

# **CONTROL PREDICTIVO CON RESTRICCIONES**

## **PARA EL CLIMA DE UN INVERNÁCULO**

**SANDRA PIÑÓN**

*Instituto de Automática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, Argentina.*

**MIGUEL PEÑA**

*Instituto de Automática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, Argentina.*

**BENJAMÍN KUCHEN**

*Instituto de Automática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, Argentina.*

Recibido para revisión 8 de Febrero de 2002, aceptado 25 de Febrero de 2002, versión final recibida 8 de Abril de 2002

**RESUMEN:** Se presenta una propuesta de control para sistemas no lineales sujeto a restricciones, combinando la técnica de Linealización por Realimentación de Estados y el Control Predictivo Basado en Modelo. Dado que el método generalmente conduce a un problema de optimización sujeto a restricciones no lineales dependiente de los estados, se discute una alternativa de implementación en la que se tiene en cuenta además un Filtro Kalman Extendido para estimar las variables de estado no medibles del invernáculo (temperatura de la plántula y del suelo). Se realiza un análisis de observabilidad del sistema a lazo abierto y se demuestra la convergencia del observador.

**PALABRAS CLAVES:** Sistemas no lineales, Control Predictivo, Linealización por realimentación, control con restricciones, control de procesos.

**ABSTRACT:** A proposal for controlling nonlinear systems under constraints is presented. A combination of model predictive control and feedback linearization is used. An alternative that uses extended Kalman filter as non measured variable estimator is applied for performing the constrained optimization. Finally, an observability analysis is done in closed loop in order to demonstrate observer convergence.

**KEYWORDS:** Nonlinear system, Predictive Control, Feedback linearization, Constraint control.

## **1 INTRODUCCIÓN**

La mayoría de los esquemas de control prácticos tienen que tratar con cotas que surgen de las restricciones físicas de la entrada como por ejemplo la saturación en el actuador y con restricciones en la salida por condiciones específicas del proceso. Si además la planta objeto de control es no lineal, el problema se vuelve más complejo. Debido a que los modelos de los sistemas en ingeniería son frecuentemente no lineales, en los últimos años se han empleado varias aproximaciones para resolver el problema

de control con restricciones utilizando Linealización del modelo no lineal. En este trabajo se propone utilizar la linealización por Realimentación (Feedback Linearization, FL) para luego utilizar un lazo externo de control predictivo.

Aunque la FL permite el diseño de controladores que pueden seguir trayectorias de referencia arbitrarias, existen algunos problemas inherentes que surgen cuando se está en presencia de restricciones en la entrada (inherentes a la linealización misma). Estos son:

- El incremento del esfuerzo de control que se necesita para la FL puede ser muy alto en ciertas regiones del espacio de entrada y, como resultado, surgen restricciones en los estados.
- La utilidad del control para estabilización o para propósitos de seguimiento depende de los estados ya que estos dependen del control utilizado para linealizar por realimentación el sistema.
- La cancelación de no linealidades "útiles" da como resultado el uso de un esfuerzo de control innecesario para lograr la estabilización.
- La dinámica de los ceros resultante de la linealización por realimentación puede que no sea de fase mínima.

Se analizará el problema de diseño de control teniendo en cuenta estos aspectos y proporcionando condiciones suficientes para su solución.

El desarrollo de este trabajo ha estado motivada fundamentalmente por el gran éxito que ha tenido la aplicación de técnicas de FL en problemas de control de procesos, en robótica, etc. Se presenta aquí la Linealización entrada-salida (*I/O Linearization*) de un invernáculo el cual está sometido a restricciones inherentes al actuador, así como limitaciones en la temperatura del interior del invernáculo por ser este un factor fundamental que influye en la calidad del crecimiento del cultivo.

Aunque la teoría geométrica de FL se ha desarrollado ampliamente, su aplicabilidad en presencia de restricciones no ha recibido mucha atención. La Linealización I/O está estrechamente relacionada al seguimiento de trayectorias para la salida de un sistema no lineal. Sobre esto se han publicado varios trabajos entre ellos (*Grizzle et al.*, 1994) y (*Pappas et al.*, 1995). Se pueden encontrar algunos avances en (*Nevistic*, 1994), pero aún el seguimiento de la salida en presencia de restricciones en el control no ha sido ampliamente aplicado.

En este trabajo se trata el problema del seguimiento de una trayectoria deseada para el comportamiento óptimo de la temperatura en el

interior de un invernáculo que ha sido modelado como un sistema no lineal invariante en el tiempo y linealizado según técnicas de FL. Para el seguimiento se utiliza entonces el Control Predictivo Basado en Modelo (MBPC) con restricciones.

El trabajo se ha organizado como sigue: En la Sección 2 se discuten algunos aspectos del modelo de la dinámica del invernáculo teniendo en cuenta las perturbaciones inherentes a las condiciones climáticas a las que está sometido. En la Sección 3 se determina la observabilidad del sistema. Dada la necesidad de obtener información sobre el vector de estados completo para la linealización, se utiliza entonces un Filtro Kalman Extendido (Extended Kalman Filter, EKF) y se demuestra su convergencia. En la Sección 4 se hace una breve revisión de la linealización del sistema y se realiza el análisis de estabilidad de la dinámica de los ceros. En la Sección 5 se trata la estructura de MBPC+FL y se discute el seguimiento de una trayectoria deseada en presencia de restricciones en el control y en la variable controlada. Se muestran varias simulaciones y resultados obtenidos para evaluar el desempeño de la técnica de control predictivo con el lazo interno de FL. Por último se dan las conclusiones.

## 2 MODELO NO LINEAL DEL INVERNÁCULO

El modelo no lineal del invernáculo aquí utilizado, el cual fue ampliamente discutido en (*Takakura*, 1993), se ha expresado como un sistema de una sola entrada: flujo de calor ( $Q_{cal}$ ), una sola salida: temperatura del aire interior ( $t_i$ ). Se tienen en cuenta además las perturbaciones reales a las cuales está sometido. Entonces, se puede formular como un sistema no lineal con entradas afines

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + p(x)w \\ y &= h_c(x)\end{aligned}\quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^5$  es el vector de estado,  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada  $w \in \mathbb{R}^5$  es el vector de las perturbaciones e

$y \in \mathbb{R}$  es la salida.  $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ ,  $g: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^{5 \times 1}$ ,  $p: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^{5 \times 5}$  son campos vectoriales suaves y  $h_c: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave.

En el modelo se tienen en cuenta los flujos de entrada y salida que pasan a través de la cubierta del invernáculo los cuales son: la radiación solar absorbida, el intercambio de radiación entre el cielo y la cubierta y entre esta y el interior del invernáculo. Además los intercambios por convección entre: el interior y la cubierta y esta y el aire exterior; y finalmente el calor latente liberado por la condensación del vapor de agua en el interior del invernáculo.

