

UNA CARACTERIZACIÓN EXPERIMENTAL DEL FLUJO TAYLOR COUETTE

DIANA LÓPEZ OCHOA

Ingeniera Mecánica, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

JORGE ALBERTO NARANJO

Escuela de Geociencias y Medio Ambiente, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Recibido para revisión 1 de Junio de 2002, aceptado 22 de Julio 2002, versión final recibida 25 de Agosto 2002.

RESUMEN: El comportamiento de un fluido entre cilindros concéntricos que rotan independientemente es un problema clásico de inestabilidad hidrodinámica. Una de las características de este sistema es la facilidad en el control de los parámetros que lo definen, permitiendo estudiar muchos conceptos de importancia en ingeniería, matemáticas y física aplicada. Este trabajo presenta los principales resultados experimentales obtenidos al estudiar la estabilidad del flujo de Couette circular de una mezcla de agua y trazador particulado en un equipo Taylor Couette construido en la Facultad de Minas, y algunas anotaciones sobre la teoría de estabilidad lineal. La velocidad crítica de aparición de los vórtices de Taylor se determinó visualmente para cuatro tamaños de anillo de fluido diferentes.

PALABRAS CLAVES: Inestabilidad, Flujo Taylor Couette, Funciones Bessel, Hidrodinámica, Vórtices.

ABSTRACT: The behavior of a fluid contained between two concentric cylinders with relative rotating motion is a classical problem in hydrodynamic instability. This system can be characterized by easily controlled parameters that allow studying many important concepts in engineering, mathematics and applied physics. In this work, the main experimental results regarding the circular Couette flow stability of a water - tracer mix in a Taylor Couette apparatus are presented together with some annotations on linear stability theory. The critical speed was visually determined for four different gaps between the cylinders.

KEY WORDS: Instability, Taylor Couette flow, Bessel functions, hydrodynamics, vortex flow.

1 INTRODUCCIÓN

Durante un siglo, los investigadores en dinámica de fluidos se han ocupado de estudiar el comportamiento de un fluido entre dos cilindros concéntricos que rotan independientemente. La variación de la velocidad de alguno de los cilindros produce cambios en los regímenes de flujo. Estos fenómenos se pueden poner en evidencia al inyectar un colorante entre los cilindros. El aumento en la velocidad de rotación del cilindro interior produce una inestabilidad en el flujo de Couette: aparecen patrones de flujo diferentes cada vez que se superan los valores críticos de un número adimensional denominado de Taylor, caracteri-

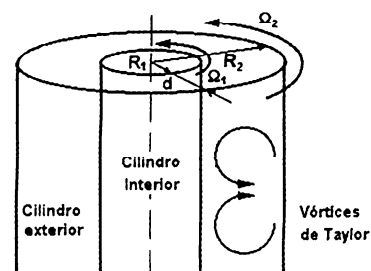


Figura 1. Esquema del sistema Taylor Couette

zados todos los patrones principalmente por estructuras toroidales localizadas periódicamente y centradas en el eje principal de los cilindros (Vórtices de Taylor). La Figura 1 presenta un esquema de este sistema.

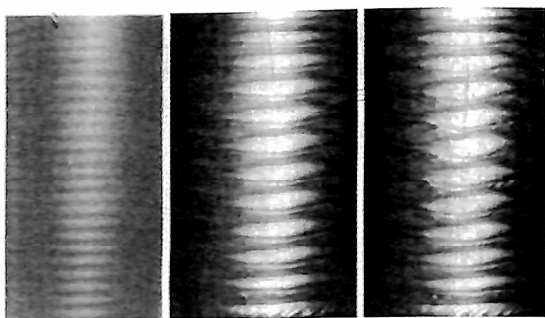


Figura 2. Flujo Vortical de Taylor, Flujo vortical ondulante y ondulante modulado.

Cuando el cilindro exterior permanece en reposo y el interior rota, se puede observar una secuencia de bifurcaciones que comienza a partir del Flujo Circular de Couette (FCC), el cual evoluciona en un flujo periódico axial conocido como Flujo Vortical de Taylor (FVT). Los vórtices se generan por pares, y en cada vórtice el fluido realiza recorridos en espiral en torno a un toro, invirtiéndose el sentido de ésta de un vórtice al siguiente. En este patrón, la velocidad en cada punto es la misma en cualquier instante. Si se aumenta más la velocidad del cilindro interior se siguen observando vórtices, pero un patrón de ondas en la dirección tangencial se superpone al flujo de Taylor, la frontera entre ellos desarrolla una forma ondulante y el flujo deja de ser estacionario. Este es el Flujo Vortical Ondulante (FVO). Posteriormente se alcanzan estados como el Flujo Ondulatorio Modulado (FVOM), Vórtices Turbulentos (FVT) y finalmente el Flujo Turbulento (FT). En la Figura 2 se muestran algunos de los estados descritos anteriormente.

Alrededor de 1885 en París, Maurice Couette comenzaba a construir y a experimentar con viscosímetros de cilindros concéntricos. En un extenso estudio sobre viscosidad mostró que para velocidades angulares pequeñas del cilindro interior, la viscosidad del agua, obtenida de una curva torque vs. velocidad, permanecía constante hasta que se alcanza una velocidad crítica de rotación, a partir de ésta la relación entre torque y velocidad angular deja de ser lineal; Couette interpretó este comportamiento como el comienzo de

la turbulencia (*Donnelly, 1991*). Casi treinta años después, Geoffrey Ingram Taylor descubrió esta aparición de bifurcaciones en el flujo y estudió teóricamente la primera de ellas utilizando la teoría de estabilidad lineal (*Taylor, 1923*). El ajuste de sus resultados teóricos con los experimentales es asombroso. De estos dos investigadores toma su nombre el flujo que aparece entre cilindros concéntricos que pueden rotar independientemente: El flujo Taylor Couette.

El flujo Taylor Couette es un problema clásico de inestabilidad hidrodinámica debido a que su geometría es simple, se conocen las ecuaciones que gobiernan el flujo y el parámetro de control, mientras que las condiciones de experimentación están bien definidas, se gobiernan con relativa facilidad y los patrones de flujo pueden observarse fácilmente.

