

CONTROL DE UN MOTOR DC PARALELO CON TÉCNICAS GEOMÉTRICAS DIFERENCIALES

FABIOLA ANGULO

Grupo de Percepción y Control Inteligente, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

FLAVIO PRIETO

• Grupo de Percepción y Control Inteligente, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

GUSTAVO OSORIO

Grupo de Percepción y Control Inteligente, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

CARLOS OCAMPO

Grupo de Percepción y Control Inteligente, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

Recibido para revisión 21 de Enero de 2002, aceptado 27 de Marzo de 2002, versión final recibida 5 de Abril de 2002

RESUMEN: En el presente trabajo se muestra la utilización de la técnica de control basada en linealización por realimentación del estado y las consideraciones que deben tenerse en cuenta, de acuerdo con la no linealidad de saturación inherente al modelo, al momento de inducir la dinámica lineal deseada. Se ha estudiado el caso particular de un motor DC paralelo, considerando como salida el torque y se ha analizado el desempeño de esta técnica de control cuando se presentan variaciones en la carga y perturbaciones paramétricas y no paramétricas.

PALABRAS CLAVES: Sistemas no Lineales, Linealización por Realimentación, Linealización Entrada-Salida, Control de Motores.

ABSTRACT: In this paper we present the use of a control technique based on state feedback linearization, and the considerations that must keep in mind in agreement with the nonlinearity of model inherent saturation, at the time of inducing desired linear dynamics. The particular case of a parallel motor DC has studied, considering torque as the output. It has been analyzed the performance of this control technique when parametric and nonparametric disturbances and load changes appear.

KEYWORDS: Nonlinear Systems, State Feedback Linearization, Input-Output Linearization, DC Motor Control.

1 INTRODUCCIÓN

La linealización entrada-salida (Slotine and Li, 1991; Khalil, 1996 y Vidyasagar, 1993) es una técnica por medio de la cual se pueden obtener modelos matemáticos lineales de sistemas no lineales a través de transformación del estado, lo que implica un modelo exacto, en oposición a la linealización por expansión en series de Taylor, que conlleva a un modelo aproximado. Esta linealización se obtiene realimentando los estados

para cancelar las no linealidades de la planta, con lo cual se genera una relación lineal entre la salida y y una nueva excitación v . Una vez se tiene esta relación lineal (la cual generalmente es inestable) se induce una dinámica lineal estable deseada, con el objetivo de aplicar posteriormente métodos de control lineal. Su ventaja es que permite manipular el sistema en una amplia región del espacio de estado.

El presente trabajo se encuentra dividido en seis secciones. En la Sección 2 se presentan los tópicos generales de la linealización por

realimentación. La aplicación de esta técnica al motor DC se muestra en la Sección 3. La Sección 4 brinda los resultados y sus respectivos análisis, y en la Sección 5 se dan algunas conclusiones.

2 LINEALIZACIÓN ENTRADA-SALIDA

Para generar una relación lineal entre la salida y y una nueva excitación v se debe tener una relación directa entre la salida y la entrada del sistema; esta relación se obtiene derivando la salida tantas veces como sea necesario hasta que la excitación aparezca explícitamente en la ecuación, esto se conoce como grado relativo del sistema y se nota por r , en general $r \leq n$, con n el número de estados. Considérese el sistema descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

donde \mathbf{x} es el vector de estado y tiene dimensiones $n \times 1$, u es la excitación y es un escalar, \mathbf{f} es una función vectorial del estado, de la excitación y del tiempo t y es de dimensiones $n \times 1$, en este sentido \mathbf{f} es un campo vectorial de $\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$; y es la salida del sistema y es un escalar y h es un campo escalar ($\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$). A este sistema se le llama afín (Slotine and Li, 1991; Nijmeijer and Vander Schaft, 1990) porque es lineal respecto de la excitación, análogamente como lo es un sistema lineal. Con el objetivo de aplicar la técnica de linealización por realimentación se requiere que el campo vectorial \mathbf{f} sea suave, en el sentido que existan derivadas parciales continuas, al menos del orden que sea requerido al aplicar la técnica.

Si se toma la ecuación (1) y se deriva la salida con respecto al tiempo se tiene,

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \nabla h(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u) \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que la derivada de Lie (Vidyasagar, 1993; Khali, 1996 e Isidoro, 1995) de un campo escalar h respecto de un campo

vectorial \mathbf{f} es una función escalar notada como: $\nabla h \mathbf{f} = L_f h$, la primera derivada de la salida del sistema, con esta notación, sería

$$\dot{y} = L_f h(\mathbf{x}) + L_g h(\mathbf{x})u \quad (3)$$

la segunda y la i -ésima derivadas pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= L_f^2 h(\mathbf{x}) + L_g L_f h(\mathbf{x})u \\ y^{(i)} &= L_f^i h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{i-1} h(\mathbf{x})u \end{aligned} \quad (4)$$

donde $L_f^i h(\mathbf{x})$ corresponde a $L_f (L_f^{i-1} h(\mathbf{x}))$. Nótese que u sólo se presentará cuando el producto $L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0$. Así para un sistema con grado relativo r , se tiene,

$$\dot{y} = L_f h(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= L_f^2 h(\mathbf{x}) \\ &\vdots \\ y^{(i)} &= L_f^i h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\vdots \\ y^{(r)} = L_f^r h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})u$$