El balance de energía del aire interior incluye el intercambio convectivo con la cubierta, con las plántulas y con el suelo, respectivamente, así como el intercambio con el aire exterior (ventilación). Por simplicidad se considera que la masa de aire del interior del invernáculo permanece a una temperatura homogénea.

El sistema entonces es modelado por un vector de estado formado por cinco componentes: la temperatura de la cubierta del invernáculo ( $t_c$ ), la temperatura y humedad del aire interior ( $t_i$ ) y ( $w_i$ ), la temperatura del suelo ( $t_p$ ) y la temperatura de la plántula ( $t_{p,i}$ ).

La dinámica completa del clima en el interior del invernáculo implica que se deben considerar algunas perturbaciones como la radiación solar directa ( $rad$ ), la radiación solar difusa ( $rad_s$ ), la temperatura exterior ( $t_o$ ), la humedad exterior ( $w_o$ ) y la temperatura bajo una capa de suelo de 10 cm de profundidad ( $t_{b,i}$ ). Estas cinco variables conforman el vector de las perturbaciones  $w$  de la ec. (1).

El sistema en el espacio de estado puede expresarse entonces

$$f(x) = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5]^T$$

donde cada una de las componentes está representada por (Las constantes aquí utilizadas pueden verse en la Tabla 1. Los parámetros que ellas utilizan están en el Apéndice).

$$f_1 = (k_1 \cdot t_c(t) + k_2 \cdot t_c^4(t) + k_3 \cdot t_f^4(t) + k_8 \cdot t_i(t) + hwt(t_c(t), w_i(t))) / d_{ex} / c_c$$

$$f_2 = (k_8 \cdot t_c(t) + k_9 \cdot t_i(t) + k_8 \cdot t_f(t) + k_{10} \cdot t_p(t)) / c_a / a_h$$

$$f_3 = (k_{12} \cdot t_c^4(t) + k_8 \cdot t_i(t) + k_{13} \cdot t_f(t) + k_{14} \cdot t_f^4(t) + k_{15} \cdot w_i(t) + k_{19} \cdot ws_{t_f}(t_f(t))) / c_s / z_o$$

$$f_4 = (k_{21} \cdot t_c^4(t) + k_{22} \cdot t_i(t) + k_{23} \cdot t_p(t) + k_{24} \cdot t_p^4(t) + k_{25} \cdot w_i(t) + k_{29} \cdot ws_{t_p}(t_p(t))) / c_p / v_p \cdot arto$$

$$f_5 = (k_{31} \cdot w_i(t) + k_{32} \cdot ws_{t_f}(t_f(t)) \dots + k_{33} \cdot ws_{t_p}(t_p(t))) / \rho / ah$$

y donde  $hwt$  representa el término correspondiente a la energía que gana (o pierde) la cubierta debido a la condensación

$$hwt = k_{15} (w_i - ws_{t_c});$$

y los términos relacionados con el calor latente de las superficies sólidas (cubierta, suelo y plántula, respectivamente) se representan por

$$ws_{tc} = \frac{0.62e^{Beta(t_c)}}{1.10^5 - e^{Beta(t_c)}}$$

$$ws_{tf} = \frac{0.62e^{Beta(t_f)}}{1.10^5 - e^{Beta(t_f)}}$$

$$ws_{tp} = \frac{0.62e^{Beta(t_p)}}{1.10^5 - e^{Beta(t_p)}}$$

$Beta(t)$  es un factor que depende en forma no lineal de la temperatura (Takakura, 1993).

El vector columna  $g(x)$  puede formularse como

$$g(x) = [0 \ 1/c_a \cdot a_h \ 0 \ 0]^T$$

y la variable manipulada es el flujo de calor que entrega el calefactor/refrigerador

$$u = Q_{cal}$$

Así mismo se formula como vector de las perturbaciones

$$w = [rad \ rad_s \ t_o \ w_o \ t_{bl}]^T$$

y la matriz  $p(x)$  como

$$p(x) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde

$$p_{11} = k_6 / dex / c_c \quad p_{12} = k_7 / dex / c_c$$

$$p_{13} = (k_4 + k_5 t_o^3) / dex / c_c$$

$$p_{23} = k_{11} / c_a / a_h \quad p_{31} = k_{17} / c_s / z_o$$

$$p_{32} = k_{18} / c_s / z_o \quad p_{33} = k_{16} t_o^3 / c_s / z_o$$

$$p_{35} = k_{20} / c_s / z_o \quad p_{41} = k_{27} / c_p / v_p / arto$$

$$p_{42} = k_{28} / c_p / v_p / arto \quad p_{54} = k_{30} / \rho / ah$$

$$p_{43} = k_{26} t_o^3 / c_p / v_p / arto$$

En este caso se ha elegido la temperatura interior como salida controlable por lo que  $h_c(x) = t_i$ . Se han utilizado las mediciones de temperatura y humedad exterior obtenidos por la estación meteorológica propia del Instituto de Automática (INAUT) de la Universidad Nacional de San Juan, correspondientes a 20 días del mes de agosto del presente año. En la Figura 1 se muestra los valores de temperatura y humedad, respectivamente.

En este trabajo se necesita el vector de estado completo para la FL, por lo que se utiliza un EKF para la obtención de las variables de estado estimadas. Más detalles pueden encontrarse en (Piñón *et al.*, 1998).

Tabla 1 Constantes utilizadas en el modelo

$k_1 = -h_i \cdot h_o;$	$k_2 = -(ep_{sf} + 1);$
$k_3 = sig.ep_{sc}.ep_{sf};$	$k_4 = h_o;$
$k_5 = sig.ep_{sc}.ep_{sa};$	$k_6 = abs o + (1 - alf)tran.alc;$
$k_7 = alc + alc(1 - alf)tds;$	$k_8 = h_i;$
$k_9 = (2h_i + c_a.q_h + 2.h_i.arto.lai)$	$-k_{10} = 2h_i.arto.lai;$
$k_{11} = c_a.q_h;$	$k_{12} = sig.ep_{sf}.epsc$
$k_{13} = -2ks/(z0+z1)-hi;$	$k_{14} = -sig.ep_{sf}(1-rmc)$
$k_{15} = hlg.k_m;$	$k_{16} = sig.ep_{sf}.ep_{sa}.tlv$
$k_{17} = alf.tran.arto1;$	$k_{18} = alf.tds.arto1$
$k_{19} = -hlg.k_m.gsi;$	$k_{20} = 2ks/(z0+z1)$
$k_{21} = sig.ep_{sp}.ep_{sc};$	$k_{22} = 2lai.h_i;$
$k_{23} = -2lai.h_i;$	$k_{24} = -sig.ep_{sp}(1 - rmc)$
$k_{25} = 2lai.hlg.\rho/\gamma;$	$k_{26} = sig.ep_{sp}.ep_{sa}.tlv$
$k_{27} = alp.tran;$	$k_{28} = alp.tds$
$k_{29} = -2\rho/\gamma.hlg.lai;$	$k_{30} = \rho.q_h$
$k_{32} = k_m.gsi;$	$k_{33} = 2lai.arto.\rho/\gamma$
$k_{31} = -(\rho.q_h + k_m.gsi + 2lai.arto.\rho/\gamma)$	