Desde su descubrimiento, el flujo Taylor-Couette ha atraído el interés de gran variedad de estudiosos de muy diversos campos, desde ingenieros de lubricación hasta matemáticos puros; no sólo por la belleza de los impresionantes patrones que alcanzan los flujos, sino porque posee, como se mencionó anteriormente, características que lo hacen fácil de producir, controlar, y permite estudiar flujos completamente distintos con sólo variar las condiciones de frontera. Por mencionar algunos aspectos sobresalientes, el estudio de este flujo permite acercarse a las ideas fundamentales de la dinámica no lineal, la cual tiene muchas aplicaciones en diversos campos de investigación, permite estudiar bifurcaciones, mantener una constante interacción entre teoría y experimentación, plantear y probar nuevas simulaciones numéricas y tratamientos teóricos quizá de manera más "simple", gracias a la simetría del sistema. Ha mostrado una gran variedad de comportamientos en su camino a la turbulencia, y muchos de los conceptos de la teoría del caos han visto en él su realización experimental. De hecho, las experiencias en flujo Taylor-Couette mostraron las primeras evidencias contundentes de la existencia del comportamiento caótico. El movimiento de fluidos

entre superficies que rotan está presente en numerosas aplicaciones de ingeniería, donde el campo de flujo rotante está dominado por la inestabilidad centrífuga y la evolución de estructuras de vórtices. El conocimiento del movimiento de fluidos entre cilindros puede ayudar en la predicción de torques y transferencia de masa y calor. (Mobbs *et al.*, 1974; Andereck, 1992). La predicción del comienzo de las inestabilidades que pueden resultar en la aparición de nuevos patrones de flujo o en turbulencia y su dependencia con los parámetros de flujo es una herramienta fundamental en el mejoramiento de diversos procesos tecnológicos.

A pesar de los grandes progresos que se han dado en la comprensión de algunas de las inestabilidades básicas y los patrones de flujo resultantes en el sistema Taylor-Couette, aún permanece una gran cantidad de trabajo por realizar.

2 ANOTACIONES PREVIAS SOBRE LA TEORÍA DE ESTABILIDAD LINEAL

Suponga que se tiene un sistema hidrodinámico en estado estacionario; por tanto ninguna de los parámetros que describen el sistema dependen del tiempo. Sean x_1, x_2, \dots, x_j un conjunto de tales parámetros en los que se incluyen parámetros geométricos como las dimensiones del sistema, parámetros que caracterizan el campo de velocidades que prevalece; las magnitudes de las fuerzas que pueden actuar sobre el sistema tales como gradientes de presión, gradientes de temperatura, campos magnéticos o rotaciones entre otros. Cuando se estudia la estabilidad de un sistema lo que se busca esencialmente es determinar la reacción de éste a pequeñas perturbaciones en los parámetros que lo representan.

Considere la estabilidad de un sistema hidrodinámico establecido por un flujo viscoso incompresible, con distribución de velocidades $\vec{V}(r, \theta, z)$ y campo de presiones $p(r, \theta, z)$, las cuales son soluciones de las ecuaciones de Navier Stokes, y supóngase que en un momento $t = 0$ esta solución es ligeramente alterada por una perturbación arbitraria e

infinitesimal $\mathbf{v}'(r, \theta, z, t)$ en la velocidad y $p'(r, \theta, z, t)$ en la presión. Para estudiar la estabilidad del flujo se observa la evolución de las perturbaciones, teniendo en cuenta que $V + \mathbf{v}'$ y $p + p'$ deben satisfacer las ecuaciones de movimiento y que están sujetas a las mismas condiciones de frontera que las soluciones para V y p .

Si la perturbación desaparece gradualmente o se amortigua se dice que el sistema es estable respecto de esa perturbación particular, y si por el contrario su amplitud crece, se dice que el sistema es inestable. En términos generales se puede decir que la inestabilidad ocurre porque hay alguna perturbación del equilibrio de fuerzas en el fluido (Drazin and Reid, 1982).

Según esta definición un flujo inestable no necesariamente conduce a un movimiento turbulento; puede conducir a un nuevo movimiento laminar que para las nuevas condiciones sea más estable. Efectivamente se verá que ésta última es la situación que ocurre en las primeras inestabilidades del flujo de Couette de un fluido viscoso entre dos cilindros en rotación.

Usualmente conviene suponer que todos los parámetros del sistema se mantienen constantes excepto uno, que varía continuamente. Se dice entonces que se pasó de un estado estable a otro cuando el parámetro particular en su variación alcance un cierto valor crítico, siempre el mismo, a partir del cual el flujo se reordena en otra forma estable. Para este sistema se ha seleccionado el número de Taylor T_a definido por:

$$T_a = \frac{4\Omega_1^2}{\nu^2} \frac{R_1^2 d^4}{(R_2^2 - R_1^2)} \quad (1)$$

Donde Ω_1 es la velocidad angular del cilindro interior, ν es la viscosidad cinemática del fluido, R_1 y R_2 son los radios de los cilindros interior y exterior respectivamente y d es la diferencia de los radios de los cilindros $R_2 - R_1$. Para valores del número de Taylor T_a suficientemente pequeños, la acción de la viscosidad amortigua todas las perturbaciones; el aumento de T_a lleva a un valor crítico T_{ac} , a

partir del cual como mínimo una perturbación no se amortiguará.

Para estudiar el problema de estabilidad hidrodinámica es necesario trazar el comportamiento temporal de la solución de un sistema muy complejo de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, las cuales satisfacen un grupo de condiciones de frontera y unas condiciones iniciales dadas. Por esta razón, muchos investigadores consideran únicamente el problema de estabilidad lineal obtenido al despreciar los términos de orden mayor que uno en las cantidades que se han perturbado. Uno de los métodos estándar de resolver el problema de estabilidad lineal es el análisis de modos normales (*DiPrima*, 1963). Este método asume que las perturbaciones $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ de cada cantidad pueden ser expresadas en componentes independientes. Después de separar las variables como $\mathbf{v} = T(t)V^*(x, y, z)$ se expresa la dependencia con el tiempo por medio de una función exponencial $T(t) = \exp(\sigma t)$, y se estudia el comportamiento de σ . Si σ es negativo el sistema es estable, pues a medida que transcurre el tiempo el crecimiento de la perturbación se amortigua; de manera contraria, si σ es positivo el sistema es inestable. Este puede llamarse "Método de Heisenberg".

Los principales resultados que se pueden obtener de la teoría lineal de estabilidad para el flujo Taylor Couette son la predicción del T_{ac} , el comienzo de la inestabilidad, su dependencia de otros parámetros del problema y la forma en la que el fluido fluye después del comienzo de ésta.

3 LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

3.1 Ecuaciones para el movimiento laminar y estacionario Análisis del flujo de Couette

El estudio de la primera bifurcación del flujo Taylor Couette comienza a partir del FCC, que es un movimiento circular puro. El análisis del movimiento laminar que se presenta en este flujo permite hallar la distribución de

velocidad, presión y esfuerzo en el anillo de fluido.

