

ESTUDIO EXPERIMENTAL Y POR ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS DEL FACTOR DE CONCENTRADOR DE ESFUERZO PRODUCIDO POR UN AGUJERO EN UNA PLACA PLANA

FERNANDO ROLDAN

Grupo de Tribología y Superficie (GTS), Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

URIEL BASTIDAS

Grupo de Tribología y Superficie (GTS), Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Recibido para revisar 16 de Agosto de 2001, aceptado 27 de Febrero de 2002, versión final 9 de Mayo de 2002.

RESUMEN: En el presente artículo se propone un método de trabajo basado en el Análisis por Elementos Finitos (FEA) y la Validación Experimental para el estudio de esfuerzos en medios elásticos. La formulación y desarrollo del análisis de los concentradores de esfuerzos sobre una placa de espesor constante sometida a esfuerzo en sus extremos, fueron verificados mediante la teoría de la elasticidad, experimentalmente y por el análisis de elementos finitos. La utilización de los métodos numéricos se caracterizó por su eficacia en la solución del problema planteado, proporcionando información confiable sobre los esfuerzos y deformaciones rápidamente y a muy bajo costo, comparada con los métodos experimentales.

PALABRAS CLAVES: Elementos Finitos, Análisis de Esfuerzos, Deformaciones.

ABSTRACT: This article proposes a procedure based upon Finite Element Analysis and Experimental Validation for the study of stress analysis in elastic materials. The formulation and development of the stress concentrators analysis in a constant thickness plate under pressure in its extremes were verified by means of the theory of elasticity, experimentally and by the finite element analysis. The employ of the numeric methods was characterized for its efficiency in solving the proposed problem, promptly providing trusted information over the stress and deformations at a low cost, compared to the experimental methods

KEY WORDS: Finite Elements, Stress Analysis, Deformations.

1. INTRODUCCIÓN

La mecánica de sólidos y la resistencia de materiales han desarrollado modelos para la determinación de los esfuerzos en elementos estructurales y componentes de máquinas, estos son basados en hipótesis que expresan la distribución de los esfuerzos, sobre cualquier sección del elemento a través de ecuaciones de forma relativamente simples. Estas hipótesis pueden conducir a errores en muchos casos. Las deformaciones reales que pueden causar los esfuerzos en un punto de un elemento pueden ser radicalmente diferentes de las supuestas en las fórmulas matemáticas ya que éstas no incluyen

efectos tales como: *cambios geométricos* de la sección del elemento (por ejemplo, la raíz de la rosca de los tornillos, la raíz de los dientes de un engranaje, la sección de una placa o viga que contiene un agujero, etc.); *esfuerzos de contacto* en los puntos de aplicación de las fuerzas externas (por ejemplo, las bolas de los rodamientos y sus pistas, el contacto de rueda-ribo, el contacto entre dientes de engranajes, etc.); *discontinuidades en el material* (tales como inclusiones no metálicas en los metales, en las variaciones de resistencia y rigidez de los elementos que forman un material compuesto); *esfuerzos iniciales* en un elemento que resultan del trabajo en frío de los metales durante la fabricación o de los tratamientos térmicos,

rechupes en fundiciones y esfuerzos residuales en las operaciones de soldadura; *grietas* presentes en el elemento que pueden ser el resultado de los procesos de fabricación, tales como soldadura, trabajo en frío en el rectificado y otras causas.

Estas condiciones son causantes del aumento de los esfuerzos frente a los calculados por las ecuaciones de la mecánica de sólidos de los materiales y son llamadas *concentradores de esfuerzos*, causando un incremento súbito de los esfuerzos en puntos cercanos a estas discontinuidades, generando una zona que se denomina de *esfuerzos localizados* o simplemente *concentración de esfuerzos*, que se caracteriza por poseer los máximos valores y cuya distribución no sigue una ley simple. En muchos casos, particularmente en los cuales los esfuerzos son altamente localizados, su análisis matemático es difícil y a veces impracticable. El cálculo de los valores de los concentradores de esfuerzos por la teoría de elasticidad requieren en general la solución de ecuaciones diferenciales que normalmente no son fáciles de solucionar. Sin embargo, este método ha sido utilizado para evaluar concentradores de esfuerzos en elementos que tienen cambios de sección, tales como los causados por un agujero circular en una placa y por la presencia de entallas o radios de acuedro. De igual forma los métodos experimentales (Hetenyi, 1950, Peterson, 1974, Kobayashi, 1988, Doyle y Phillips, 1989) proporcionan una solución, cuando los métodos de elasticidad son excesivamente difíciles de aplicar. Últimamente el uso de métodos numéricos como los elementos finitos han tomado la delantera a las soluciones aproximadas para un amplio rango de problemas de concentradores de esfuerzos.