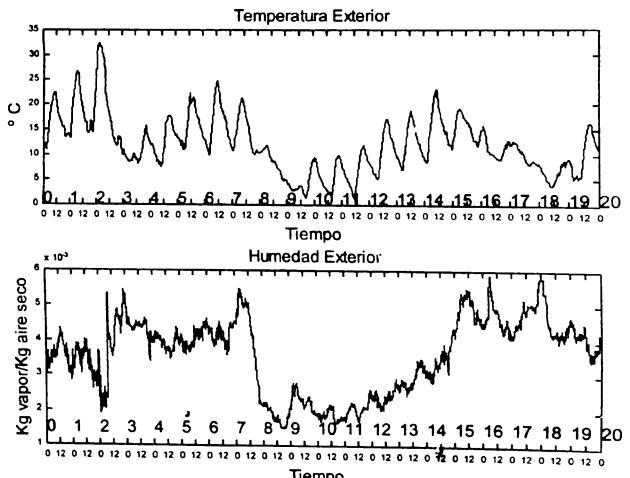


Figura 1. Temperatura y humedad del exterior

### 3 OBSERVABILIDAD Y EKF

#### 3.1 Observabilidad de sistemas no lineales

Cuando el sistema que se tiene no es observable puede ocurrir un problema de divergencia para el filtro, lo cual significa que una o más variables de estado (o combinaciones lineales de estas) están

ocultas desde el punto de vista del observador. Como resultado, si además las componentes no observables del vector de estado son inestables, los correspondientes errores de estimación también pueden ser inestables. Este problema nada tiene que ver con la exactitud del modelado del sistema. Sólo se debe a que la medición no provee suficiente información como para estimar todas las variables de estado.

La observabilidad del sistema no lineal se puede verificar utilizando una matriz que es análoga a la matriz de observabilidad lineal. Puede mostrarse (Isidori, 1995; Henson and Seborg, 1997) que el sistema no lineal de la ec. 1, es débilmente localmente observable en  $x_0$  si existe una vecindad de  $x_0$  y una  $p$ -tupla de integradores ( $k_1, k_2, \dots, k_p$ ) los cuales se refieren como *índices de observabilidad*, tales que

$$\text{i)} \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p \geq 0, \quad \sum_{i=1}^p k_i = n$$

$n$ = orden del sistema no lineal

ii) Los  $n$  vectores filas de la matriz de observabilidad

iii)

$$O = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} h_o(x) \\ L_f h_o(x) \\ \vdots \\ L_f^{j-1} h_o(x) \end{bmatrix} \text{ para } j = 1 \dots k_i \text{ e}$$

$$i = 1, \dots, p$$

$$\text{Donde: } L_f h_o(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_o}{\partial x_i} f_i,$$

son linealmente independientes. O sea, el rango de la matriz de observabilidad debe ser igual al orden del sistema. En caso contrario se dice que el sistema no es observable.

### 3.1.1 Observabilidad del sistema invernáculo

En el caso del sistema invernáculo, las variables que se miden son: la temperatura en el cobertor y

la temperatura y humedad en su interior. De esta forma se define

$$h_o(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ h_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_c \\ t_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

y

$$O = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} h_1(x) \\ L_f^{k_1-1} h_1(x) \\ h_2(x) \\ L_f^{k_2-1} h_2(x) \\ h_3(x) \\ L_f^{k_3-1} h_3(x) \end{bmatrix}$$

para este caso se calcularon los índices de observabilidad  $k_1=2, k_2=1, k_3=2$ , por lo que la matriz de observabilidad correspondiente queda de la forma

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ o_{21} & o_{22} & o_{23} & 0 & o_{25} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & o_{53} & o_{54} & o_{55} \end{bmatrix}$$

donde

$$o_{21} = \frac{k_1 + 0.04k_2 t_c^3 + \frac{\partial h_{wt}}{\partial t_c}}{dex / c_c}$$

$$o_{22} = \frac{k_8}{dex / c_c} \quad o_{23} = \frac{0.04k_3 t_f^3}{dex / c_c}$$

$$o_{25} = \frac{\frac{\partial h_{wt}}{\partial w_i}}{dex / c_c} \quad o_{53} = \frac{k_{32}}{\frac{\partial t_f}{rho / a_h}}$$

$$o_{54} = \frac{k_{33}}{\frac{\partial t_p}{rho / a_h}} \quad o_{55} = \frac{k_{31}}{rho / a_h}$$

Como se supone que la temperatura de la plántula y el suelo son mayores a 0°C, los

términos  $o_{54}$  y  $o_{23}$  son siempre distintos de cero y por tanto el rango de la matriz de observabilidad es  $n=5$ , entonces se dice que el sistema es localmente observable.

Se procede entonces a utilizar un observador para realizar las estimas de las variables de estado del proceso. Para tal objetivo se realizó primero la discretización del sistema invernáculo usando el método numérico de Euler con un paso de discretización de 3 min. Esc mismo fue utilizado posteriormente para el observador.

### 3.2 Filtro Kalman Extendido

Como se dijo anteriormente aquí se hace referencia al problema general de estimar el estado  $x \in \mathbb{R}^n$  con un filtro Kalman para sistemas discretos. Se obtiene un filtro de primer orden determinado por una ecuación en diferencias lineal. Una de las aplicaciones más interesantes y satisfactorias está dada cuando el proceso a estimar y las mediciones son no lineales. Se utiliza entonces un EKF el cual se ha desarrollado aquí de forma similar a como lo expone Brown et al. (1997). Para esta sección, el modelo no lineal discreto y estocástico se representa por una ecuación, que surge de todas las consideraciones dadas por los balances energéticos tomados de la ec. (1). Quedando entonces como

$$x_{k+1} = f(x_k, \omega_k) \quad (3)$$

para un vector de mediciones representado por  $z(k) \in \mathbb{R}^2$  tal que:

$$z_k = h_o(x_k, v_k) \quad (4)$$

donde las variables aleatorias  $\omega_k$  y  $v_k$  representan los ruidos del proceso y de las mediciones respectivamente. Se supone que dichos ruidos son independientes entre sí, blancos y con distribución normal de probabilidad.

#### 3.2.1 Algoritmo del Filtro Kalman Extendido

Se presentan las ecuaciones del algoritmo utilizando el sistema descrito por las ecs. (3) y (4) una vez linealizadas mediante el Jacobiano del

sistema en cada paso de discretización. Luego, las ecuaciones de actualización temporal del EKF son:

Ecuación del modelo del sistema discreto:

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_k) \quad (5)$$

Ecuación de la covarianza del error en el paso  $k$ :

$$P_{k+1|k} = \Theta_k P_k \Theta^T k + Q_k \quad (6)$$

donde  $\Theta$  es la matriz Jacobiana de derivadas parciales de  $f(\cdot)$  con respecto a  $x_k$ , o sea:

$$\Theta_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_{k,j}} f_i(x_k, u_k, \theta) \quad i,j = 1, \dots, n \text{ para } n \text{ estados.}$$

y  $Q$  es la matriz de covarianza de los ruidos del proceso. Luego las ec. (7), (8) y (9) expresan la actualización de la medición:

Ecuación de la ganancia de Kalman:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (7)$$

donde  $R$  es la matriz de covarianza de los ruidos de los sensores.