Sean R_1 y R_2 los radios de los cilindros interior y exterior en un sistema Taylor Couette, que se suponen concéntricos, infinitamente largos y giran con velocidades angulares Ω_1 y Ω_2 respectivamente. Se tiene un fluido incompresible contenido entre los dos cilindros que viaja con movimiento estacionario y velocidad V y se define r como la distancia de un punto cualquiera del fluido al eje de los cilindros.

Sean U, V, W las componentes de la velocidad en las direcciones radial, transversal y axial respectivamente. En el flujo de Couette tanto U como W son nulas según lo presentado anteriormente.

De acuerdo a la geometría del sistema, resulta evidente la comodidad de utilizar las ecuaciones de Navier Stokes y de continuidad en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + g_r h \right) + \nu \left(\nabla^2 U - \frac{U}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{V \cdot U}{r} = -\frac{\partial}{r \cdot \partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} + g_\theta h \right) + \nu \left(\nabla^2 V - \frac{V}{r^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{V}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \theta} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + g_z h \right) + \nu (\nabla^2 w) \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Con

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6)$$

El flujo de Couette es una solución de las ecuaciones de Navier Stokes que queda completamente definido a partir de estas ecuaciones y las condiciones de frontera.

En estado estacionario cada partícula de

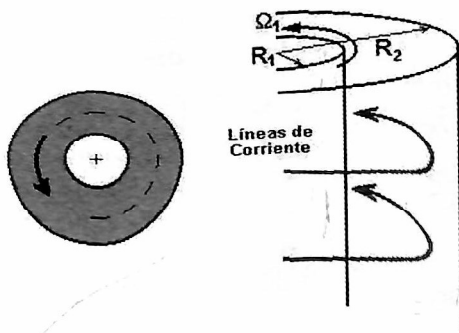


Figura 3. Líneas de Corriente en el flujo de Couette

fluído está describiendo un movimiento circular. De acuerdo con las ecuaciones de cinemática, se sabe que $V(r) = \Omega(r)r$; y las componentes U y W de la velocidad son cero, además no existe gradiente de presión en la dirección tangencial. Así que las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$-\rho \frac{V^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \text{ en dirección radial} \quad (7)$$

$$0 = \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} \right) \text{ en dirección tangencial} \quad (8)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \text{ en dirección axial} \quad (9)$$

En la dirección tangencial, como V sólo es función de r , se pueden tomar derivadas totales:

$$0 = \left(\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} \right)$$

Nótese además que

$$\left(\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rV) \right) = 0 \quad (10)$$

Esta ecuación puede integrarse con respecto a r para encontrar la distribución de velocidad $V(r)$ en el flujo:

$$V(r) = Ar + \frac{B}{r} \quad \text{Distribución de Velocidades} \quad (11)$$

donde A y B son constantes relacionadas con las velocidades angulares de los cilindros Ω_1 y Ω_2 .

El flujo resultante es un flujo azimutal, en el que las líneas de corriente son círculos concéntricos que se ilustran en la Figura 3.

A partir de la expresión para la velocidad

se obtiene una para la velocidad angular $\Omega(r)$ del fluido

$$\Omega(r) = A + \frac{B}{r^2} \quad (12)$$

Reemplazando Ω_1, Ω_2, R_1 y R_2 en la expresión para $\Omega(r)$, se obtienen dos expresiones para las constantes A y B donde μ es la relación entre las velocidades angulares de los cilindros $\mu = \Omega_2/\Omega_1$:

$$A = \Omega_1 \cdot \frac{\left(1 - \mu \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)}{\left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)}; \quad B = \Omega_1 \cdot R_1^2 \frac{(1 - \mu)}{\left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)} \quad (13)$$

Para el caso particular en el que el cilindro exterior está en reposo:

$$A = \frac{\Omega_1 \cdot R_1^2}{(R_1^2 - R_2^2)}; \quad B = \frac{\Omega_1 \cdot R_1^2}{\left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)}$$

Por otro lado, de las ecuaciones de movimiento (7), (9) y (11) se pueden obtener expresiones para la distribución de presiones y esfuerzos cuando se requiera, usando el tensor de esfuerzos.

4 PERTURBACIÓN SIMÉTRICA DEL FLUJO

La primera bifurcación se puede determinar por análisis de estabilidad lineal, estudiando para este caso el efecto de pequeñas fluctuaciones axisimétricas (no dependen de θ) de la velocidad u, v, w que se superponen al flujo básico de Couette (único y estable).

Sean entonces $u, V + v$ y w las componentes de la velocidad en el movimiento perturbado del flujo de Couette, u es la componente en la dirección radial, $V + v$ la componente transversal y w la componente axial.

Se asume que u, v, w son pequeñas comparadas con V , y que la perturbación es axisimétrica, por tanto es función de r, z y t solamente; siendo z la coordenada en la dirección del eje de los cilindros y t el tiempo.

5 TEORÍA DE ESTABILIDAD LINEAL

El desarrollo teórico se realiza a partir de las ecuaciones de Navier Stokes y de continuidad,

las cuales han sido perturbadas por las fluctuaciones u, v y w . Para estas ecuaciones se asumen soluciones axisimétricas con las variables separadas de la forma

$$a = a_1(r) \cdot \cos(\lambda z + \psi) \cdot \exp(\sigma t) \quad (14)$$

donde a es la perturbación, a_1 es una función que sólo depende del radio, λ es el número de onda de la perturbación en la dirección axial y σ es una constante compleja; con soluciones de esta forma y las condiciones de frontera se obtienen ecuaciones en términos de a_1, σ y λ .

Las ecuaciones de Navier Stokes perturbadas para fluidos incompresibles en coordenadas cilíndricas, aplicadas al flujo de Couette son:

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{(V + v)^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + gh \right) + \nu \nabla^2 u \quad (15)$$

$$\nu \left(-\frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial(V + v)}{\partial \theta} \right) \quad (16)$$

$$\frac{D(V + v)}{Dt} - \frac{(V + v) \cdot u}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + gh \right) + \nu \nabla^2 (V + v) + \nu \left(-\frac{(V + v)}{r^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (17)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + gh \right) + \nu (\nabla^2 w) \quad (18)$$

$$\text{Con } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\text{y } \frac{D}{Dt} = u \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{(V + v)}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + w \cdot \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Teniendo en cuenta que se asume una perturbación simétrica (las variables no dependen de θ y por tanto sus derivadas se anulan), despreciando los términos que contienen productos o cuadrados de u, v, w para linealizar por truncamiento las ecuaciones, considerando un fluido incompresible, considerando que V sólo depende de r y definiendo $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}$ se obtiene el siguiente grupo de ecuaciones:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{V^2}{r} = -\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \cdot \left(A + \frac{B}{r^2} \right) v +$$

$$+ \nu \left(\nabla_1^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2 \cdot A u + \nu \left(\nabla_1^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (20)$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial t} + \nu \left(\nabla_1^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (21)$$

Ahora, de la ecuación de continuidad: $\nabla \cdot V = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(V + v)}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

y por la condición de simetría:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (23)$$

Además las seis condiciones de frontera que deben satisfacerse son: $u = v = w = 0$ en $r = R_1, R_2$.