Haciendo $u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v$, con

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{-L_f^r h(\mathbf{x}) - k_1 L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) - \dots - k_r h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})}$$

y $\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})}$, se tiene una ecuación

diferencial lineal entre la salida y y la nueva excitación v de la forma:

$$y^{(r)} = -k_1 y^{(r-1)} - k_2 y^{(r-2)} - \dots - k_r y + v \quad (6)$$

Los coeficientes k_i son elegidos de acuerdo al comportamiento deseado, ya que son los que están imponiendo la nueva dinámica en el sistema. Así se obtendrá un sistema con dinámica entrada-salida determinada y estado estable, previa comprobación de la estabilidad de la dinámica interna (Isidoro, 1995; Nijmeijer and Van der Schaft, 1990 y Marino and Tomei, 1995).

Una vez se tiene una relación directa entre la salida y la entrada, se puede obtener un nuevo modelo matemático del sistema asignando las variables de la siguiente manera: r variables de estado (z_i , $1 \leq i \leq r$) tomadas de la ecuación que relaciona la entrada con la salida y las otras $n-r$ (z_j , $1 \leq j \leq n-r$) se obtienen del modelo original del sistema, de la siguiente manera: puesto que el objetivo es cambiar de coordenadas el sistema, debe haber n componentes (correspondientes a otra base), que cubran el espacio, o por lo menos una región del mismo, en la cual la transformación sea válida, lo que corresponde a un difeomorfismo local (Isidoro, 1995; Nijmeijer and Vander Schaft, 1990). Estas componentes deben satisfacer la condición de independencia lineal, lo que se garantiza si $\frac{\partial z_j}{\partial x} * g(x) = 0$ para

todo $1 \leq j \leq n-r$. Los estados que no quedan definidos dentro de la representación entrada-salida (las $n-r$ variables restantes) son conocidos como la dinámica interna, y su nombre obedece precisamente a que en esta representación no se puede obtener ninguna información de ellos.

Para utilizar con éxito la técnica de linealización entrada-salida se requiere que la dinámica interna del sistema sea estable, esta dinámica existe siempre y cuando el grado relativo sea inferior al orden del sistema. Supóngase que el sistema definido por (1) tiene grado relativo r menor que n . Así debe existir una transformación del estado $z=F(x)$, de tal manera que las primeras r variables correspondan a y y sus derivadas, $[z_1 \ z_2 \ \dots \ z_r]^T = [y \ \dot{y} \ \dots \ y^{(r-1)}]^T$ y $n-r$ variables que satisfagan el principio de independencia lineal. Esta transformación es posible siempre y cuando el Jacobiano de $F(x)$ sea invertible, por lo menos en la región de

operación. Con esta transformación, la dinámica del sistema en forma normal puede ser expresada como,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_r \\ \dot{z}_{r+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ a(z) + b(z)u \\ c_1(z) \\ \vdots \\ c_{n-r}(z) \end{bmatrix} \quad (7)$$

con salida $y = z_1$. La característica de esta representación es que presenta la dinámica interna de una manera explícita, ya que está definida por $[z_{r+1} \ z_{r+2} \ \dots \ z_n]^T$. Su análisis de estabilidad se hace determinando la estabilidad del sistema resultante cuando la excitación garantice salida cero. En este caso como la salida es la primera variable de estado, la parte del vector correspondiente a las primeras r variables de estado es cero, y la estabilidad de la dinámica interna se obtiene analizando la estabilidad de las últimas $n-r$ ecuaciones con las z_i correspondientes igualadas a cero (z_1, z_2, \dots, z_r).

3 LINEALIZACION VOLTAJE-TORQUE MOTOR DC PARALELO

Las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento de este sistema son (Krause and Wasynczuk, 1989):

$$\begin{aligned} \dot{i}_a &= -\frac{r_a}{L_{AA}} i_a - \frac{L_{AF}}{L_{AA}} i_f \omega + \frac{1}{L_{AA}} u \\ \dot{\omega} &= -\frac{B_m}{J} \omega + \frac{L_{AF}}{J} i_f i_a - \frac{1}{J} T_L \\ \dot{i}_f &= -\frac{R_f}{L_{FF}} i_f + \frac{1}{L_{FF}} u \end{aligned} \quad (8)$$

con r_a la resistencia en el circuito de armadura, L_{AA} inductancia del circuito de armadura, L_{FF} inductancia del circuito de campo, L_{AF} inductancia mutua de los circuitos de armadura y de campo, B_m fricción asociada al motor, J

momento de inercia, R_f resistencia del circuito de campo y u voltaje de excitación. Teniendo en cuenta que el momento de inercia y la fricción del motor y de la carga pueden quedar relacionadas en una sola expresión (Olivier, 1991) y considerando para este caso particular las siguientes constantes asociadas al motor: $r_a=0.6\Omega$, $L_{AA}=0.012H$, $L_{FF}=120H$, $L_{AF}=1.8$, $B_{m+L}=0.343N\cdot m\cdot s$, $J_{m+L}=1 N\cdot m\cdot s^2$, y $R_f=240\Omega$, las ecuaciones que describen el comportamiento son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -50x_1 - 150x_2x_3 + 83.33u \\ \dot{x}_2 &= -0.343x_2 + 1.8x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2x_3 + 0.00833u \end{aligned} \quad (9)$$