Ecuación de los estados estimados:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - h_o(\hat{x}_{k|k-1})) \quad (8)$$

Ecuación de la covarianza del error para el paso  $k$ :

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (9)$$

donde  $H$  es la matriz Jacobiana de derivadas parciales de  $h_o(\cdot)$  con respecto a  $x_k$ ,

$$H_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_{k,j}} h_{oi}(x_k, \theta)$$

donde  $i=1 \dots k, j=1 \dots n$  para  $k$  mediciones.

### 3.2.2. Aplicación del filtro al modelo del invernáculo

Se han considerado como variables a estimar: la temperatura del suelo ( $\hat{t}_s$ ), y la temperatura de la plántula ( $\hat{t}_p$ ). Para la sintonía del filtro se realizaron varios experimentos y se llegó a que los parámetros convenientes son:  $Q_{ic}=2$ ,  $Q_{it}=2$ ,  $Q_{ip}=2$ ,  $Q_{if}=2$  y  $Q_{wi}=2$ ;  $R_{it}=2$ ,  $R_{ic}=2$  y  $R_{wi}=2$ . Todos los valores están dados en  $^{\circ}\text{C}^2$  y el de  $Q_{wi}$  se ha dado en (Kg. de vapor de  $\text{H}_2\text{O}/\text{Kg}$  de aire seco)<sup>2</sup>.

Se muestran en las Figuras 2 y 3 los resultados obtenidos para la temperatura estimada de la plántula ( $t_{pe}$ ) y el suelo, respectivamente, para las primeras 24 hs. de simulación a lazo abierto. Se compara con los resultados del modelo matemático.

En ambos casos debe apreciarse la rápida convergencia del filtro aún cuando se parte de condiciones iniciales distintas a las de las variables de estado del invernáculo.

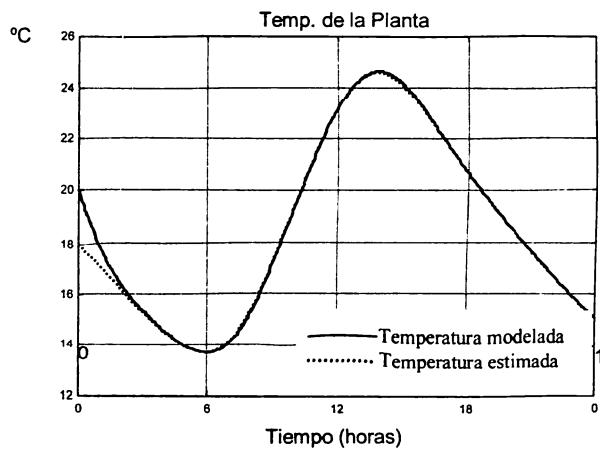


Figura 2. Temperatura de la plántula estimada y modelada matemáticamente

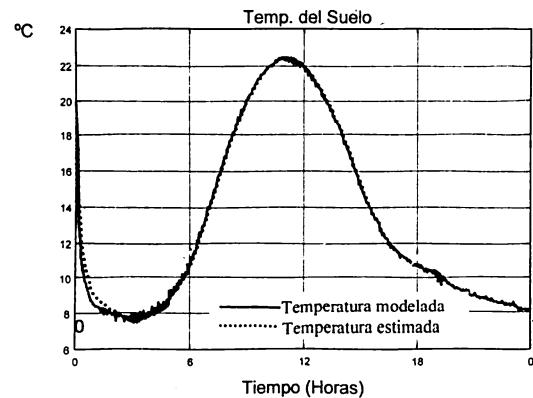


Figura 3. Temperatura del suelo estimada y modelada matemáticamente.

### 3.2.3. Análisis de la convergencia del EKF

Se realiza aquí la prueba de convergencia del filtro utilizando la propiedad de observabilidad vista en 2.1.1. Se define entonces  $O$  como un subconjunto compacto convexo de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\sim O$  el complemento de  $O$  y  $\varepsilon > 0$  una constante positiva. Asimismo

$$d(x, \sim O) = \inf \{x - y : y \in \sim O\}$$

y

$$O_\varepsilon = \{x \in O : d(x, \sim O) \geq \varepsilon\}.$$

Puesto que  $O$  es compacto,  $A := \sup_{x \in O} \frac{\partial f}{\partial x}(x)$  y

$Dh := \sup_{x \in O} \frac{\partial h}{\partial x}(x)$  están acotadas. Sea

$$a = \max(1, A)$$

y

$$b_k = (I + P_0 D h^2 R^{1/2})^2 a^k \prod_{l=1}^k \left\{ I + D h^2 R^{-1/2} \right\}^2 \Psi$$

donde

$$\Psi = A^{2l} P_0 + Q^{1/2} (A^{2(l-1)} + A^{2(l-2)} + \dots + I).$$

Luego, se considera una condición suficiente para mantener las estimas  $\hat{x}_{k|k-1}$  y  $\hat{x}_k$  cerca del estado verdadero  $x_k$ .

**Teorema 1 (Song and Grizzle, 1995)** Consideré el sistema (3) y su EKF asociado (7), (8) y (9). Suponga que las siguientes condiciones se mantienen.

1.  $x_k \in O_\varepsilon$ , para algún  $\varepsilon > 0$ ,  $0 \leq k \leq M$

2.

$$e_0 = |\hat{x}_{0|k-1} - x_0| \leq \frac{\delta}{b_M} \text{ para algún } 0 \leq \delta \leq \varepsilon / 2$$

Entonces para  $k = 0, 1, \dots, M$ ;  $M = n-1$

$$|\hat{x}_{k|k-1} - x_k| \leq \delta \quad \text{y} \quad |\hat{x}_k - x_k| \leq \delta.$$

Para obtener la convergencia generalmente es necesario tener una buena suposición inicial o tener una no linealidad débil en el sentido que  $Df^2$  y  $Dh^2$  sean lo suficientemente pequeños.

Para  $\delta = 1^\circ\text{C}$  y partiendo de un error inicial de  $2^\circ\text{C}$  se muestra en las Figuras. 4 y 5 la convergencia del filtro para estos parámetros y por tanto el cumplimiento del teorema.

En las Figuras. 4 y 5 se presenta el valor absoluto del error entre la temperatura estimada previa y posterior con el valor real (tanto para la temperatura de la plántula como para la temperatura del suelo). Nótese que el error que se comete es aceptable ( $0.3^\circ\text{C}$  para la temperatura de la plántula y  $0.5^\circ\text{C}$  para la temperatura del suelo) para los propósitos que se tienen. Este error podría disminuirse con un mejor ajuste de los parámetros del filtro o disminuyendo el tiempo de muestreo, pero conduciría a una mayor carga de cálculo.