A partir de aquí se desarrolla el análisis en términos de modos normales. Para perturbaciones infinitesimales, la dependencia temporal de la amplitud tiene una expresión exponencial $A(t) = A_0 \exp(\sigma t)$; a partir de esto se encuentra una ecuación algebraica para $\sigma(\lambda, T_a)$ y su solución determina aquellos valores del parámetro de control T_a y número de onda λ para los cuales la perturbación crecerá, condicionada por el signo de la componente real de σ . Se asume entonces la solución en forma de perturbaciones axisimétricas como la presentada anteriormente en la ecuación (14):

$$\begin{aligned} u &= u_1 \cdot \cos(\lambda z) \exp(\sigma t) \\ v &= v_1 \cdot \cos(\lambda z) \exp(\sigma t) \\ w &= w_1 \sin(\lambda z) \exp(\sigma t) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{y si } \gamma = \frac{\delta p}{\rho}; \quad \gamma = \gamma_1 \cdot \cos(\lambda z) \cdot \exp(\sigma t)$$

Donde u_1, v_1 , y w_1 son funciones de r únicamente, λ es el número de onda de la perturbación en la dirección axial y σ es una constante compleja, donde la parte real es la rata de crecimiento de la perturbación. Si σ es mayor que cero la perturbación crece y el movimiento es inestable. Si σ es menor que cero la perturbación se amortigua y el

movimiento es estable. Si $\sigma = 0$ el movimiento se denomina neutral (*Taylor, 1923*).

Al asumir esta forma para la solución de las ecuaciones, Taylor anticipa la existencia del flujo periódico en la coordenada z ; en otras palabras, las perturbaciones anticipan la aparición de los vórtices de Taylor.

Tomando las ecuaciones (19), (20), (21) y (23) reemplazando en ellas las ecuaciones (24) se obtiene el grupo de ecuaciones que se quiere solucionar.

5.1 Series Bessel-Fourier

La solución de este grupo de ecuaciones resultante se desarrolla teniendo en cuenta que las funciones Bessel son la "forma natural" para flujos o fenómenos físicos con fronteras cilíndricas, y que cualquier función continua $f(r)$ que se anule en R_1 y R_2 se puede desarrollar en una serie de Bessel-Fourier, pues estas funciones conforman un conjunto ortogonal.

Es conveniente expresar u_1 , \mathbf{v}_1 y w_1 de (24) en esta forma, porque al introducir las en las ecuaciones de movimiento conducen a relaciones lineales entre los coeficientes de las diferentes expansiones. De modo que se asume una expresión en serie de Bessel Fourier de la forma:

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m B_1(\kappa_m r) \quad (25)$$

la cual satisface las condiciones de frontera $u_1 = 0$ en R_1 y R_2 . De manera semejante se expresa \mathbf{v}_1 y w_1 (*Watson, 1995, Taylor, 1923*).

Retomando de forma general la solución del problema se tenían cuatro ecuaciones: las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, se quiere conocer el comportamiento de u , \mathbf{v} , y w , el tamaño de los vórtices y la velocidad crítica en la que se forman con las variables λ y σ , y p como incógnita adicional. Se elimina la presión p , se expresan u , \mathbf{v} , y w , como $a = a_1(r) \cdot \cos(\lambda z + \psi) \cdot \exp(\sigma t)$ y se reemplazan en las tres ecuaciones restantes. Ahora $u_1(r)$ se expresa en términos de una serie Bessel-Fourier. Esta suposición permite encontrar una expresión para \mathbf{v}_1 y con \mathbf{v}_1 y u_1 encontrar otra expresión para

w_1 . Como puede verse de la ecuación (25) estas expresiones quedan en términos de coeficientes del tipo a_1 y son reemplazadas en la ecuación de continuidad que es la única que queda. Como todos los términos en esta ecuación están expresados después de reemplazar como series Bessel-Fourier, los coeficientes pueden igualarse y se obtiene un sistema de ecuaciones que puede expresarse en un determinante homogéneo. Después de algunas operaciones elementales y aproximaciones, este determinante depende de la geometría del sistema, un parámetro $\beta = \lambda/\kappa$ que expresa el tamaño de los vórtices y un parámetro P definido como (*López, 2001*):

$$P = \frac{\pi^2 \nu^2 (R_1 + R_2)}{2 \Omega_1 d^3 R_1^2 (1 - R_2^2 \mu / R_1^2) (1 - \mu)} \quad (26)$$

Esta es una nueva variable que reemplaza a Ω_1 y para encontrar el mínimo valor de ésta última se va a maximizar la variable P para diferentes valores de β en el determinante. El valor de β para el cual P es máximo determina las dimensiones de los remolinos en los cuales se estratifica el flujo cuando aparece la inestabilidad (recuérdese que se ha cambiado λ por esta variable β). Este proceso se realiza iterativamente puesto que no hay solución analítica, sin embargo la combinación de este desarrollo con el trabajo experimental aporta valores alrededor de los cuales se puede comenzar a buscar. Con este procedimiento se obtienen puntos en una gráfica P vs β . Taylor discute tres casos generales para solucionar este determinante. Un caso en el que $1 - \mu \rightarrow 0$, otro en el que no es válida esta suposición y un tercer caso en el que $0 < \mu \leq 1$; esto le permite incrementar la rapidez con la cual las raíces convergen, pues se simplifica el determinante según el caso particular de estudio.

La expresión (26) es la primera versión del número adimensional denominado por Chandrasekhar como número de Taylor y que se presentó en la ecuación (1) en la forma utilizada actualmente.

5.2 Caso 1: $\mu - 1 \rightarrow 0$

Para solucionar el determinante, Taylor

supone que la velocidad de ambos cilindros es muy parecida. En ese caso los términos de la diagonal del determinante que contienen el factor $(1 - \mu)^{-1}$ se vuelven muy grandes en comparación con los demás. Después de algunas consideraciones adicionales el determinante puede solucionarse a partir de la siguiente expresión:

$$\frac{1^2(1^2 + \beta^2)}{1 - (P/\beta^2)(1^2 + \beta^2)^3} + \frac{3^2(3^2 + \beta^2)}{1 - (P/\beta^2)(3^2 + \beta^2)^3} + \dots = 0 \quad (27)$$

Para un valor particular de β , es posible aproximar la raíz más grande de la expresión anterior. Un cálculo aproximado muestra que los mayores valores están en la vecindad de 1.

