la constituyen están/más próximos entre sí, entonces las reglas serán similares entre sí.

En general, en las aplicaciones no es útil un modelo borroso con tantas reglas como muestras, por lo que se debe realizar un proceso de reducción del número de las mismas. Una alternativa válida para la reducción es poder sintetizar en una regla grupos de reglas básicas próximas entre sí. El método de agrupamiento borroso "Fuzzy C-Means" posee la característica de que, dado un conjunto de datos vectoriales  $\mathbf{x}(k)$  de dimensión  $M$ ,  $1 \leq k \leq N$  donde  $N$  es el número de datos, se clasifican estos datos en un cierto número,  $L$ , de grupos borrosos. Un grupo borroso está caracterizado por  $w^i(k)$  que indica el grado de pertenencia del  $k$ -ésimo dato al correspondiente  $i$ -ésimo grupo,  $1 \leq i \leq L$ . Un producto extra de este método de agrupamiento es un arreglo de dimensión  $M \times L$  que representa el centro de cada grupo borroso. Este centro es un elemento representativo de los elementos que constituyen el grupo. En el presente trabajo, mediante el método de agrupamiento "Fuzzy C-Means" se realiza la deducción del número de reglas, obteniéndose un elemento representativo de cada una de ellas además de la partición del espacio de entrada.

## 2.3 Desarrollo del método de identificación

En este trabajo se suponen conocidas las variables de entrada al sistema, esto es, no se considera la identificación del medio ambiente (una propuesta para identificar el medio ambiente se encuentra en (Sugeno and Yasukawa, 1993)). Teniendo en cuenta lo anterior, los pasos a seguir para la identificación son los siguientes:

1) *Preprocesamiento de los datos*: Se realizan operaciones de filtrado sobre los datos para disminuir la influencia de ruido y fenómenos espurios. Otra operación que se debe realizar es la eliminación de datos repetidos. Bajo el concepto que se aplica este método de identificación dos datos iguales no brindan mayor información del sistema.

2) *Normalización de las entradas y la salida*: Es conveniente realizar una normalización antes de proceder a la identificación del modelo. Se suelen producir los siguientes problemas:

i) *Las variables involucradas son de distinta naturaleza y magnitud*: De esto surge que los rangos de variación de las mismas pueden ser muy dispares. Esto hace que el proceso de formación de grupos dé prioridad a las variables que tienen un rango de variación mayor.

ii) *Las señales involucradas pueden tener un rango de variación no lineal*: Por ejemplo para puntos de muestras donde la pendiente es cercana a 90 grados los valores de la pendiente cambian en una magnitud mayor que para valores cercanos a cero. (Por ejemplo la diferencia de 0.5 grados en la pendiente es de 57.2 entre 89 y 89.5 y de 0.0087 entre 0 y 0.5 grados).

iii) *Los datos pueden tener una distribución estadística no favorable*: Es conveniente que haya mayor densidad de datos de entrada en donde se producen mayores cambios en la función a identificar. Sucede que no siempre esto se cumple ya que los datos de identificación se obtiene a través de trayectorias donde las señales involucradas están correlacionadas unas con otras a través de fenómenos físicos.

En este artículo se realiza la normalización de los datos tanto de entrada como de salida al intervalo  $[0,1]$ , con la función lineal

$$x_{i_n}(k) = \frac{x_i(k) - \min_{j=1}^N(x_i(j))}{\max_{j=1}^N(x_i(j)) - \min_{j=1}^N(x_i(j))}$$

3) *Determinación del gradiente de la señal muestreada:* En este paso se determina para cada muestra la derivada parcial de la salida con respecto de cada entrada. Como este dato no se conoce se utiliza un método aproximado para la obtención del mismo. Dado un sistema con múltiples entradas y una salida, para cada medición se cumple

$$y_n(i) = f(x_{1_n}(i), x_{2_n}(i), \dots, x_{M_n}(i))$$

Se dispone de  $K$  mediciones de entrada - salida próximas al valor de muestra  $i$  y se desea encontrar el gradiente de la función para cada punto de muestra  $i$  dado por

$$\Delta y(i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_n}{\partial x_{1_n}}(i) & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{M_n}}(i) \end{bmatrix}$$

Realizando una aproximación por Taylor de primer orden sobre la función original se tiene que:

$$y_n(k) \approx y_n(i) + \frac{\partial y_n}{\partial x_{1_n}}(i)(x_{1_n}(k) - x_{1_n}(i)) + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_{M_n}}(i)(x_{M_n}(k) - x_{M_n}(i))$$