En este caso $x_1 = i_a$, $x_2 = \omega$ y $x_3 = i_f$. El voltaje de excitación nominal es de 240 V y la velocidad nominal de rotación es de 127 rad/s. Considerando como salida el torque del motor: $y = 1.8x_1x_3$ y derivando hasta que aparezca u explícitamente, se tiene que el grado relativo del sistema es uno y la ecuación que relaciona la excitación con la salida es,

$$\dot{y} = -93.6x_1x_3 - 270x_2x_3^2 + (0.015x_1 + 150x_3)u \quad (10)$$

El sistema tiene dinámica interna de orden dos. Es necesario encontrar la transformación a coordenadas normales. La primera componente de la función de transformación es $z_1 = 1.8x_1x_3$, las otras dos componentes deben cumplir que,

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} * g(x) = 0 \text{ y } \frac{\partial z_3}{\partial x} * g(x) = 0 \quad (11)$$

así, una posible selección de las otras componentes de la función de transformación es $z_2 = x_1 - 10000x_3$ y $z_3 = x_1 + x_2 - 10000x_3$. Para que esta transformación sea válida se debe garantizar que $\frac{\partial F(x)}{\partial x} \neq 0$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1.8x_3 & 0 & 1.8x_1 \\ 1 & 0 & -10000 \\ 1 & 1 & -10000 \end{bmatrix} = 1.8x_1 + 18000x_3$$

por lo tanto esta transformación es válida si $x_1 \neq -10000x_3$. La dinámica interna está dada por las últimas dos ecuaciones del sistema una vez esté expresado en forma normal y la salida se haga igual a cero, en este caso $z_1 = 0$. Al hacer la representación en forma canónica y reemplazar el valor de z_1 se obtienen las siguientes dos ecuaciones,

$$\dot{z}_2 = -50z_2 + 166.66u \quad (12)$$

$$\dot{z}_3 = -0.343z_3 - 49.657z_2 + 166.66u$$

La dinámica z_2 es estable, lo que a su vez garantiza la estabilidad de z_3 ; de este modo, la dinámica interna del sistema es estable.

Eligiendo la señal de control como,

$$u = \frac{93.6x_1x_3 + 270x_2x_3^2 - 5.5(1.8x_1x_3)}{0.015x_1 + 150x_3} + \frac{1}{0.015x_1 + 150x_3} v \quad (13)$$

al reemplazarla en (10) se obtiene la dinámica entrada salida $\dot{y} = -5.5\dot{y} + v$. Esta linealización es posible sólo si $x_1 \neq -10000x_3$, que es el mismo requerimiento para hacer la transformación del estado. La ecuación (13) representa la ecuación que linealiza el motor DC paralelo cuando se considera como salida el torque del motor. Nótese que ya se ha inducido la dinámica deseada, haciendo en (6) $k_1=5.5$

4 RESULTADOS

El motor sin linealizar, tiene el comportamiento que se muestra en la Figura 1. En ella se presenta la respuesta del sistema partiendo de condiciones de estado estacionario de un torque de 33.5N-m, y se cambia la excitación, inicialmente a 70V y

después a 240V. El valor de 33.5N-m se obtiene cuando se aplica un voltaje de 100V.

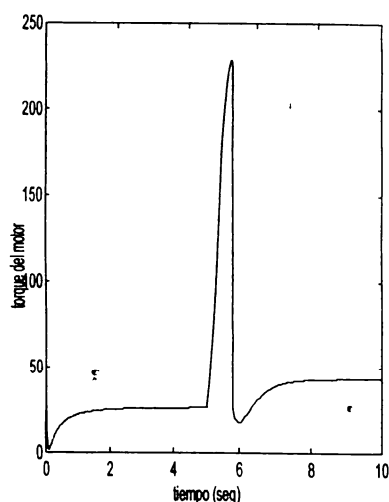


Figura 1. Comportamiento del torque

En este caso se ve claramente la no linealidad, pues el sobreimpulso presentado en cada uno de los casos no es proporcional a la señal de excitación. Estos sobreimpulsos son mucho mayores cuando el voltaje de excitación aumenta que cuando decrece. El torque presenta un tiempo de establecimiento de 3.1 segundos aproximadamente.

La dinámica impuesta (según la ecuación 13) fue

$$\dot{t} = -5.5\tau + v \quad (14)$$

la cual es amortiguada y tiene un tiempo de establecimiento de 0.73 segundos. Se ha seleccionado esta dinámica basado en las limitaciones sobre el esfuerzo de control. Valores de estado estacionario superiores no se pueden alcanzar por el efecto de saturación; una descripción más detallada de los efectos de este fenómeno sobre la linealización se dan en secciones posteriores. En la Figura 2 se muestran los resultados de la dinámica deseada (ecuación 14) en línea punteada y del sistema linealizado con realimentación del estado (en línea continua). Se ha reemplazado en la ecuación 9, la excitación u por la señal de control generada por 13. Por comodidad se parte del valor de estado estacionario correspondiente a un torque de 33.5

N-m, y se cambia la excitación a 70V y luego a 240V. En la Figura 3 se muestra el error.