Con las variables estimadas se tiene el vector de estado completo el cual se utiliza para la linealización entrada-salida (*Input/Output Linea-*

*rization*) cuyos resultados se resumen como sigue.

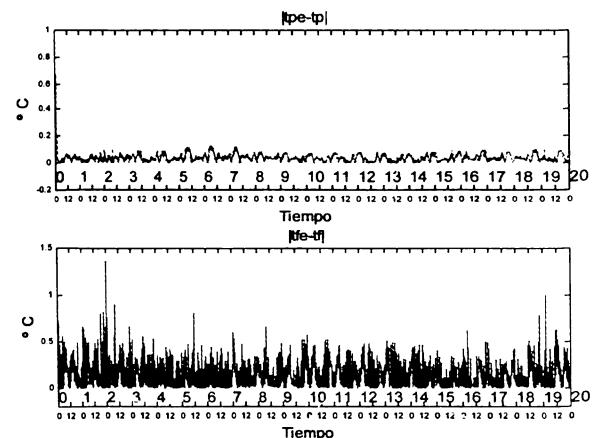


Figura 4. Error entre el valor estimado previo y el valor real  $|\hat{x}_{k|k-1} - x_k|$

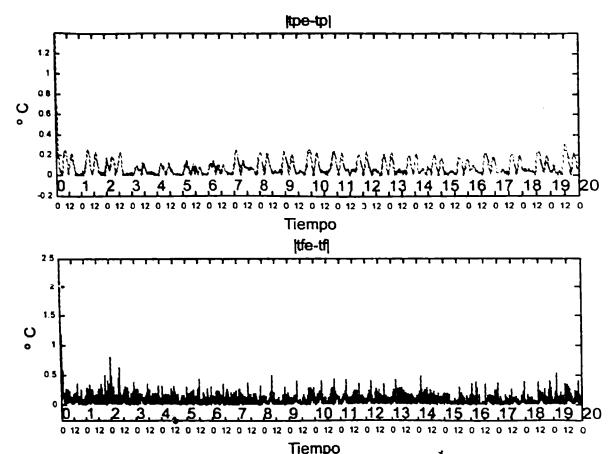


Figura 5. Error de estimación en la temperatura de la planta y el suelo  $|\hat{x}_k - x_k|$

## 4 LINEALIZACIÓN POR FL DEL INVERNÁCULO

### 4.1 Aproximación por Linealización I/O

Considerando el sistema descrito por la ec. 1. El grado relativo  $r$  del mismo está definido como

$$\begin{aligned} L_g L_f^{i-1} h_c(x) &= 0 \quad i = 1, 2, r-1 \\ L_g L_f^{r-1} h_c(x) &\neq 0 \quad \forall x \in \Re^n \end{aligned} \tag{10}$$

donde

$$L_f h_c(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i$$

$$L_g h_c(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} g_i$$

$$L_f^k h_c = \left( L_f^{k-1} h_c(x) \right) \quad k > 1$$

Los resultados de linealización entrada-salida se resumen en el siguiente lema.

**Lema 1 (Isidori, 1995)** Supóngase que el sistema tiene grado relativo  $r$ , entonces existe una transformación de coordenadas,

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \phi(x) = \begin{bmatrix} h_c(x) \\ L_f h_c(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h_c(x) \\ \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-r}(x) \end{bmatrix}$$

la cual satisface

$$L_g \phi_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n-r$$

tal que el sistema representado por la ec. 10 puede transformarse de la forma siguiente

$$\dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, \quad i = 1, \dots, r-1 \tag{11a}$$

$$\dot{\xi}_r = a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u \tag{11b}$$

$$\eta = q(\xi, \eta) \tag{11c}$$

$$y = \xi_1 \tag{11d}$$

donde

$$\begin{aligned} a(\xi, \eta) &= L_f^r h_c(x) \\ b(\xi, \eta) &= L_g L_f^{r-1} h_c(x) \end{aligned}$$

y

$$q_i(\xi, \eta) = L_f \phi_i(x), \quad i = 1, \dots, n-r$$

La linealización del sistema invernáculo utilizado aquí puede verse con mayores detalles en (*Piñón et al.*, 1998). En ese trabajo se obtuvo el grado relativo  $r=1$ , y se hizo el desacople de las perturbaciones. Luego el sistema transformado queda de la forma

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_i(t) \\ t_c(t) \\ t_f(t) \\ t_p(t) \\ w_i(t) \end{bmatrix}$$

Por tanto, puede expresarse en forma normal como

$$\dot{\xi}_I = a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u + s(\xi, \eta)w \tag{12a}$$

$$\eta = q(\xi, \eta) + k(\xi, \eta)w \tag{12b}$$

Aquí se introdujeron las funciones suaves  $a$ ,  $b$ ,  $s$ ,  $q$  y  $k$ . Los detalles de cómo estos dependen de  $f$ ,  $g$ ,  $p$  y  $h$  pueden verse en (*Henson*, 1997). Para que el sistema de la ec. 12a sea lineal, la realimentación debe tener la forma

$$u = \alpha(\xi, \eta) + \beta(\xi, \eta)v + \gamma(\xi, \eta)w$$

considerando el desacople de las perturbaciones en el término  $\gamma$ . Luego el sistema (12) queda expresado como

$$\dot{\xi}_I = v \tag{13a}$$

$$\eta = q(\xi, \eta) + k(\xi, \eta)w \tag{13b}$$

Ahora bien, como la Linealización I/O está restringida a los procesos donde la dinámica de los ceros es estable, se procede a analizar solamente la dinámica de  $q(\xi, \eta)$  debido a que para este caso  $k(\xi, \eta)$  es constante.

#### 4.2 Análisis de la dinámica de los ceros del invernáculo

La dinámica de los ceros de un sistema ha tenido varias interpretaciones:

- Es la dinámica que corresponde a las variables de estado no observables del sistema.
- Es la dinámica invariante bajo la cual evoluciona el sistema cuando la salida se restringe a cero todo el tiempo.
- Es la dinámica correspondiente a una realización mínima de la inversa del proceso.

Nótese que las tres definiciones son equivalentes tanto en los sistemas lineales como en los sistemas no lineales de una sola entrada y una sola salida (SISO). Surge entonces el problema de analizar cuando la dinámica de dicho sistema es estable. Por tal motivo se analiza la estabilidad del subsistema de la ecuación (13b) para una trayectoria  $\xi_R$ .