Operando resulta:  $e_i(k) \approx \phi_i(k) \theta_i(k)$  donde

$$e_i(k) = [y_n(k) - y_n(i)]$$

$$\phi_i(k) = [(x_{1_n}(k) - x_{1_n}(i)), \dots, (x_{M_n}(k) - x_{M_n}(i))]$$

$$\theta_i(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_n}{\partial x_{1_n}}(i) & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{M_n}}(i) \end{bmatrix}^T$$

Para las  $K$  muestras se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\Phi_i \theta_i = e_i$$

donde

$$\Phi_i = [\phi_i^T(1) \quad \dots \quad \phi_i^T(K)]^T$$

$$e_i = [e_i(1) \quad \dots \quad e_i(K)]^T$$

$$\theta_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_n}{\partial x_{1_n}}(i) & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{M_n}}(i) \end{bmatrix}^T$$

Debido a que los  $K$  datos de muestras pueden estar a distinta distancia al punto donde se desea obtener el gradiente, se define una función que toma en cuenta con mayor peso los puntos de muestra cercanos al punto  $i$ . La función de peso se puede definir de la forma

$$w_{kk}(i) = e^{-\delta \| \mathbf{x}_n(k) - \mathbf{x}_n(i) \|} \quad (7)$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma de vector y  $\delta$  es una constante positiva. Se construye la siguiente matriz de peso

$$\mathbf{W}_i = \text{diag}(w_{11}(i), \dots, w_{kk}(i))$$

y se resuelve el sistema lineal empleando el método de mínimos cuadrados ponderados

$$\theta_i = (\Phi_i^T \mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_i \Phi_i)^{-1} \Phi_i^T \mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_i e_i$$

Aplicando este algoritmo para los  $N$  puntos de muestra se obtiene el gradiente para toda la señal muestreada.

Debido a ii) es conveniente realizar una normalización sobre la pendiente antes de aplicar el algoritmo de agrupamiento. Se propone como función de normalización de la pendiente

$$\left[ \frac{\partial y_y}{\partial x_{i_n}} \right]_n = \frac{\arctg(\partial y_n \partial x_{i_n})}{\pi} + 0.5$$

La que calcula el arco tangente del gradiente y posteriormente lo normaliza entre 0 y 1.

4) *Agrupamiento de las reglas básicas*: Se forma la matriz con los datos que definen las reglas básicas como

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_{I_n}(1) & \cdots & x_{M_n}(1) & y_n(1) & \left[ \frac{\partial y_n}{\partial x_{I_n}}(1) \right]_n & \cdots & \left[ \frac{\partial y_n}{\partial x_{M_n}}(1) \right]_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{I_n}(N) & \cdots & x_{M_n}(N) & y_n(N) & \left[ \frac{\partial y_n}{\partial x_{I_n}}(N) \right]_n & \cdots & \left[ \frac{\partial y_n}{\partial x_{M_n}}(N) \right]_n \end{bmatrix}$$

Se procede a agrupar con el método Fuzzy C-Means los datos contenidos en  $\Phi$ . El método de formación de grupos Fuzzy C-Means forma grupos borrosos asignándole a cada vector dato (fila de  $\Phi$ ) un valor de pertenencia entre 0 y 1 a cada uno de los grupos borrosos. Como resultado se obtiene una matriz con el grado de pertenencia de cada vector dato a cada grupo. Por otro lado, cada grupo presenta un centro en el espacio de dimensión  $2M+1$ . Para cada dato, el valor de pertenencia a los distintos grupos depende de la distancia a los centros de los grupos. Debido a que el algoritmo de formación de grupos Fuzzy C-Means agrupa los datos de acuerdo a su proximidad, el mismo está influenciado considerablemente por la manera que se define la distancia entre los datos, esto es, la norma utilizada y el rango de variación de las variables. Debido a esto es que se realiza la normalización. El número de grupos se puede determinar de acuerdo al criterio usado en (Sugeno and Yasukawa, 1993).