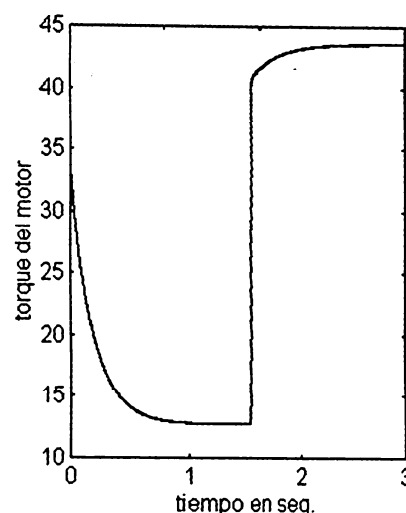


Figura 2. Comportamiento del torque para el sistema linealizado.

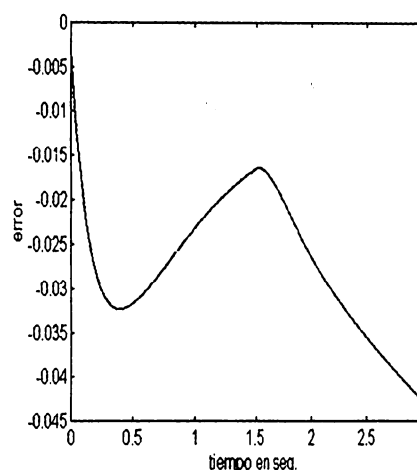


Figura 3. Error entre la dinámica lineal y la dinámica obtenida con linealización.

El comportamiento del torque es mucho mejor en todos los sentidos pues disminuyó el tiempo de establecimiento, la variable es amortiguada y se comporta prácticamente como un sistema lineal. Como el objetivo de la linealización es aplicar técnicas de control lineal, se procede a insertar un control integral. Este controlador fue calculado esperando una respuesta amortiguada. En la Figura 4 se observan las respuestas de cada uno de ellos (dinámica deseada en línea punteada y sistema linealizado con línea continua). La

constante para el control integral fue de 6.5. Se comenzó con un valor inicial del integrador de 28.4 para garantizar las condiciones iniciales impuestas. La dinámica esperada después de insertar el control integral tiene un par de polos en $s=-3.78$ y $s=-1.72$, en este caso el sistema se volvió un poco más lento pero puede seguir una referencia con comportamiento lineal.

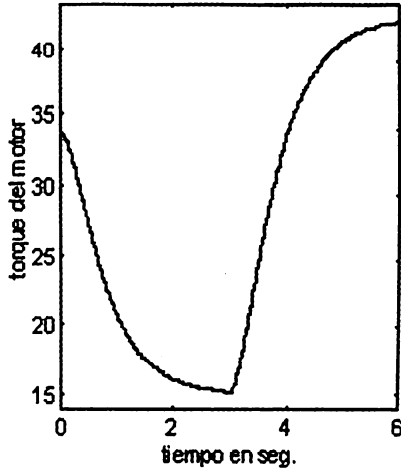


Figura 4. Comportamiento del torque con PI para los sistemas lineal y linealizado.

Para poder determinar las ventajas de este controlador, frente al control PI basado sobre un modelo lineal (Ogata, 1997; Franklin y otros 1994), se procedió a linealizar el sistema por expansión en series de Taylor y calcular el respectivo controlador. Para la linealización se partió del estado $x = [44.7 \ 97.6 \ 0.416]^T$ como punto de operación. Este estado es obtenido excitando el sistema con una señal de 100 V. Se obtuvieron las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 & -62.4 & -14640 \\ 0.7488 & -0.343 & 80.46 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 83.33 \\ 0 \\ 0.00833 \end{bmatrix} * u$$

$$y = [0.7488 \ 0 \ 80.28] * x \quad (15)$$

donde la notación con raya arriba implica desplazamiento del punto de operación. El comportamiento de los sistemas linealizado y no lineal se puede observar en la Figura 5 para pequeños cambios de la excitación $u = 100 \pm 25 \text{ V}$ y en la Figura 6 para grandes desplazamientos de la excitación $u = 50 \text{ V}$ y $u = 260 \text{ V}$. En línea continua el comportamiento real del sistema y en punteada el predicho por el modelo linealizado.

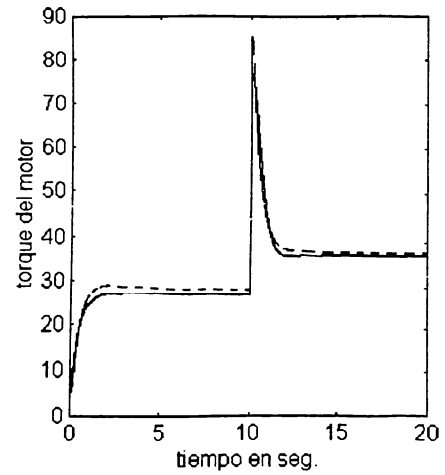


Figura 5. Sistema linealizado y no lineal $u = 100 \pm 25 \text{ V}$.