En la Tabla 1 se muestran valores obtenidos para P' en función de β tomando para cada valor de β los treinta primeros términos de la serie. En la Figura 4 se muestra la gráfica P' vs. β . Estos cálculos se realizaron para las condiciones experimentales del equipo construido y el fluido usados para este trabajo.

Valor de β	Valor de P'
0.8	0.0523043
0.9	0.0549872
0.98	0.0557639
0.99	0.0557827
0.9999	0.0557853
1.0001	0.0557851
1.01	0.0557717
1.02	0.0557426
1.1	0.0549887
1.2	0.052954

Tabla 1. Valores obtenidos para P' en función de β

Esta curva tiene un máximo alrededor de $P' = 0.0557852$ con un valor de β alrededor de 1. Por las aproximaciones realizadas es difícil asegurar que éste sea el valor exacto para β , pero sí se puede esperar que dicho valor se

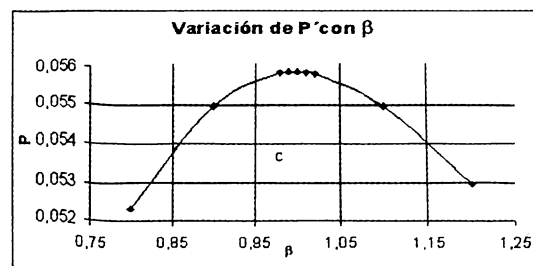


Figura 4. Variación de P' con β

encuentra en esa vecindad (El valor obtenido por Taylor fue 0.0571).

Por tanto:

$$P'_c = \frac{\pi^2 \nu^2 (R_1 + R_2)}{2\Omega_{1c}^2 d^3 R_1^2 (1 - \eta^2 \mu) (1 + \mu)} = 0.0558 \quad (28)$$

La expresión (28) da el valor crítico del número adimensional que caracteriza el flujo. En la actualidad no se manejan comúnmente ni la ecuación ni este valor crítico, la versión actual da un valor para el número crítico de 3390 y se usa la ecuación (1), pero nótese que existe una relación aproximada entre ambos: $2\pi^4/0.0557852 = 3492$.

Por otro lado, de la solución de esta ecuación también se puede predecir que la inestabilidad es periódica a lo largo de los cilindros, con longitud de onda casi exactamente igual a dos veces el espesor de la capa de fluido entre los cilindros; pues en este caso $\beta = 1$, la longitud de onda de la perturbación es entonces:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi d}{\pi \beta} = \frac{2d}{\beta} \quad (29)$$

y con $\beta = 1$ la longitud de onda es $2d$.

Una descripción más detallada de los procedimientos usados por Taylor se puede encontrar en Taylor, 1923, y algunas anotaciones adicionales en (López, 2001).

6 RESULTADOS EXPERIMENTALES

6.1 Trazador utilizado en los ensayos

Para los ensayos se probaron diferentes tipos de pigmentos particulados perlados, los cuales resultaron buenos tanto para la observación directa como para las fotografías. Estos pigmentos son láminas de mica recubiertas con

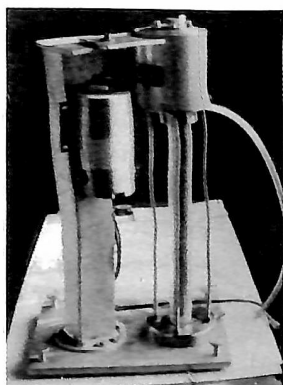


Figura 5. Equipo Taylor Couette

dióxido de titanio o con óxido de hierro, lo que les confiere un alto índice de refracción. Tienen tamaños de partícula en un rango de 6 a 48μ y de 10 a 150μ .

Una concentración de 0.25 g de trazador por cada 100 ml de agua produce señales satisfactorias. Además se utilizaron azul de metileno y verde de malaquita para generar mayor contraste en la observación.

6.2 Procedimiento experimental

El equipo debe ser nivelado y alineado con ayuda de los tornillos y el nivel. Como fluido de trabajo en este caso se utiliza agua a temperatura ambiente con el trazador en las proporciones planteadas anteriormente, la cual ha sido hervida y dejada en reposo durante algunas horas para sacar el aire, aunque es posible utilizar agua destilada. Se introduce el fluido lentamente, tratando de evitar que se formen burbujas. Si queda aire en el fluido, las burbujas se pegan a la superficie del eje y dejan una estela cuando se pone a funcionar el equipo, lo que conduce a observaciones erróneas al momento de determinar la velocidad crítica. Por esta misma razón, el fluido entra al equipo por la zona inferior mediante un ligero vacío y el mecanismo de sifón.

Después de programar una rampa de aceleración en el variador, el motor comienza a rotar desde velocidad cero en todos los ensayos. Ésta va incrementando progresivamente hasta el valor seleccionado para desarrollar el ensayo. Los parámetros a tener en cuenta du-

rante la experimentación son la velocidad de trabajo, la rampa de aceleración utilizada, la viscosidad del fluido, la longitud de fluido utilizada, el número de vórtices y su longitud de onda. Es necesario asegurar los mismos procedimientos al comienzo de cada prueba para garantizar resultados repetibles.

No se ha encontrado un criterio muy claro para establecer el tiempo de experimentación suficiente para que desaparezcan los estados transientes. Donnelly (Donnelly, 1980) menciona un tiempo propuesto por Snyder (Snyder, 1969) como el tiempo de ajuste para el tamaño de la celda, el cual está dado por la ecuación:

$$t = \frac{0.15L^2}{\nu} \quad (30)$$

que para una columna de fluido de 386 mm en el equipo y una viscosidad de $1.0117 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, equivale a 22196 s o 6 horas para cada experimento. Sin embargo es un tiempo demasiado alto, por lo que sólo se realizaron con estos tiempos los ensayos de velocidad crítica cuando ya se tenía claramente establecido un rango de velocidades entre los cuales se encontraba aquella velocidad crítica buscada.

6.3 Desarrollo de los experimentos

Los experimentos realizados se concentraron principalmente en determinar el comienzo de la inestabilidad y los vórtices de Taylor, en los que se tienen en cuenta las predicciones teóricas comparadas con la observación del comienzo de la inestabilidad. Estas experiencias se realizaron para cuatro combinaciones posibles de dos cilindros interiores con radios 13 mm y 8.5 mm y dos cilindros exteriores con radios 18.4 mm y 25.25 mm, para un tiempo de aceleración y una longitud de columna de fluido fijos.