5) *Determinación de los conjuntos borrosos de las premisas*: Una vez realizado el agrupamiento borroso se procede a encontrar los conjuntos borrosos de las premisas, para ello se asigna a los datos de entrada el valor de pertenencia que surge del método de agrupamiento de las reglas, esto es asignar

$$w^j(x_{I_n}(k), \dots, x_{M_n}(k)) =$$

$$w^j \left( x_{I_n}(k), \dots, x_{M_n}(k), y_n(k), \left[ \frac{\partial y_n}{\partial x_{I_n}}(k) \right]_n, \dots, \left[ \frac{\partial y_n}{\partial x_{M_n}}(k) \right]_n \right)$$

Para la obtención de los conjuntos borrosos de entrada se puede proceder de varias maneras. Una alternativa es realizar la proyección de los grupos resultantes en la premisa sobre cada variable de entrada como se muestra en la Figura 1 (a) y (b) con los inconvenientes ya mencionados al realizar la composición. Se propone en este artículo otra alternativa para la definición de los conjuntos borroso de dimensión  $M$  de la entrada. Como resultado del método de agrupamiento resulta un centro para cada grupo borroso. Se utilizan los centros que corresponden a las variables de entrada, esto es las primeras  $M$  componentes y el grado de pertenencia se obtiene como función de la distancia:

$$w^j(k) = 1 - \sum_{j=1}^c \left( \frac{d_{ik}}{d_{jk}} \right)^2 \quad (8)$$

donde  $d_{ik} = x(k) - v_i$  es la distancia del dato  $x(k)$  al centro  $v_i$  (primeras  $M$  componentes del centro que entrega el algoritmo de agrupamiento). Los resultados obtenidos de esta manera presentan una forma convexa en el espacio  $M$ -dimensional de las variables de entrada. Muchas veces las funciones de pertenencia que surgen de asignar el peso de los datos de dimensión  $2M+1$  a los datos de entrada de dimensión  $M$ , no tiene una forma convexa. En la Figura 6 se observa que los conjuntos borrosos que surgen en la identificación de un casquete esférico no siempre son convexos. En la Figura 7 se puede observar que la aproximación de la función de pertenencia usando (8) presenta conjuntos convexos en el plano  $x_1$ - $x_2$  pero no aproximan en forma correcta los conjuntos borrosos que surgen del algoritmo

de agrupamiento. Una alternativa propuesta es la obtención de grupos con múltiples centros. Para ello se obtiene los puntos del grupo donde la función de pertenencia es mayor a 0.5, se realiza un agrupamiento de estos datos con un número de grupos determinado, y se utilizan los centros que surgen para la determinación de la función de pertenencia. Para el cálculo de la pertenencia se considera que los múltiples centros de un grupo dan origen a subgrupos y la función de pertenencia al grupo se obtiene como la suma de las funciones de pertenencia a los subgrupos. Este método presenta, respecto de utilizar un mayor número de grupos en el método de agrupamiento, la diferencia de que el número de reglas y por lo tanto los parámetros del consecuente no se incrementan. En la Figura 8 se observa la aproximación con múltiples centros de las funciones de pertenencia mostradas en la Figura 6.

6) *Identificación paramétrica del modelo:* Una vez obtenida la función de pertenencia a los distintos grupos se procede a la identificación paramétrica con la forma tradicional del método de Takagi y Sugeno. Definiendo

$$y = [y_n(1) \quad y_n(2) \quad \dots \quad y_n(N)]^T$$

$$p^* = [p_0^1 \quad \dots \quad p_0^L \quad p_1^1 \quad \dots \quad p_1^L \quad \dots \quad p_M^1 \quad \dots \quad p_M^L]^T$$

$$X = \begin{bmatrix} \phi^1(1) & \dots & \phi^1(1) & x_{11}(1)\phi^1(1) & \dots & x_{1n}(1)\phi^1(1) & \dots & x_{M1}(1)\phi^1(1) & \dots & x_{Mn}(1)\phi^1(1) \\ \phi^2(1) & \dots & \phi^2(1) & x_{11}(2)\phi^2(1) & \dots & x_{1n}(2)\phi^2(1) & \dots & x_{M1}(2)\phi^2(1) & \dots & x_{Mn}(2)\phi^2(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^L(1) & \dots & \phi^L(1) & x_{11}(L)\phi^L(1) & \dots & x_{1n}(L)\phi^L(1) & \dots & x_{M1}(L)\phi^L(1) & \dots & x_{Mn}(L)\phi^L(1) \end{bmatrix}$$

Donde  $y$  es el vector de salida,  $p^*$  es el vector de parámetros y  $X$  es la matriz de entradas pesadas. El vector de salida se puede escribir como  $y = Xp^*$ . La identificación se reduce a resolver la ecuación encontrando el vector  $p^*$  mediante un algoritmo de mínimos cuadrados tradicional como  $p^* = (X^T X)^{-1} X^T y$ . Este algoritmo necesita almacenar la matriz  $X$ . Si la cantidad de muestras a procesar es grande puede haber problemas de recursos, por lo que se puede

utilizar un algoritmo de mínimos cuadrados recursivo.