El objetivo del presente trabajo es comparar la magnitud de la concentración de los esfuerzos en una placa plana con un agujero sometida a tracción, confrontando el modelo presentado por Timoshenko en la teoría de la elasticidad, los valores experimentales presentados por diferentes autores y el análisis por elementos finitos

2. E FACTOR DE CONCENTRACIÓN DE ESFUERZO

La relación del valor máximo (o de pico) del esfuerzo real y el valor nominal del esfuerzo en la sección neta en el agujero, se conoce como factor de concentración del esfuerzo. Dos tipos de concentraciones de esfuerzos se utilizan en la literatura cuando se trata de agujeros en placas planas. El primero relaciona el esfuerzo máximo en el borde del agujero y el esfuerzo nominal de la placa sin agujero o esfuerzo remoto:

$$K_n = \sigma_{máx} / \sigma_n . \quad (1)$$

El segundo relaciona el esfuerzo máximo en el borde del agujero con el esfuerzo nominal uniforme en la sección del agujero de la placa:

$$K_{nea} = \sigma_{máx} / \sigma_{nea} \quad (2)$$

Donde:

$$\sigma_{nea} \text{ es igual a } \sigma_n / (1 - a/b) \text{ ó } \sigma(A_n / A_{nea})$$

$2a$ es el diámetro del agujero y $2b$ el ancho de la placa.

De lo anterior tenemos:

$$K_{nea} = (\sigma_{máx} / \sigma_n) (1 - a/b) \quad (3)$$

Obsérvese que K_{nea} toma en cuenta dos efectos del esfuerzo: el aumento por disminución de la sección transversal y el aumento por la geometría.

3. VALIDACIÓN DEL MODELO DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

Para validar el modelo de la teoría de la elasticidad sobre los efectos de los agujeros circulares en la distribución de esfuerzos en placas planas, presentado en (*Timoshenko and Goodier, 1934*) y particularizándolo a nuestro caso, se tomó una placa rectangular de acero

estructural A36 con un agujero de diámetro 25.4 mm como concentrador de esfuerzo, y desarrollando la componente del esfuerzo debido a las fuerzas que actúan alrededor del anillo punteado que tiene de radios interno y externo $r = a$ y $r = b$ respectivamente, como se ve en la Figura 1, y obteniendo la distribución del esfuerzo que tiene dos componentes normales a la sección de la placa en el agujero.

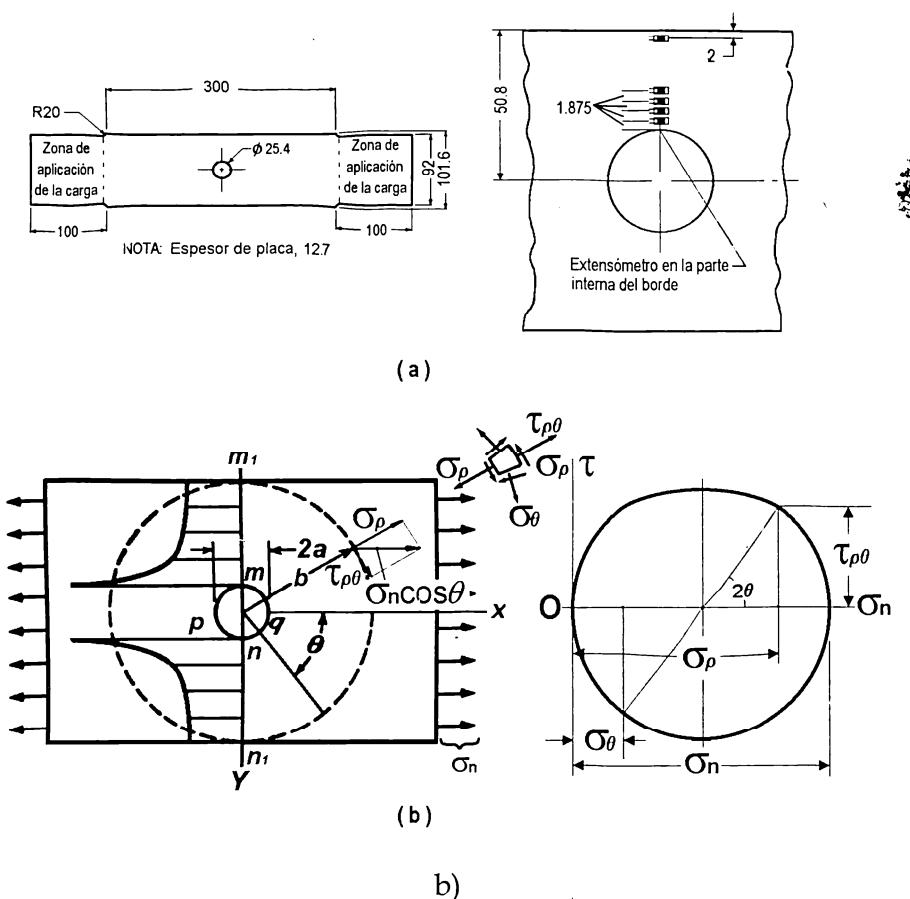


Figura 1. a) Modelo placa probeta y b) Modelo matemático

$$\sigma_{\rho,\theta} = \left(\frac{\sigma_n}{2} \right) \pm \left(\frac{\sigma_n}{2} \cos 2\theta \right)$$

y

$$\tau_{\rho,\theta} = -\frac{\sigma_n}{2} \sin 2\theta$$

Para $\theta = 0 \wedge \sigma_\rho = \sigma_\theta = \sigma_n$ y, la solución para cualquier punto sobre la placa, viene dada por la suma de las siguientes ecuaciones, (3) y (7) desarrolladas por G. Kirsch

$$\sigma_\theta^I = \frac{1}{2} \partial_\theta^2 \phi = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{4} \right) \cos 2\theta$$

y

$$\sigma_{\theta}^{II} = -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}$$