6.4 Determinación del comienzo de la inestabilidad y los vórtices de Taylor

6.4.1 Observaciones

Cuando el fluido se pone en movimiento a muy

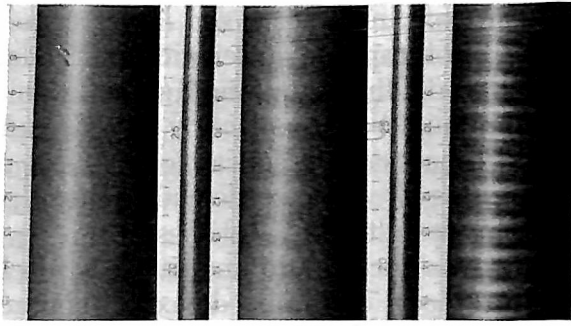


Figura 6. Formación de los vórtices de Taylor a partir del flujo de Couette

bajas velocidades aparece el flujo de Couette. Es posible hacer el seguimiento de algunas partículas y observar que el movimiento es circular puro. En la secuencia de fotografías de la Figura 6 se observa el comienzo de la inestabilidad a partir del flujo de Couette y la aparición posterior de los vórtices de Taylor. En la fotografía central de la figura ya se insinúan algunas bandas y en la derecha aparecen los vórtices de Taylor completamente definidos. Existe una incertidumbre sobre el valor de la velocidad crítica, pues el movimiento celular secundario no aparece simultáneamente a lo largo de toda la longitud de los cilindros, sino que comienza en algunas zonas y únicamente alcanza la longitud completa del cilindro después de un ligero incremento en la velocidad.

6.4.2 Velocidad crítica experimental

Se toma como velocidad crítica experimental, la velocidad para la cual los vórtices están distribuidos a lo largo de toda la longitud de los cilindros. La velocidad se controla desde el variador y se realizan varios ensayos de dos horas para estrechar el rango de velocidad en el que aparecen los toros; una vez se identifica este rango se hacen ensayos de 5 horas para determinar la velocidad crítica y asegurar la repetibilidad de este valor. Esta observación se realizó para las cuatro combinaciones de los dos ejes y los dos cilindros exteriores.

6.4.3 Velocidad crítica teórica

El número de Taylor crítico está dado por:

$$T_{ac} = \frac{4\Omega_1^2}{\nu^2} \frac{R_1^2 d^4}{(R_2^2 - R_1^2)} = 3390$$

A partir de este número se calcula la velocidad crítica teórica teniendo en cuenta la geometría del equipo y la viscosidad del fluido de trabajo. Este criterio es válido sólo cuando se cumplen las hipótesis del modelo inicial, en la que $d \ll R_1$. Chandrasekhar cita un trabajo realizado por él, Reid y Elbert en el que desarrollan un modelo teórico para casos en los que esta hipótesis no es válida (Chandrasekhar, 1961). Cuando $\eta = 0.5$ Chandrasekhar propone otra versión para el número de Taylor:

$$T_{ac} = \frac{64}{9} \left(\frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu} \right)^2 = 33100 \quad (31)$$

Este número será utilizado para comparar los resultados experimentales cuando $d = 9.9\text{mm}$ y $d = 12.25\text{mm}$.

6.4.4 Longitud de onda axial

Si σ es positiva, la teoría lineal de estabilidad predice que la amplitud de una perturbación inestable aumenta con el tiempo de manera exponencial. Sin embargo, experimentalmente se observa que para cualquier valor de $T_a > T_{ac}$, se establece una amplitud de equilibrio finita. En el caso particular del flujo Taylor Couette, esto quiere decir que los vórtices de Taylor no crecen de tamaño indefinidamente, sino que encuentran un tamaño a partir del cual ya no crecen más. La predicción de este comportamiento se pierde por la linealización de las ecuaciones, pues la amplitud de las perturbaciones alcanza una magnitud considerable después de que ha comenzado la primera bifurcación, por lo que la linealización, en la que se consideraban los productos de los términos de perturbación como $u'v'$ o $u'w'$ despreciables, ya no es válida.

Como se observa en la Figura 7, cuando aparece la inestabilidad, el tipo de movimiento que se genera es periódico a lo largo del eje de los cilindros, con una longitud de onda casi igual a dos veces el espesor de la capa de fluido entre los cilindros. El flujo está formado por vórtices contenidos en los que el fluido recorre

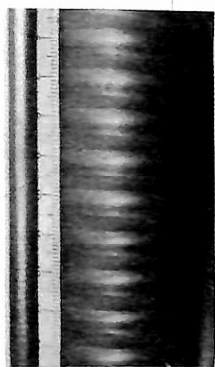


Figura 7. Sección central de una columna de fluido con vórtices de Taylor laminares axisimétricos. El cilindro interior rota a 18 rpm. Visualización con pigmentos perlados. $\eta = 0.7$ y $\Gamma = 71.5$.

patrones en espiral. Las superficies $\Psi = 0$ marcan la frontera entre vórtices, por lo que es posible medir la longitud de onda.

Mobbs y Younes proponen que cualquier discrepancia en esta medida es debida a la necesidad de ajustar un número de células entero en la longitud finita de la columna de fluido. Esto significa que la estructura espacial de los vórtices no es única. Las células que se encuentran en los extremos no son células de Taylor y su naturaleza depende de si la frontera es sólida o deformable y de la velocidad relativa con el fluido. La circulación en una célula adyacente a una frontera rígida tiene una dirección predeterminada, mientras en una superficie libre puede tener su propia dirección de rotación y puede ajustar su longitud axial para acomodar células de Taylor (Mobbs and Younes, 1974). Es notable además que las células se generan por pares, y cuando no puede ajustar el par en la longitud de fluido dada, forma en los extremos vórtices extraños de tamaños variables.

A partir de las fotografías es posible determinar la longitud de onda de los vórtices. La refracción del vidrio y el agua magnifican las dimensiones horizontales y no las verticales, por lo que esta longitud puede tomarse directamente sin hacer correcciones. La fotografía que se muestra en la Figura 7 se tomó para $R_1 = 13 \text{ mm}$ y $R_2 = 18.4 \text{ mm}$. Escalando de las dimensiones de la foto: $\lambda/2 = 5.04$. Por otro lado, teóricamente se tiene: $\lambda/2 =$

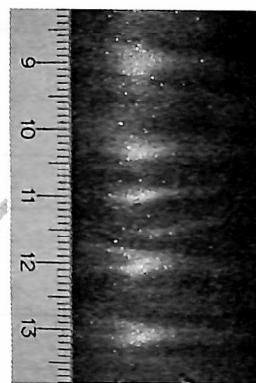


Figura 8. Dislocaciones

$R_2 - R_1 = 5.4 \text{ mm}$. Utilizando el mismo procedimiento con las fotografías de las demás combinaciones de cilindros se completa la columna de longitud de onda experimental de la Tabla 6.1. Vale la pena mencionar que esta medida varía mucho en ocasiones, sobre todo cuando el tamaño del anillo d comienza a crecer, pues cuando la columna de fluido no es un múltiplo de $2d$, la longitud de onda de los toros debe acomodarse para abarcar toda la columna. En ocasiones este proceso toma mucho tiempo y se generan gran cantidad de vórtices con forma de lente, en los que el toroide no se completa (estas irregularidades se denominan dislocaciones y se ilustran en la Figura 8). Entre los vórtices de Taylor no hay intercambio de fluido, la presencia de dislocaciones permite intercambiarlo durante las etapas transientes para ajustar el tamaño de las células.