7) *Ajuste de parámetros:* Una vez realizada la identificación de los parámetros del consecuente, se realiza un ajuste del modelo. Éste produce la disminución del índice cuadrático del error por la corrección tanto de los parámetros del antecedente (centros de los conjuntos borrosos) como del consecuente (parámetros de las funciones de salida) en forma simultánea. Para ello se utilizan rutinas de optimización estándar. En estas rutinas se debe definir tanto el funcional a optimizar como el gradiente del mismo respecto de las variables de optimización (Ver "MATLAB® Optimization Toolbox, 1996 User's Guide). A continuación se desarrolla tanto el funcional usado como el gradiente del mismo.

Dado el índice de error cuadrático definido por

$$J = \sum_{i=1}^N (y_n(i) - \hat{y}_n(i))^2$$

donde

$$\hat{y}_n(i) = \sum_{j=1}^L w^j (v_1, \dots, v_L, x_n) p^{jT} x_e(i)$$

$$p^j = [p_0^j \quad p_1^j \quad \dots \quad p_M^j]^T$$

$$x_e(i) = [1 \quad x_{1n}(i) \quad \dots \quad x_{Mn}(i)]^T$$

La función de pertenencia es definida como

$$w^j(v_1, \dots, v_L, x_n) = 1 \sum_{j=1}^L d^j$$

$$\text{donde } d^j = (x_n - v_j)^T (x_n - v_j).$$

En este modelo se cumple que  $\sum_{j=1}^L w^j = 1$  por lo tanto  $\phi^j = w^j$ .

Los parámetros del sistema a ajustar se definen como



$$z = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_I^T & \dots & \mathbf{v}_L^T & \mathbf{p}^I{}^T & \dots & \mathbf{p}^L{}^T \end{bmatrix}^T$$

Estos son los parámetros de optimización del sistema. El gradiente del funcional se obtiene como

$$\nabla J = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{v}_I} \right)^T & \dots & \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{v}_L} \right)^T & \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^I} \right)^T & \dots & \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^L} \right)^T \end{bmatrix}^T$$

donde

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{v}_k} = -2 \sum_{i=1}^N (y_n(i) - \hat{y}_n(i)) \frac{\partial \hat{y}_n(i)}{\partial \mathbf{v}_k}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}^k} = -2 \sum_{i=1}^N (y_n(i) - \hat{y}_n(i)) \frac{\partial \hat{y}_n(i)}{\partial \mathbf{p}^k}$$

$$\frac{\partial \hat{y}_n(i)}{\partial \mathbf{v}_k} = \frac{\partial \sum_{j=1}^L w^j(\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_L, \mathbf{x}_n) \mathbf{p}^j{}^T \mathbf{x}_e(i)}{\partial \mathbf{v}_k}$$

$$= \sum_{j=1}^L \left( \frac{\partial w^j(\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_L, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{v}_k} \right) \mathbf{p}^j{}^T \mathbf{x}_e(i)$$

$$\frac{\partial \hat{y}_n(i)}{\partial \mathbf{p}^k} = \frac{\partial \sum_{j=1}^L w^j(\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_L, \mathbf{x}_n) \mathbf{p}^j{}^T \mathbf{x}_e(i)}{\partial \mathbf{p}^k}$$

$$= w^k(\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_L, \mathbf{x}_n) \mathbf{x}_e(i)$$

El término  $\frac{\partial w^i(\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_L, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{v}_k}$  se obtiene como

$$\frac{\partial w^i(\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_L, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{v}_k} = \frac{1}{f_I^2(\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_L, \mathbf{x}_n)} \left( \frac{\partial f_I(\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_L, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{v}_k} \right)$$

$$f_I(\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_L, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_I)^T (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_I)$$

$$\sum_{j=1}^L (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_j)^T (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_j)$$

$$\frac{\partial f_I(\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_L, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{v}_k} = \frac{\partial f_{I1}}{\partial \mathbf{v}_k} f_{I2} + f_{I1} \frac{\partial f_{I2}}{\partial \mathbf{v}_k}$$

$$f_{I1} = (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_I)^T (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_I)$$

$$f_{I2} = \sum_{j=1}^L (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_j)^T (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_j)$$

$$\frac{\partial f_{I1}}{\partial \mathbf{v}_k} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{v}_I \neq \mathbf{v}_k \\ -2(\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_k) & \text{si } \mathbf{v}_I = \mathbf{v}_k \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_{I2}}{\partial \mathbf{v}_k} = \frac{2}{[(\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_k)^T (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_k)]^2} (\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_k)$$

Debe notarse que  $w^i = 1$  cuando  $\mathbf{x}_n = \mathbf{v}_i$  y  $\frac{\partial w^i}{\partial \mathbf{v}_k} = 0$  cuando  $\mathbf{x}_n = \mathbf{v}_j$  para  $j = 1 \dots L$ .