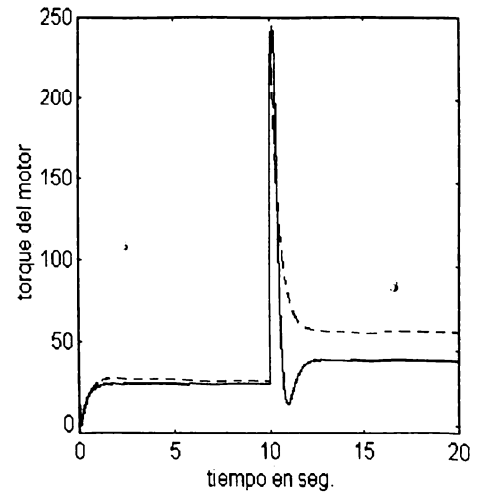


Figura 6. Sistema linealizado y no lineal $u = 50 \text{ V}$ y $u = 260 \text{ V}$.

Se desea calcular un controlador basado en este modelo, tal que la salida permita regulación entre 22 y 44 N-m. Para ello se calcula un PI con el modelo linealizado. Igual que en las secciones

anteriores se desea que el sistema tenga un comportamiento lo más parecido al obtenido con la dinámica inducida. Los valores de las constantes con las cuales se obtuvo este resultado fueron $k_p = 1.5$ y $k_i = 4$; en la Figura 7 se presenta en línea punteada el comportamiento del sistema no lineal con el PI calculado para el lineal y en continua el PI calculado para la linealización por realimentación.

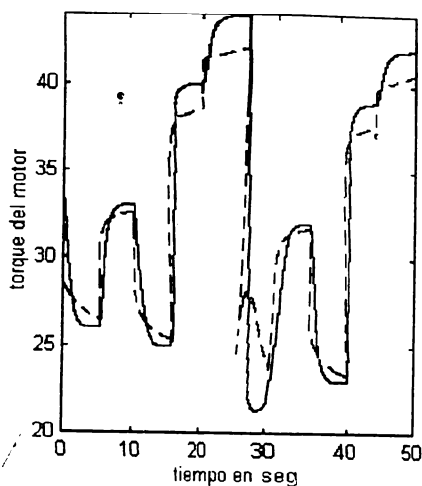


Figura 7. No lineal y PI calculado por Taylor y linealización por realimentación y PI.

Ahora se procede a hacer un análisis del sistema cuando está sometido a diferentes tipos de perturbaciones. Estas perturbaciones son básicamente variaciones en la carga, cambio en los parámetros y perturbaciones a la entrada.

4.1 Variaciones en la carga

De acuerdo con las ecuaciones del sistema (9), una variación en la carga implica un cambio en la segunda ecuación. Para analizar el torque del motor, se hicieron las simulaciones correspondientes suponiendo que hay un aumento y una disminución del 20% en la carga, los resultados se presentan en las Figuras 8 y 9. En continua la respuesta del sistema linealizado con coeficientes geométricos diferenciales y PI y en punteada el sistema no lineal con el PI calculado para el linealizado por Taylor.

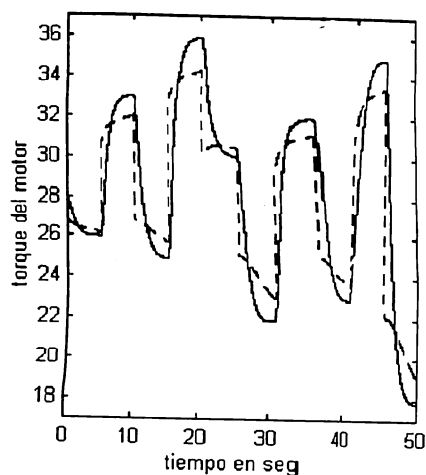


Figura 8. No lineal y PI y linealización por realimentación y PI.
Variación en la carga: 20% por encima

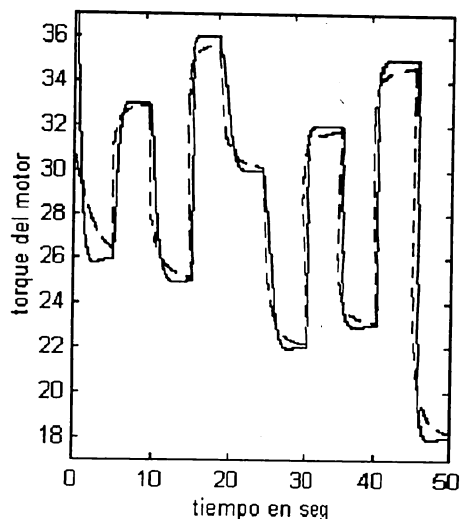


Figura 9. No lineal y PI y linealización por realimentación y PI.
Variación en la carga: 20% por debajo

4.2 Perturbaciones no paramétricas

En esta sección se estudia el comportamiento del sistema cuando se varían sus parámetros estructurales. Se hace un cambio del 20% por debajo para estudiar el comportamiento del torque. Los resultados se presentan en la Figura 10.