$R_1[\text{mm}]$	$R_2[\text{mm}]$	η	d	Γ	d/R_1
13	18.4	0.7	5.4	71.5	0.415
13	25.25	0.51	12.25	31.5	0.942
8.5	18.4	0.46	9.9	39	1.165
8.5	25.25	0.34	16.75	23	1.97

Tabla 2. Parámetros geométricos del sistema.

En la tabla 3 se muestran los resultados teóricos y experimentales para la velocidad angular del cilindro interior y el tamaño de los vórtices obtenidos con las diferentes combinaciones de radios para la primera bifurcación del flujo. Las unidades usadas son las rpm

para la velocidad angular y *milímetros* para el tamaño del remolino.

d/R_1	Ω_{cT}	Ω_{InE}	Ω_{cE}	λ_T	λ_E
0.415	9.7	9.3	10.3	10.8	10.1
0.942	3.9	3.5	4.4	24.5	21.3
1.165	9.1	6.5	7.8	19.8	17.5
1.97	—	5.8	6.8	33.5	28.5

Tabla 3. Comparación de resultados teóricos y experimentales para los vórtices de Taylor.

El error en la medición de la longitud de onda realizada por Taylor es del 5% para $R_1 = 2.93 \text{ mm}$ y $R_2 = 4.035 \text{ mm}$ y del 3.5% cuando $R_1 = 3.25 \text{ mm}$ y $R_2 = 4.035 \text{ mm}$. La diferencia entre los resultados teóricos y los experimentales de este trabajo es de 6.5% en el primer caso ($R_1 = 13 \text{ mm}$ y $R_2 = 18.4 \text{ mm}$) y alrededor de 13% en los demás. El aumento en la diferencia entre estos dos últimos valores se debe principalmente a que sólo en el primer caso son válidas las hipótesis para la linealización de las ecuaciones. Taylor utilizó una columna de fluido de 900 mm, lo que le asegura una zona de estudio más libre del efecto de las condiciones de frontera; en este trabajo se utilizó una columna de 386 mm.

6.4.5 Comparación con los datos de algunos investigadores

En la tabla 4 se muestran los valores del número de Taylor crítico correspondientes a cada combinación de cilindros. Los valores de esta tabla se encuentran tomando la velocidad crítica experimental y obteniendo de la expresión para el número de Taylor el valor crítico.

La Figura 9 muestra los resultados experimentales o teóricos obtenidos por algunos investigadores para la variación del número de Taylor crítico con η cuando $\mu = 0$ (DiPrima, 1963), éstos se comparan con los puntos experimentales (⊗) encontrados en este trabajo.

Es notable que los puntos para las diferencias de radios más pequeñas se encuentran alrededor de los datos obtenidos por otros investigadores, pero el caso en el que $d/R_1 =$

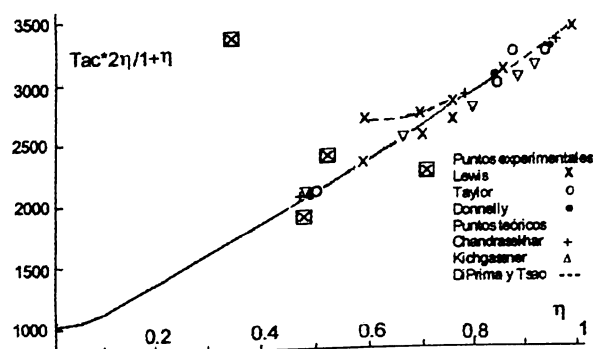


Figura 9. Variación del número de Taylor crítico con la relación entre los radios η para $\mu = 0$

1.97 se sale completamente de las predicciones teóricas. Las unidades para los radios son los *milímetros* y la velocidad angular Ω_{cE} las *rpm*.

R_1	R_2	η	Ω_{cE}	T_{aC}	$T_{aC} \cdot \frac{2\eta^2}{(1+\eta)}$
13	18.4	0.7	9.3	3832.22	2209.1
8.5	18.4	0.46	6.5	6775.12	1963.8
13	25.25	0.51	3.5	6696.83	2307.1
8.5	25.25	0.34	5.8	20079.55	3464.5

Tabla 4. Valores obtenidos experimentalmente para el número de Taylor crítico.

6.4.6 Con diferencias de radios más amplias.

Como se ha dicho anteriormente, la teoría lineal se ajusta muy bien cuando las diferencias entre los radios de los cilindros es pequeña; a medida que esta diferencia empieza a crecer, los resultados se desvían considerablemente de las predicciones teóricas realizadas por Taylor. De los cuatro casos que se observaron en el trabajo experimental, el que corresponde a un anillo $d/R_1 = 0.415$, se ajusta bien a las predicciones; los dos intermedios, $d/R_1 = 0.942$ y $d/R_1 = 1.165$, presentan un comportamiento que aún es predecible bajo las consideraciones de Chandrasekhar, pero el caso extremo $d/R_1 = 1.97$, presenta un comportamiento muy irregular.

Hay unos vórtices adicionales que no están ligados a la inestabilidad centrífuga de Taylor, sino a la geometría de los extremos del cilindro. Estos vórtices se denominan vórtices de Eckman y se encuentran aún por debajo de la velocidad crítica (*Lamb*, 1932). Si la relación de aspecto Γ no es lo suficientemente grande, es posible que se confunda la presencia de estos vórtices con la propia inestabilidad, por esto la relación de aspecto debe ser lo más grande que se pueda y la observación debe realizarse en la zona central, bien lejos de estos.

7 CONCLUSIONES

Los resultados experimentales obtenidos caracterizan el flujo Taylor Couette para números de Taylor entre 7.9 y 360.

Controlando la velocidad de rotación del motor, se determinó visualmente el valor para el cual aparecen los vórtices de Taylor. Este es un método que depende de la habilidad del observador para apreciar la aparición de vórtices, sin embargo se detecta, sobre todo con anillos de fluido pequeños, un valor alrededor del cual definitivamente se encuentra la velocidad crítica, además los resultados pueden ser repetidos. La alternativa es utilizar un velocímetro laser doppler o PIV para detectar cuando aparecen componentes radiales y axiales de la velocidad en el flujo de Couette.