## 2.4 Determinación de la zona de validez del modelo.

Todo sistema real presenta características de acotamiento. Las cotas se presentan tanto en las entradas, en las salidas ó en los estados. Las entradas de los sistemas son acciones de control que provienen de un actuador cuyos valores están limitados por el sistema físico del mismo. Todo los sistemas, aún los que tienen característica integral, poseen una salida acotada después de cierto tiempo. Por último, cuando los estados tienen un significado físico, estos también están acotados. Estas cotas en general son conocidas, por lo menos en un rango amplio y deben estar contempladas en el modelo matemático que representa el sistema.

Cuando se obtiene un modelo por identificación, esto es a partir de los datos de entrada y salida del sistema, se agregan a las cotas producidas por las limitaciones físicas de los sistemas las que surgen del espectro de los datos con los que se ha producido la identificación. Estrictamente el modelo sólo se puede considerar válido para las señales con las que se ha producido la identificación. Los modelos obtenidos por un proceso de identificación, deben reflejar tanto las características de acotamiento debidas a las limitaciones físicas del sistema como de las producidas por el proceso de identificación.

### 2.4.1 Establecimiento de los datos válidos

Para un sistema borroso del tipo Takagi - Sugeno, dado (1), (2), (4) y (8) resulta que la función de pertenencia es una función de la distancia del dato al centro de los grupos. Este tipo de modelo borroso no presenta características de acotamiento de la salida en forma intrínseca como presenta un modelo del tipo lingüístico, ya que la función de salida crece a medida que las entradas crecen.

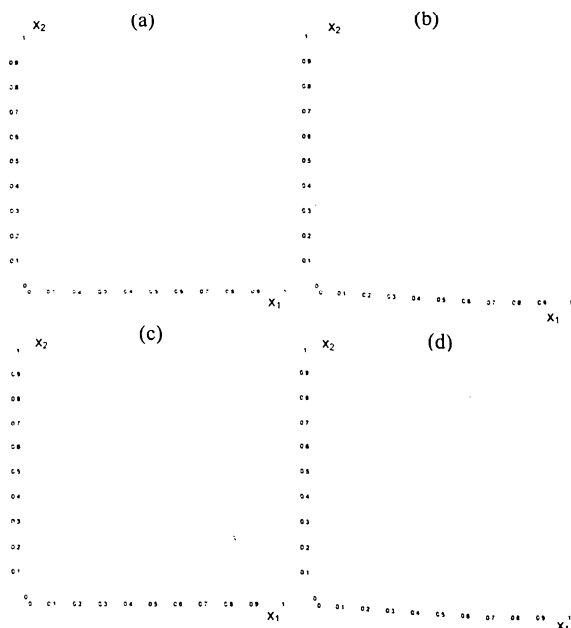


Figura 3. Zona de operación teniendo en cuenta el acotamiento. (a) Mínimo y máximo de los datos. (b) Mínimo y máximo por grupo. (c) Norma 2 por grupo. (d) Norma infinito por grupo.

En la Figura 3 se muestran distintas alternativas para saber si un dato de entrada ( $x_1, x_2$ ) es válido para el modelo dado. En la Figura 3 (a) se muestra la menos restrictiva de todas que es establecer el mínimo y el máximo para cada variable de entrada. Esto implica que el modelo queda definido con dos parámetros adicionales para cada entrada. En la Figura 3 (b) se muestra la limitación de mínimo y máximo pero por grupo. El número de parámetros será dos por el número de grupos por el número de entradas. En las Figura 3 (c) y (d) se muestra como se puede establecer la zona de validez del modelo con un sólo parámetro adicional, esto es, la norma del dato más alejado del centro del grupo. Para el

caso de la Figura 3 (c) se usa la norma dos y en la Figura 3 (d) la norma infinito. Para estos casos se considera que un dato pertenece al grupo para el cual la función de pertenencia es mayor. Si las componentes del vector de entrada están fuera de la región asignada para cada caso, entonces el dato no pertenece al patrón de aprendizaje.

### 2.4.2 Acotamiento de los datos de entrada

La propuesta realizada en esta sección es acotar los valores de entrada para que la salida permanezca acotada. La forma para introducir el dato de entrada en la zona de trabajo es la siguiente.