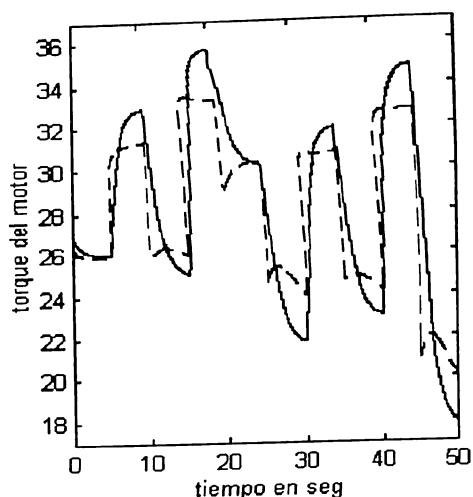


Figura 10. No lineal y PI y linealización por realimentación y PI.
Variación en los parámetros: 20% por debajo.

Variando los parámetros por debajo de los valores establecidos, la situación fue crítica y disminuyó el rango de regulación del torque obteniéndose el máximo en 36N-m. El PI calculado sobre el modelo linealizado por Taylor no operó adecuadamente, mostrando poca regulación, ya que ni siquiera alcanzó los valores deseados. Para variaciones hasta del 20% por encima de los valores nominales de los parámetros se obtuvo un buen comportamiento.

4.3 Perturbaciones paramétricas

A este tipo de perturbaciones es a la que más sensible es el controlador. Sólo se analizó cuando existía una perturbación escalón unitario a la entrada de la planta, ya que perturbaciones de valor más alto fue imposible de rechazar provocando comportamientos indeseables. Teniendo en cuenta que la variación de la señal de control está dentro de 35 y 240, esto significa una perturbación, para el caso máximo, del 2.86% y para el mínimo de 0.42%, lo que muestra que este controlador, a pesar de comportarse mucho mejor que aquel basado en aproximación por series de Taylor, es poco robusto. En la Figura 11 se presentan los resultados.

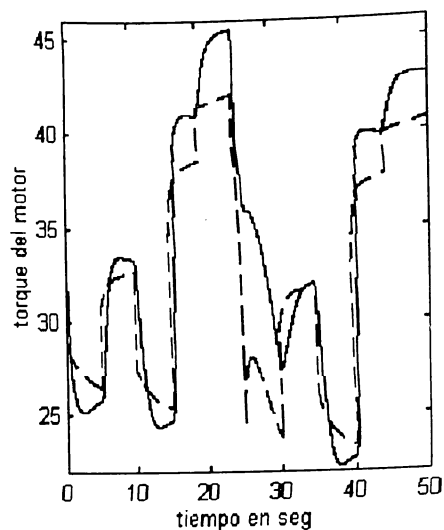


Figura 11. No lineal y PI y linealización por realimentación y PI.
Perturbación escalón unitario.

4.4 Saturación y Dinámicas Inducidas

Inicialmente y en relación con la linealización se hace un estudio detallado del efecto de la saturación en la selección de la dinámica inducida.

Puesto que la linealización por realimentación, para el caso específico del motor paralelo, no se puede hacer cerca al origen del espacio de estado (punto más probable donde no se cumpla $x_1 \neq -10000x_3$), se consideró como punto de partida un valor de 33.5 N-m., el cual es obtenido cuando el motor es excitado con un voltaje de 100V. Se desea hacer una regulación del sistema entre 9.4 N-m y 43.4 N-m, valores obtenidos cuando los voltajes de excitación son 240V y 32V, aproximadamente. La característica de estos motores es que en ellos se presenta el fenómeno de saturación, el cual consiste en que una vez alcanzado un valor determinado, no interesa cuanto suba la excitación, la salida en estado estacionario en general no crece. Obsérvese el resultado presentado en la Figura 12, en la cual u varía entre 0 y 1000V, mientras que el valor del torque no sube por encima de 45.6N-m.

Esto se puede calcular directamente de las ecuaciones, teniendo en cuenta que los valores de

estado estacionario de cada uno de los estados del sistema son:

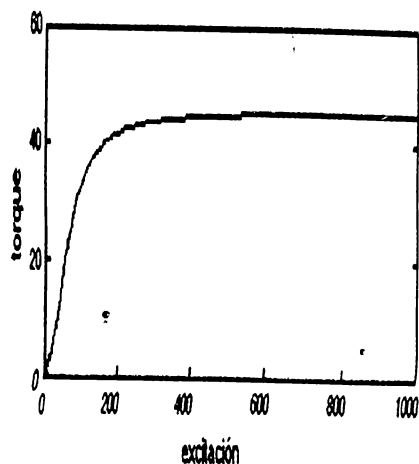


Figura 12. Comportamiento del torque en estado estacionario para variaciones grandes de u .

$$x_1 = \frac{1.66u}{1 + 2.75 \times 10^{-4} u^2}, \quad x_2 = \frac{0.0364u^2}{1 + 2.75 \times 10^{-4} u^2} \quad y$$

$$x_3 = 0.0042u$$

Para el torque, como es proporcional al producto de los estados 1 y 3 se tiene que

$$\tau = \frac{1.8 * 1.66u * 0.0042u}{1 + 2.75 \times 10^{-4} u^2} \Rightarrow \tau = \frac{0.01255u^2}{1 + 2.75 \times 10^{-4} u^2}$$