Para dicho análisis se utilizará el primer método de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Por tanto se realiza el Jacobiano

$$Q = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial q(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \end{array} \right]_{\xi=\xi_R}$$

y analizando el signo de los valores propios de  $Q$  puede concluirse estabilidad. Si todos los valores propios tienen parte real negativa, la dinámica de los ceros es asintóticamente estable. Por tanto, se calcularon dichos valores haciendo el Jacobiano del sistema de la ecuación (13b) y calculando los autovalores para la trayectoria de temperatura interior deseada que se presenta en la Figura 6, la cual es objeto de estudio de otros trabajos (Schugurensky *et al.*, 1998), (Fullana *et*

*al.*, 1999). La ecuación característica queda entonces

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

donde

$$a_i = \varphi_i(t_c, t_f, t_p, w_i) \quad i = 0, \dots, 3$$

Para este problema, las temperaturas y humedad involucradas se suponen siempre mayores que cero, entonces, los coeficientes  $a_i$  cumplen con la condición de Hurwitz y se puede esperar estabilidad asintótica para la referencia dada cuando  $t_c, t_f, t_p, w_i > 0$ .

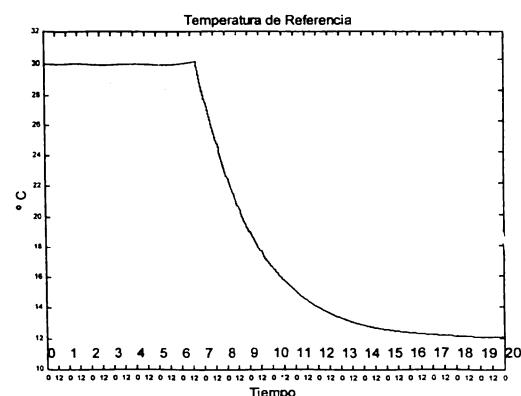


Figura 6: Trayectoria de referencia óptima

Nótese que en esta figura la temperatura del interior debe estar entre 12 y 30 °C. Esto se debe a que el tomate se desarrolla mejor en climas moderados. Temperaturas demasiado altas o demasiado bajas tienen efectos adversos sobre la plántula.

## 5 EL MBPC CON RESTRICCIONES + FL

Con la combinación de técnicas de MBPC se intenta ganar eficiencia de cálculo linealizando la planta y reformulando el problema de MBPC en las nuevas coordenadas linealizadas. El uso de un modelo linealizado para la predicción, reduce el problema de resolver el MBPC no lineal a un problema de Programación Cuadrática (QP) para el sistema linealizado que puede tener un efecto negativo en la eficiencia. La principal dificultad del MBPC+FL se debe a que el problema de

optimización original para el sistema no lineal sujeto a restricciones lineales en la entrada, se transforma entonces en un problema de optimización para un sistema lineal sujeto a restricciones en la nueva entrada. Este nuevo problema de optimización no es fácil de resolver a menos que las restricciones no lineales sean convexas (*Nevistic, 1996*).

### 5.1 Plantamiento del problema

El algoritmo MBPC se formula de manera tal que debe resolverse, (en línea) en cada instante de tiempo un problema de control óptimo con horizonte finito. La función objetivo aquí utilizada está dada en términos de la nueva variable de control  $v$

$$J = \min_{v_k} \left[ \sum_{i=1}^{NP} (y_{k+i} - y_{Rk+i})^T Q (y_{k+i} - y_{Rk+i}) + \sum_{i=1}^{NC} v_{k+i}^T R v_{k+i} \right] \quad (14)$$

sujeto a

$$y_{\min} < y < y_{\max} \quad (14a)$$

$$v_{\min} < v < v_{\max} \quad (14b)$$

donde

$y_{k+i}$ : representa la salida predicha en  $k+i$ .

$v_k$ : secuencia de control  $v_{k+i}, i=0, \dots, NC$  que calcula el algoritmo de optimización en el tiempo  $k$ ;  $v_{k+i}=0$  para  $i>NC$

$Q$ : matrices que ponderan el error y el esfuerzo de control en las nuevas coordenadas.

$NP$ : horizonte de predicción (de salida) y de  $NC$ : control (de entrada), respectivamente;  $NC \leq NP$ .

El MBPC está considerado como una metodología que trata explícitamente tanto con las restricciones en la entrada como en la salida ya que estas se incluyen directamente en la optimización. Aunque la solución al problema de

control da como resultado una secuencia, de esta sólo se toma la primera acción de control y se realiza la llamada predicción con horizonte deslizante.

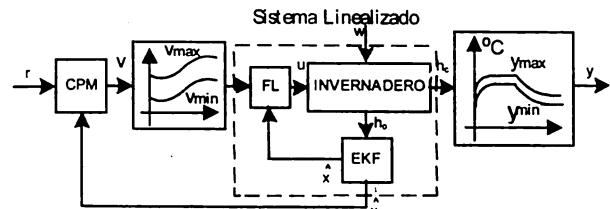


Figura 7. Estructura FL + MPC utilizada

En la Figura 7 se muestra la estructura de control utilizada MBPC+FL para controlar el sistema invernáculo no lineal con restricciones. Un lazo externo de control predictivo "manipula" a un lazo interno en el que se linealiza el modelo del invernáculo mediante realimentación, con el objetivo de seguir una función de la referencia externa  $r$  respetando las restricciones en la variable manipulada (calefacción/refrigeración) y en la variable controlada (temperatura interior del invernáculo). Dichas restricciones se manejan como desigualdades matriciales dadas en las ecuaciones (14a) y (14b) que representan los valores máximos y mínimos que no deben violarse.

Se preservan las propiedades del lazo FL, o sea, la ecuación (13a) se mantiene sólo cuando se satisfacen las restricciones originales en  $u$ . Esto implica que el diseño MBPC debe hacerse teniendo en cuenta las restricciones implícitas en la nueva entrada  $v$ .

Con la entrada real

$$u = u(x) \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$$

$$u_{\min} = -300 \text{ W/m}^2 \quad u_{\max} = 400 \text{ W/m}^2$$

y con la entrada  $v$  de la planta linealizada por

$$v = a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u + \gamma(\xi, \eta)w$$

donde

$$a(\xi, \eta) = f_2(\xi, \eta)/ca/ah$$

$$b(\xi, \eta) = 1/ca/ah$$

$$\gamma(\xi, \eta) = k_{II}/ca/ah$$

pueden deducirse fácilmente las expresiones para el conjunto de restricciones  $\Omega_v$

$$v_{\min} = a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u_{\min} + \gamma(\xi, \eta)w \quad (15)$$

$$v_{\max} = a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u_{\max} + \gamma(\xi, \eta)w \quad (16)$$

Estas ecuaciones se mantienen en el caso donde  $a(\xi, \eta) \geq 0$ . Para  $a(\xi, \eta) \leq 0$  se describe la cota inferior mediante la ecuación (15) y la cota superior por la ec. (16). Está claro que debido a la FL, las restricciones originales ( $u_{\min}, u_{\max}$ ) se mapean a las restricciones del MBPC en  $v$ , que en general es no lineal y dependiente de los estados. Debe destacarse que en presencia de restricciones, las propiedades lineales de la planta obtenida por FL, se pierden, lo cual produce entonces un pobre desempeño y conlleva frecuentemente a un comportamiento inestable del sistema como fue demostrado por Nevistic (1994). Puesto que la mayoría de los sistemas prácticos tienen que tratar con restricciones físicas en la entrada de la planta, es necesario tener un controlador que pueda manejar las restricciones y de esta forma preservar la linealidad del sistema a controlar. Esta es una de las razones por la cual se eligió MBPC.