- 1 Dado el dato de entrada, calcular la función de pertenencia del mismo a los distintos grupos.
- 2 Establecer a cual grupo pertenece mayoritariamente.
- 3 Calcular la distancia del dato al centro del grupo que pertenece mayoritariamente.
- 4 Si la distancia es mayor que la cota establecida para ese grupo acotar la distancia a la cota máxima establecida para el grupo.

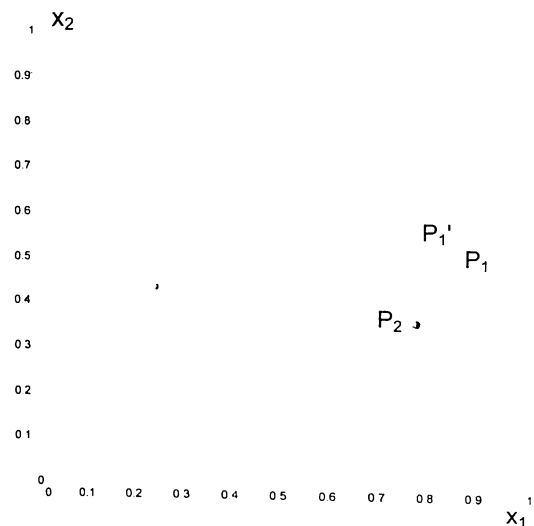


Figura 4. Ejemplo de acotamiento de los datos de entrada.

En la Figura 4 se dan dos ejemplos. Para el dato de entrada  $P_2$ , la distancia entre el mismo y el centro del grupo al que pertenece mayoritariamente es menor que la cota establecida para el mismo

grupo, por lo tanto este sigue manteniendo el mismo valor. El dato  $P_1$  se encuentra fuera de la zona de trabajo y por lo tanto se acota su distancia al grupo que pertenece mayoritariamente.

### 3 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

#### 3.1 Casquete esférico.

En la Figura 5 se presenta la identificación de un casquete esférico. En la Figura 6 se muestran las curvas de nivel de los pesos que se obtienen directamente del método de agrupamiento. En las Figuras 7 y 8 se observan las curvas de nivel de los grupos aproximados con uno y con ocho centros por grupo. Se aprecia la mejora considerable al aumentar el número de centros por grupo, con lo cual se pueden aproximar los grupos no convexos.

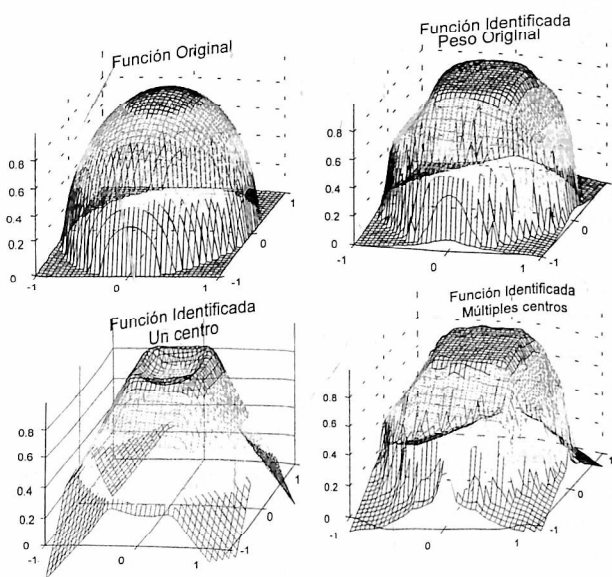


Figura 5. Identificación de un casquete esférico.

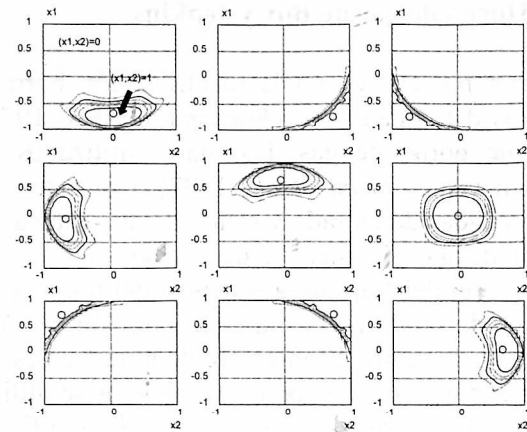


Figura 6: Grupos de la entrada originales.