Por lo tanto para valores altos de excitación el torque del motor tiende a 45.63N-m. De este análisis se concluye que la saturación debe ser tomada en cuenta al calcular la dinámica inducida, ya que en ella no se pueden imponer dinámicas que tenga una ganancia de estado estacionario superior a la que se puede alcanzar con el sistema original. Para este caso concreto la ganancia es de 240/45.6. Este valor corresponde a la relación que hay entre el máximo valor permisible por encima del cual ya no hay aumento significativo en el torque, que es de 240V y el valor máximo del torque que es de 45.6.

En cuanto a la selección de los coeficientes de linealización, y de la teoría general de

realimentación, se ha dicho que los coeficientes k_i (ecuación 8) son elegidos para que el sistema sea estable y con una dinámica deseada impuesta por el diseñador. Sin embargo nótese que debido a los efectos de saturación, la dinámica impuesta debe ser tal que cuando el sistema sea excitado con el valor nominal (en este caso 240V), el valor de estado estacionario sea igual o inferior al del sistema no lineal. Para el caso específico del torque se requeriría un k_i de por lo menos 5.5. Esto implica que no se pueden inducir dinámicas con ganancia $G(0)$ superiores a 0.18 para el torque.

En la Figura 13 se observa el resultado cuando se inducen dinámicas con mayores valores de ganancia en estado estacionario (0.2) y se verifica que el modelo no lineal con realimentación no responde de la misma manera como lo hace el modelo lineal. Esto sucede por el efecto de saturación el cual no puede ser cancelado por realimentación del estado.

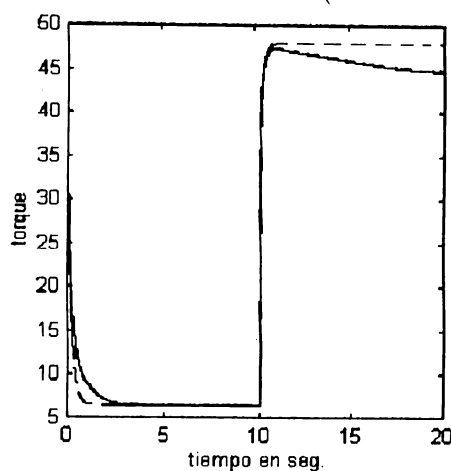


Figura 13. Comportamiento del modelo linealizado y lineal.

En línea punteada el comportamiento del sistema no lineal con dinámica inducida con valor de ganancia de estado estacionario 0.2 y en punteada el comportamiento predicho por la dinámica lineal. En este caso se presentan grandes diferencias entre ambos sistemas. De otro lado podría pensarse que el comportamiento debido a este fenómeno podría ser subsanado con el controlador, sin embargo en el siguiente análisis se muestra cómo la mejor selección de la constante k_i es aquella asociada a la máxima

ganancia con mínima excitación, en estado estacionario.

El torque tiene grado relativo uno, por lo que se requiere una dinámica inducida de primer orden, y por lo tanto el único coeficiente a calcular es k_i . Teniendo en cuenta que la dinámica inducida es de primer orden, basta aplicarle al sistema un controlador del tipo integral, lo cual lleva a un sistema de segundo orden con ecuación canónica (Ogata, 1997; Kuo, 1996). Los parámetros del controlador y de la dinámica de primer orden inducida pueden ser expresados de acuerdo con la ecuación 16, los cuales dependen de la ubicación de los polos del sistema controlado que a su vez determinan el comportamiento. Suponiendo que se desea un comportamiento críticamente amortiguado, con lo que se obtiene un tiempo de establecimiento más rápido, las relaciones serían;

$$\begin{aligned} k_I &= 2\alpha \\ k_i &= \alpha^2 \end{aligned} \quad (16)$$

donde α es la posición del polo repetido, k_i es la posición del polo de la dinámica lineal inducida y k_I es la constante del controlador integral. Estas expresiones pueden escribirse en función del coeficiente de la dinámica lineal inducida de la siguiente manera: $\alpha = k_i/2$ y $k_I = k_i^2/4$. Recuérdese que se había dicho que el coeficiente k_i de la dinámica lineal inducida debía ser más o menos 5.5.

En la Figura 14 se observa el comportamiento del sistema en la medida en que este coeficiente varía de 3.5 a 7.5. Nótese que si los valores bajan del estimado, la respuesta es muy lenta y si suben por encima del valor preestablecido la respuesta deja de presentar un comportamiento lineal, aparte que el sistema no alcanza el valor de estado estacionario deseado, aunque allí ya se ha incluido el PI. Esto se debe a que la variable de estado asociada al integrador (x_i) tiene un valor máximo dado por el límite de la señal de control, es decir $x_i < 260/k_i$. Esto limita el comportamiento del sistema realimentado y del sistema linealizado provocando que no se alcance el estado estacionario deseado.