## 6 RESULTADO DE LAS SIMULACIONES

Por requerimientos de calidad del cultivo de tomate este debe estar a una temperatura comprendida entre los 10°C y 30°C, pero para el óptimo crecimiento de la plántula debe seguir a la temperatura de referencia con un error de 3°C, aunque en los períodos en los que no hay luz solar esta puede disminuir hasta aproximadamente 12°C.

Se realizaron varias simulaciones en las cuales se tienen en cuenta las restricciones a las que se encuentra sometido el calefactor/refrigerador y la variable controlada ( $t_i$ ). Se muestra en la Figura 8 y 9 el comportamiento de la temperatura y humedad del aire interior y exterior.

Nótese que la salida controlada ( $t_i$ ) de la Figura 8, en los primeros 7 días no cumple las restricciones porque al ser estas demasiado "restrictivas" las soluciones factibles del algoritmo de programación cuadrática caen dentro de un conjunto vacío. Por tal motivo se debe llegar a un compromiso entre el comportamiento deseado desde el punto de vista operacional y el gasto energético en el que se incurre para cumplir el propósito de seguimiento. Se destaca la importancia de tener en cuenta la restricción en la variable controlada (o salida), ya que violarla conlleva a que ocurran serios daños en el cultivo. Un exceso de temperatura puede causar el deterioro parcial o total de la plántula, y si la temperatura alcanza valores por debajo de los requeridos se puede detener el crecimiento.

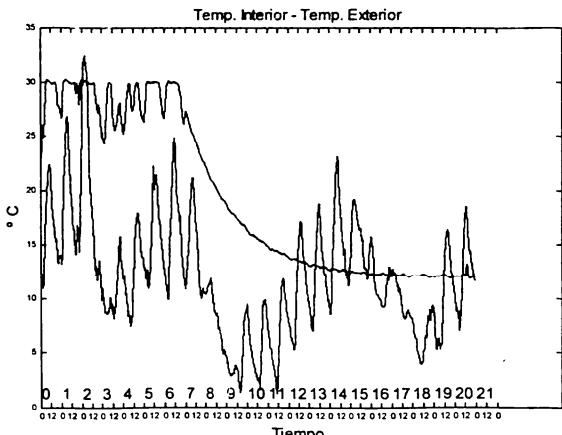


Figura 8: Evolución de la temperatura dentro y fuera del invernáculo sin control de ventanas

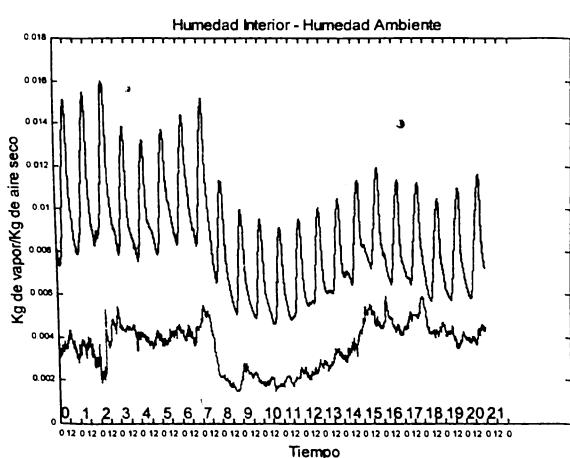


Figura 9: Evolución de la humedad dentro y fuera del invernáculo sin accionamiento de ventanas

Para que el ahorro de energía sea aún mayor se deben manipular convenientemente la abertura o cierre de las ventanas teniendo en cuenta las condiciones climáticas dentro y fuera del invernáculo. Por tal motivo se hicieron simulaciones para demostrar el ahorro energético que se obtiene cuando existe un adecuado control de las mismas. Se presentan en las Figuras 10 y 11, los resultados obtenidos con dicho control. En la Figura 10 puede verse como la temperatura del aire interior cumple con las especificaciones requeridas aunque a costa de un incremento de la humedad que debe ser tenido en cuenta según sea la etapa de crecimiento de la pántula. (Ver Figura 11).

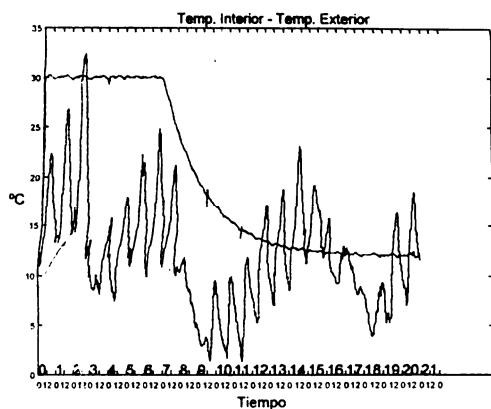


Figura 10: Evolución de la temperatura dentro y fuera del invernáculo con control de ventanas

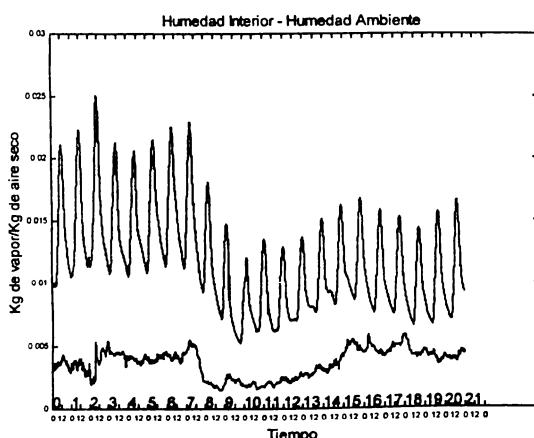


Figura 11: Evolución de la humedad dentro y fuera del invernáculo con accionamiento de ventanas

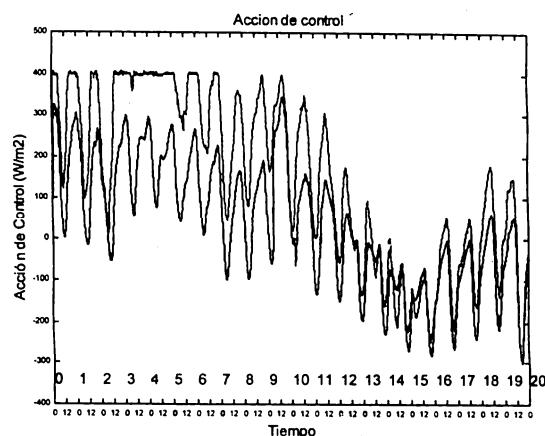


Figura 12: Acción de control con y sin accionamiento de las ventanas

Por último se muestra en la Figura 12 la acción de control que debe llevarse a cabo para obtener el objetivo de seguimiento. Se grafica con líneas continuas la acción que debe tomarse cuando no existe el adecuado accionamiento de las ventanas. Nótese que en este caso el calefactor llega a la zona de saturación y toma los valores extremos especificados en el software de control. El uso de esta señal da como resultado un pobre comportamiento en el sistema de control y no se garantiza la obtención del óptimo cuando se violan las restricciones. Además no se alcanza el propósito fundamental del controlador que consiste en aplicar la mejor señal de control posible que minimice el funcional de coste.