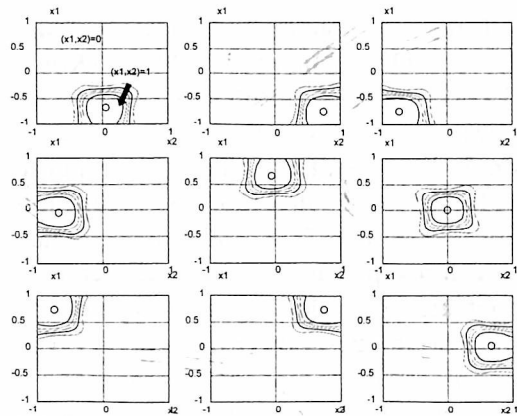


Figura 7: Grupos de la entrada con un centro.

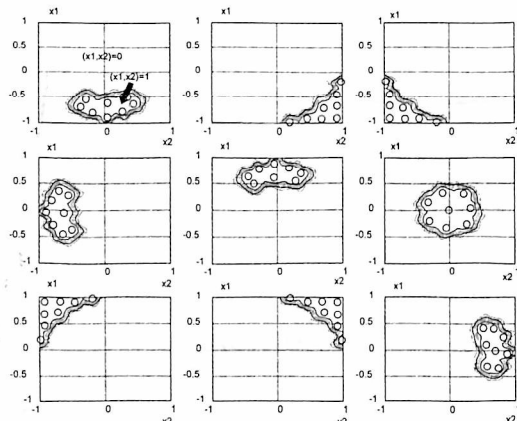


Figura 8: Grupos de la entrada con múltiples centros.

### 3.2 Horno de gas de Box y Jenkins

Un ejemplo clásico en la identificación borrosa son los datos dados en (*Box and Jenkins*, 1970) para un horno de gas. Los datos utilizados se pueden ver en (*Kim et al.*, 1997). Consisten de 296 medidas de entrada y salida de un sistema de horno de gas: la medida de entrada  $u(k)$  es la proporción del flujo de gas dentro del horno y la medida de salida  $y(k)$  es la concentración de  $CO_2$  en el gas de salida. El intervalo de muestreo es de 9 s. Por comparación con otros modelos se utiliza como entradas al sistema  $u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ ,  $u(k-3)$ ,  $y(k-1)$ ,  $y(k-2)$  y  $y(k-3)$ . En las Figuras 9 y 10, se observan los resultados de la identificación para 8 reglas con 4 centros por regla.

La Tabla 1, obtenida de (*Sugeno and Yasukawa*, 1993), (*Kim et al.*, 1997) y (*Kim et al.*, 1998), muestra resultados previos de identificación borrosa. En la Tabla 2 se muestran los resultados de la propuesta realizada en este artículo. Se realizaron identificaciones con 2, 4 y 8 grupos (reglas) con 4 centros por grupo. El coeficiente de error obtenido para dos reglas es ligeramente inferior a la propuesta de (*Kim et al.*, 1997) y (*Kim et al.*, 1998). Se puede observar que al aumentar el número de reglas el coeficiente de error disminuye considerablemente. Para el mismo número de parámetros el índice de error de la propuesta realizada se mantiene ligeramente inferior a las propuestas anteriores.

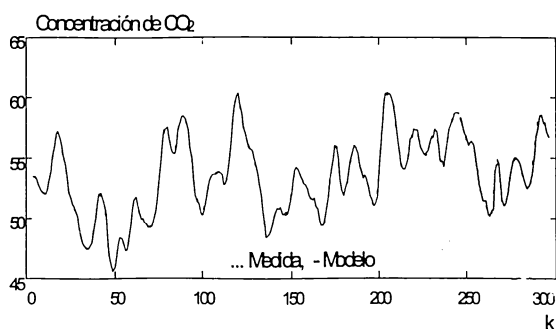


Figura 9. Resultados de la identificación de la concentración de  $CO_2$  con 8 grupos y 4 centros por grupo.

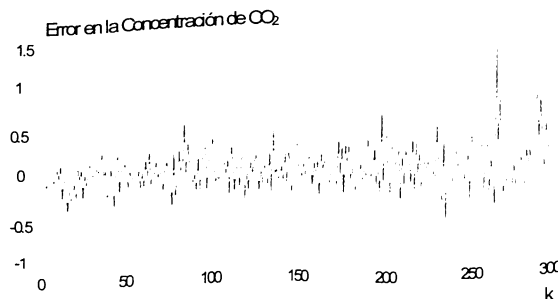


Figura 10. Error de la concentración de  $CO_2$  con el modelo borroso con 8 grupos y 4 centros por grupo.

## 4 CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una metodología para la identificación de la estructura de un modelo del tipo Takagi-Sugeno. Se parte del cálculo de la derivada de la salida respecto a cada entrada y posteriormente con el método de agrupamiento "Fuzzy C-means" se realiza la identificación de la estructura y parámetros de las premisas. Con la metodología tradicional se determinan los parámetros del consecuente. Posteriormente con un algoritmo de optimización se realiza el ajuste final de los parámetros.