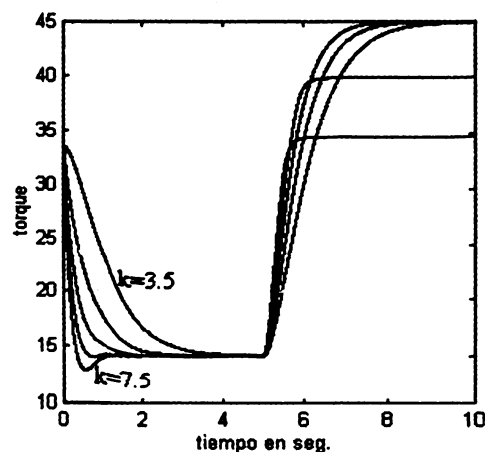


Figura 14. Comportamiento del torque para variaciones altas en la constante k_i .

En la Figura 15 se muestra el mismo resultado pero con valores más cercanos a 5.5, en este caso el coeficiente de la dinámica inducida varía así 5.3, 5.5 y 5.7. Los resultados son idénticos al caso anterior: para 5.3 el sistema fue más lento y para 5.7 empieza a verse el efecto del paso por la referencia.

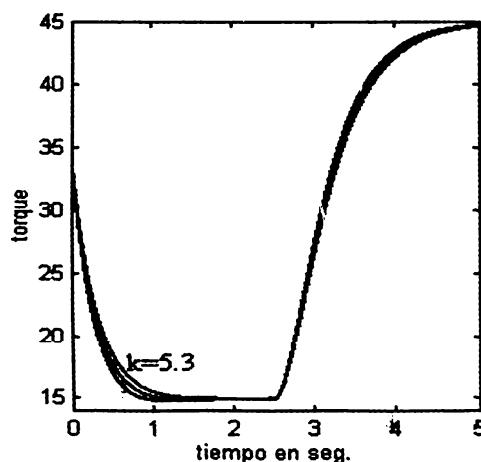


Figura 15. Comportamiento del torque para variaciones bajas en la constante k_i .

Con lo anterior se muestra que no es posible inducir dinámicas que sigan referencia escalón para evitarse el controlador integral, y éste se convierte en una necesidad para hacer regulación.

La mejor selección de la constante independiente de la dinámica inducida es aquella asociada al valor de ganancia de estado

estacionario del sistema no lineal. Esto se probó también tomando como salida la velocidad del motor (Angulo, 2000).

5 CONCLUSIONES

En cuanto al comportamiento del sistema controlado con el PI, basado en un modelo linealizado alrededor de un punto de operación, puede decirse que su respuesta es buena siempre y cuando la no linealidad de la variable controlada no sea muy severa. En el trabajo general se hizo un análisis del controlador para la velocidad (Angulo, 2000), y la respuesta del sistema no lineal al que se le agregó el PI calculado para el sistema linealizado por expansión en series de Taylor operó muy bien; esto es debido a que la no linealidad de la velocidad no es tan severa como la del torque.

Por lo anterior se concluye que si la variable a controlar tiene una fuerte no linealidad, el desempeño del PI calculado sobre el modelo linealizado no es bueno y debe recurrirse a técnicas no lineales para controlar el sistema.

En general usando la aproximación lineal del sistema su comportamiento es pobre ante grandes variaciones en la señal de referencia, debido a sus propiedades locales. Por ello desde un punto de vista práctico, donde no se pueda garantizar pequeños cambios en la señal de referencia conviene calcular un controlador de mayor alcance, como aquel determinado por la linealización por realimentación.

La ventaja de usar linealización por realimentación, es que permite que el sistema se comporte de manera lineal en una amplia región del espacio de estado.

Respecto del rechazo a perturbaciones (aunque el comportamiento del sistema operando con el controlador no lineal es mucho mejor que cuando está operando con el PI solo), puede decirse que este tipo de controlador no es muy robusto. En algunos casos disminuye el rango de operación del sistema, y en otros tiene comportamientos indeseables. Por lo tanto su aplicabilidad debe pensarse en conjunto con alguna técnica más

robusta, o en aquellos casos donde se garantice que no hay grandes perturbaciones en el sistema.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, por su invaluable colaboración en la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

- Angulo F. *Análisis de Estructura linealizante con diversos métodos de aproximación de funciones*. Tesis de Maestría en Automatización Industrial. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2000.
- Franklin G., Powell J. and Emami-Naeini A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley Publishing Company, tercera edición, 1994.
- Isidori A. *Nonlinear Control Systems*. Springer, tercera edición, 1995.
- Khalil H. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, segunda edición, 1996.
- Krause P. and Wasynczuk O. *Electromechanical Motions Devices*. McGraw-Hill, 1989.
- Kuo B. *Sistemas de Control Automático*. Prentice Hall, séptima edición, 1996.
- Marino, R. and Tomei P. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*. Prentice Hall. Italia, 1995.
- Nijmeijer H. and van der Schaft A. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, 1990.
- Ogata K. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, tercera edición, 1997.
- Olivier P. *Feedback Linearization of DC Motors*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 38, No. 6, diciembre de 1991.
- Slotine J. and Li W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- Vidyasagar M. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, segunda edición, 1993.