La inestabilidad del flujo aparece en velocidades cercanas a las predichas por el número de Taylor cuando $d/R_1 = 0.415$, con una diferencia del 6%. A medida que el parámetro d crece, la hipótesis por la cual se linealizó el problema ya no es válida. Los resultados obtenidos para los casos intermedios tienen diferencias del orden del 14% cuando se utiliza el criterio de Chandrasekhar; en el caso crítico con $d/R_1 = 1.97$ los resultados experimentales no se ajustan a las predicciones teóricas, lo cual es previsible dado que en este caso no se cumple ninguna de las hipótesis del modelo.

Este resultado se refleja más claramente en la Tabla 4 y el gráfico de la Figura 9. Los puntos obtenidos se encuentran en tres de los casos alrededor de los presentados por los investigadores, sin embargo, para el cuarto caso,

$d/R_1 = 1.97$, la diferencia es muy grande y muestra una tendencia opuesta a la predicha por la línea. Esto evidencia la necesidad de estudiar y explorar más este caso crítico, pero también muestra que para rangos en los que $\eta \leq 0.5$ es posible obtener en este equipo resultados comparables con los de otras investigaciones.

En la Tabla 3 se reportan dos valores experimentales de velocidad, uno denominado de inestabilidad y otro denominado crítico. Se reportaron dos valores, pues experimentalmente se encuentra que una vez han comenzado a aparecer bandas estables en el flujo y que indican el comienzo de la inestabilidad, es necesario aumentar un poco la velocidad para lograr que se formen toros a lo largo de toda la longitud de los cilindros. La mínima velocidad a la que esto sucede se ha tomado como velocidad crítica y es la que se compara con la velocidad teórica del número crítico de Taylor.

La longitud de onda encontrada experimentalmente a partir de las fotografías, se ajusta razonablemente a las predicciones teóricas cuando $d/R_1 = 0.415$; no se encontró un cambio apreciable de este parámetro con el aumento de la velocidad de rotación de eje interior por encima del valor crítico y hasta la aparición del FVO, pero hay una variación notable cuando la columna de fluido no corresponde con un múltiplo de $2d$ o un valor cercano a él. En este caso el estado transiente del flujo permanece por más tiempo observándose gran cantidad de dislocaciones en la columna. Este efecto es mucho más importante cuando la diferencia de radios es mayor, formando incluso un vórtice en la superficie libre de comportamiento y tamaño notablemente diferente a los demás quizás para tratar de ajustar la longitud de onda de los pares de vórtices. Aunque los valores obtenidos para las demás combinaciones de cilindros también son semejantes a los predichos por la teoría lineal, el efecto anteriormente mencionado es mucho más notable en estos casos, conduciendo a diferencias importante en el tamaño de los toros en una misma columna de fluido y a unos pe-

riodos de movimientos transientes mucho más largos.

Debe resaltarse la diferencia entre el comportamiento del fluido en la frontera sólida y la frontera en superficie libre: el vórtice inferior parece rotar siempre en la misma dirección.

AGRADECIMIENTOS

A los profesores Miguel Monsalve Gómez de la Escuela de Física y Horacio Arango Marín de la Escuela de Matemáticas de La Facultad de Ciencias, quienes ayudaron enormemente en la comprensión del fenómeno y de los aspectos matemáticos del modelo.

A los profesores Hernán Alvarez de la Escuela de Ingeniería Química y de Petróleos y Juan Manuel Vélez Restrepo de la Escuela de Ingeniería de Materiales de La Facultad de Minas por corregir pacientemente la redacción y ayudar a dar una estructura coherente a las secciones.

A la dirección de investigación de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, por la financiación de este proyecto y al grupo de Tribología y Superficies

REFERENCIAS

- Bowman, F. *Introduction to Bessel functions*. Ed. Dover, New York, 1961.
- Chandrasekhar, S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Ed. Dover, New York, 1961.
- Coles, D. *Transition in circular Couette flow*. J. Fluid Mech. Cambridge. 21 (3), 1965.
- DiPrima, R.C. Stability of curved flows. *Journal of Applied Mechanics*. Transactions of the ASME. 486-492, 1963.
- Donnelly, R.J. *Taylor-Couette flow: The early days*. Physics today. 44 (11), 32-39, 1991.
- Drazin, P.G. Reid, W.H. *Hydrodynamic stability*, Cambridge U.P. 1982,
- Koshmieder, F.L. *Bénard cells and Taylor vortices*. Cambridge, 1993.
- Lamb, H. *Hydrodynamics*. Cambridge U. P, 1932.
- López, D. *Estudio de la estabilidad de un fluido en rotación utilizando un equipo Taylor Couette*. Trabajo dirigido de grado. Ingeniería Mecánica Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, 2001.
- Milne-Thompson, L. M. *Tratado de hidrodinámica teórica*. Ed. Aguilar S.A. Madrid, 1951
- Mobbs, F.R., Younes, M.A.M.A. The Taylor vortex regime in the flow between eccentric rotating cylinders. *Journal of Lubrication technology*. 127-134, 1974 .
- NATO advanced research workshop, Proc. *Ordered and Turbulent patterns in Taylor-Couette flow*; Columbus, OH, 1991. C.D. Andereck, F. Hayot, eds. Plenum Press, New York 1992.
- Schlichting, *Boundary layer theory*. Pergamon, Oxford, 1968.
- Swinney, H.L., Gollub, J.P. The transition to turbulence. *Physics today*. 31 (8). 41-49, 1978.
- Taylor, G.I. *The scientific papers. Edited by G.K. Batchelor. IV Mechanics of fluids Miscellaneous papers*.
- Tijonov, A.N. , Samarsky, A.A. *Ecuaciones de la física matemática*. Trad. por J.J. Tolosa. Ed. MIR, Moscú, 1980.
- Van Hook, S.J., Schatz, M. *Simple demonstrations of pattern formation*. The Physics teacher. 35, 1997.
- Watson, G.N. *A treatise on Bessel Functions*. Cambridge Mathematical library, 2 ed. 1995,
- Fluid dynamics gallery : <http://www.maths.warwick.ac.uk/snazar/gal.html> citado en enero 2001
- Taylor Couette Flow: <http://www.mech.nwu.edu/fac/lueptow/HTML/taylor-couetteflow.html> citado en abril 2001
- Particle Image Velocimetry in Challenging Geometries <http://widget.ecn.purdue.edu/%7Eswereley/pivresearch.html> citado en enero 2001
- Countercurrent Flow in the Gap Between Co-Axial Cylinders: <http://www.me.gatech.edu/me/theses/Vukasinovic.html> citado en abril 2001.