La definición utilizada de los conjuntos borroso sobre las entradas tiene la ventaja que puede aproximar con mayor precisión conjuntos borrosos no convexos, mejorando el índice de error. Como contrapartida los conjuntos borrosos resultantes no poseen a simple vista una interpretación lingüística, debido a que su definición se da por medio de los centros de los grupos borrosos.

Si se realiza la proyección de los conjuntos borrosos de las premisas sobre las variables de entrada (similar a la utilizada por (*Sugeno and Yasukawa*, 1993)) se pueden obtener resultados similares a otros métodos.

Como futuras líneas de investigación se presentan la obtención del gradiente de la señal muestreada en forma más eficiente, la optimización del proceso de normalización y la utilización de métodos de agrupamiento que permitan obtener grupos con centros orientados.

Tabla 1. Comparación entre otros métodos de identificación.

Modelo	Entradas	Nº de Entra-das	Nº de Reglas	Nº de parámetros	Cof. de Error
Tong (1980)	$y(t-1), u(t-4)$	2	19	-	0.469
Pedryc (1984)	$y(t-1), u(t-4)$	2	81	-	0.320
Xu y Lu (1987)	$y(t-1), u(t-4)$	2	25	-	0.328
Box y Jenkins (1970)	$y(t-1), y(t-2)$ $u(t-3), u(t-4), u(t-5)$	5	-	10	0.202
Sugeno Yasukawa (1993)	$y(t-1), u(t-3), u(t-4)$	3	6	96	0.190
Wang y Langari (1995)	-	6	2		0.066
Sugeno y Tanaka (1991)	$y(t-1), y(t-2), y(t-2)$ $u(t-1), u(t-2), u(t-3)$	6	2	17	0.068
Lin y Cuningham (1995)	-	5	4	354	0.071
Kim et al.(1997)	$y(t-1), y(t-2), y(t-2)$ $u(t-1), u(t-2), u(t-3)$	6	2	38	0.055
Kim et al. (1998)	$y(t-1), y(t-2), y(t-2)$ $u(t-1), u(t-2), u(t-3)$	6	2	110	0.048

Tabla 2. Resultados de la identificación propuesta.

Número de reglas	Número. Centro/regla	Número de parámetros	Coficiente error Inicial	Coficiente Error Ajustado
2	1	$26+14^*=40$	0.0580	0.0524
2	4	$62+14^*=76$	0.0575	0.0359
4	1	$52+14^*=66$	0.0540	0.0404
4	4	$124+14^*=138$	0.0523	0.0224
8	1	$108+14^*=122$	0.0464	0.0266
8	4	$248+14^*=262$	0.0460	0.0200

\* Parámetros utilizados para la normalización. Para este caso como se usan como entradas valores pasados de  $y(k)$  y de  $u(k)$  en realidad son sólo 4 (dos para la entrada y dos para la salida).

\*\* Las entradas usadas son  $y(t-1)$ ,  $y(t-2)$ ,  $y(t-2)$ ,  $u(t-1)$ ,  $u(t-2)$ ,  $u(t-3)$

## REFERENCIAS

- Bezdek, J *Pattern Recognition whit Fuzzy Objective Function Algorithms, Second Printing*. Plenum Press, New York, 1987.
- Kim, E., Park, M., Ji, S. and Park, M. *A new Approach to Fuzzy Modelling*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.,5, No.,3. pag 328-337, 1997.
- Kim, E., Park, M., Seungwoo K. and Park, M. *A Transformed Input-Domain Approach to Fuzzy Modelling*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.,6, No. 4. Pag. 596-604, 1998.
- Math Works, Inc. "MATLAB® Optimization TOOLBOX, User's Guide", 1996.
- Peña, M., di Sciascio, F. y Carelli, R. *Identificación de la estructura de un modelo borroso del tipo Takagi -Sugeno*. VIII Congreso Latinoamericano de Control Automático. Viña del Mar, Chile. (2) 403 – 408, 1998.
- Sugeno,M and Yasukawa T. *A Fuzzy Logic based approach to qualitative modeling*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.1 No.1. pag 7-31, 1993.
- Takagi, T. and Sugeno, M. *Fuzzy Identification of systems and its application to modeling an control*, IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, Vol. 15. No. 1. Pag. 116-132, 1985.
- Yager, R., Ovchinnikov, Tong, R. and Nguyen, H. *Fuzzy sets and applications*, selected paper by L. A. Zadeh. John Wiley & Sons. New York, 1987.