De la misma forma ha sido representada, pero con líneas discontinuas, la acción que debe ejecutar el calefactor/refrigerador cuando existe un adecuado accionamiento de dichas ventanas. Nótese el considerable ahorro energético que se logra durante los días de mayor necesidad de calor y como se logra el seguimiento con un error casi imperceptible.

Con todo lo anterior no sólo se valida la factibilidad del algoritmo MBPC+FL sino que se muestra su habilidad para lograr un buen desempeño del control de temperatura del invernáculo en presencia de restricciones.

## 7 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó el modelo no lineal de un invernáculo al cual se le ha hecho un estudio de observabilidad. Esto ha estado motivado por la necesidad de utilizar un Filtro Kalman Extendido como observador para la obtención de estimas de las variables no medibles.

Se realizó un estudio de convergencia del filtro para poder establecer las cotas de los errores de covarianzas en el EKF, llegándose a que se debe imponer la condición de observabilidad en la linearización del sistema no lineal a lo largo de la trayectoria estimada. A partir de lo anterior se obtuvo el vector de estado completo y se pudo realizar la linearización entrada-salida.

Debido a su relativa eficiencia de cálculo, la estrategia del MBPC+FL parece ser atractiva para una clase de sistemas no lineales linealizables por realimentación. El estudio realizado aquí se hace con el propósito de una futura implantación práctica en la que se considerarán las limitaciones físicas del calefactor/refrigerador y las restricciones necesarias para un buen rendimiento en el crecimiento de las plántulas, minimizando además el consumo de energía.

## APÉNDICE

$a_{bs}$	Absorptividad del material de la cubierta
$a_h$	Altura promedio del invernáculo [m]
$a_{lf}$	Absorptividad del suelo a la radiación solar de onda larga
$a_{lp}$	Absorptividad del plantín a la radiación solar de onda larga
$a_{lc}$	Absorptividad del suelo a la radiación solar de onda larga
$a_{rl}$	Relación de área proyectada del plantín sobre área del suelo
$a_{rl1}$	1-arto, $1 \leq \text{arto} \leq 0$
$ca$	Capacidad calorífica volumétrica del aire [KJ/m <sup>3</sup> /°C]
$cc$	Capacidad calorífica volumétrica del cobertor [KJ/m <sup>3</sup> /°C]

$cs$	Capacidad calorífica volumétrica del suelo [KJ/m <sup>3</sup> /°C]
$cp$	Capacidad calorífica volumétrica de un plantín [KJ/m <sup>3</sup> /°C]
$dex$	Espesor del cobertor
$ep_{sa}$	Emisividad efectiva del aire
$ep_{sc}$	Emisividad del cobertor
$ep_{sf}$	Emisividad del suelo
$ep_{sp}$	Emisividad del plantín
$\gamma$	Resistencia a la difusión de vapor de agua [h/m]
$g_{si}$	Factor de sequedad de la superficie del suelo
$h_i$	Coeficiente de transferencia de calor entre el cobertor y el aire interior [KJ/m <sup>2</sup> /h/°C]
$h_{lg}$	Calor latente para evaporación [KJ/Kg]
$h_o$	Coeficiente de transferencia de calor entre el cobertor y el aire exterior
$k_m$	Coeficiente de transferencia de masa
$k_s$	Conductividad térmica del suelo [KJ/h/m/°C]
$lai$	Indice de área de hoja [m <sup>2</sup> hoja/m <sup>2</sup> suelo]
$q_h$	Velocidad de flujo de aire [m <sup>3</sup> /m <sup>2</sup> /h]
$rad$	Radiación solar directa [W/m <sup>2</sup> ]
$rad_s$	Radiación solar difusa [W/m <sup>2</sup> ]
$\rho$	Densidad del aire [kg/m <sup>3</sup> ]
$rmc$	Reflectividad de la cobertura a la radiación de onda larga
$sig$	Constante de Stefan-Boltzman
$t_{bl}$	Límite inferior de la temperatura del suelo [°C]
$t_c$	Temperatura del cobertor [°C]
$t_f$	Temperatura de la superficie del suelo [°C]
$t_i$	Temperatura del aire interior [°C]
$tlv$	Transmisividad de la cobertura a la radiación de onda larga
$t_o$	Temperatura del aire exterior [°C]
$t_p$	Temperatura del plantín
$tran$	Transmisividad del material del cobertor a la radiación solar directa
$w_i$	Relación de humedad en el aire interior [kg vapor de agua/kg de aire seco]
$w_o$	Relación de humedad en el aire exterior [kg vapor de agua/kg de aire seco]
$z_0$	Espesor de la capa del suelo [m]

## REFERENCIAS

- Brown, R. and Hwang, P. *Introduction to random signals and applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, USA. (1997).
- Grizzle, J., Di Benedetto, M. and Lamnabhi, F. *Necessary conditions for asymptotic tracking in nonlinear systems*. IEEE Trans. on Automatic Control, 39(8):1782-1794, (1994).
- Fullana, R. *Optimization of constrained systems by iterative dynamic programming*. VIII RPIC, Argentina. Pp 23-28, 1999.
- Henson M., and Seborg, D. *Nonlinear process control*, Prentice Hall, New Jersey (1997).
- Holland C. *Fundamentals of Multicomponent Distillation*, McGraw-Hill, New York (1981).
- Isidori, A. *Nonlinear Control Systems*, Springer Verlang, New York (1995).
- Nevistic V. *Constrained control of nonlinear systems; feedback linearization + MPC*, Talk at the American Control Conference, (1994).
- Nevistic V., *Constrained nonlinear optimal control: A converse HJB approach*. Technical Memorandum No. CIT-CDS 96-021. (1996).
- Nijmeijer H. and Arjan van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer Verlang, New York (1990).
- Pappas, G., Lygeros, J. and Godbole,D. *Stabilization and Tracking of feedback linearizable systems under input constraints*. IEEE Conference on Decision an Control, 596 – 601. (1995)
- Piñón S., Soria, C., García, C. and Kuchen, B. *Optimal Control of a geenhouse by feedback linearization*. IEEE 98 INDUSCON. 261-265. Sao Paulo, (1998).
- Schugurensky, C. *Cultivo en invernáculo*. Reporte interno INAUT, Argentina, 1998.
- Takakura, T. *Climate under cover, Digital dynamic simulation*. In Plant Bio-Engineering. Kluwer Academic Publisher, (1993).