Las constantes de integración, obtenidas por métodos matriciales, para nuestro caso son:

$$A = 2.0281; B = 0.0588; C = 0.1249 \text{ y } D = 1.0030$$

Para un esfuerzo aplicado de 6.2 Kgf/mm^2 , un valor de $\theta = \pi/2$, $p_o = -\sigma_n/2$ y $p_i = 0$ y variando r desde $r = 12.7 \text{ mm}$ a $r = 50.8 \text{ mm}$. Los resultados son presentados en la Figura 4.

4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Al usar el método clásico de análisis (teoría de la elasticidad) a menudo se tiene que trabajar con ecuaciones diferenciales (o integrales) que no tienen una solución en forma cerrada, debido a la complejidad de la geometría del dominio y de las condiciones de frontera. Como consecuencia de lo anterior, es necesaria la utilización de los métodos numéricos para obtener una solución aproximada. Estos métodos numéricos utilizan algún tipo de discretización. El análisis de elementos finitos (FEA) se utiliza con muy buena precisión para el análisis de esfuerzos en cuerpos elásticos; este método calcula la energía potencial total sumando la energía de deformación interna y la energía potencial de las fuerzas externas. El objetivo inicial es la comparación de los factores de concentración de los esfuerzos obtenidos experimentalmente y presentados por (Boresi, 1993) con el FEA y con la teoría de la elasticidad para diferentes relaciones entre el diámetro del agujero y el ancho de la placa. Se modeló una placa lo suficientemente larga y ancha. Debido a la simetría de la geometría y de la carga, solamente se modela un cuarto ($1/4$) de la placa. En el extremo derecho se le aplica una fuerza de superficie (presión) de 5 kg/mm^2 . Se aplican condiciones de borde simétricas al igual que criterios de convergencia (S_x y U_x con un 1% de tolerancia) en los vértices del agujero en el modelo. Se utilizó el elemento PLANE 145

(software: ANSYS), de características: elemento P, sólido estructural, ocho nodos, espacio 2D y grados de libertad U_x , U_y . El análisis que se realizó es estructural estático. La Tabla 1 y la Figura 2, muestran los resultados obtenidos, las curvas comparativas del factor de concentración del esfuerzo (K) y la variación del esfuerzo máximo en el borde del agujero en función de la relación a/b .

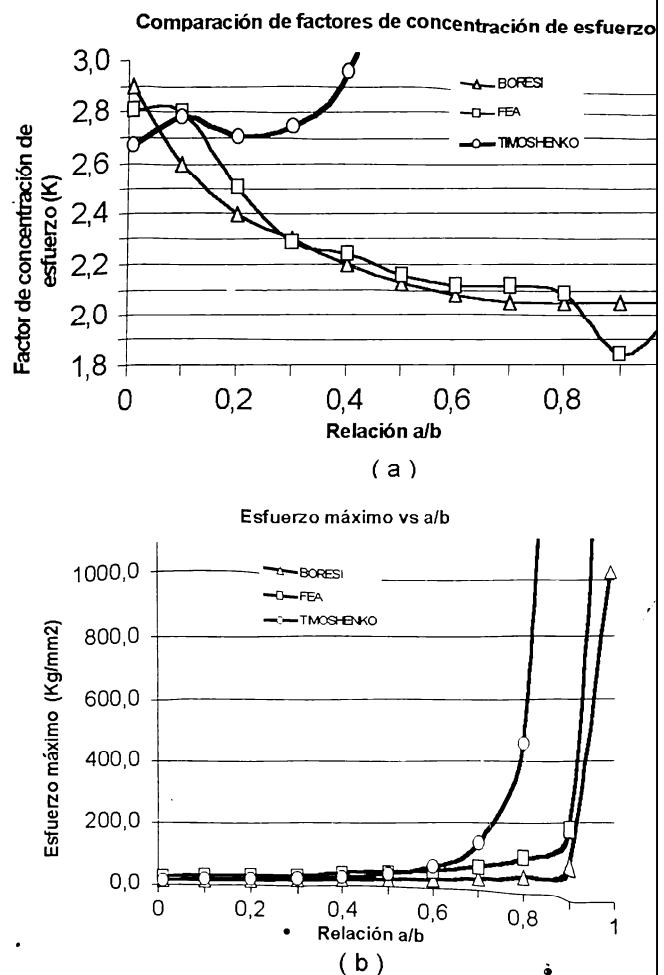


Figura 2. a) Comparación de los factores de concentración de esfuerzo y b) Comparación de los esfuerzos máximos para la placa plana variando diámetro del agujero.

Se observa que el máximo valor del esfuerzo ($\sigma_{máx}$) es aproximadamente tres veces el esfuerzo nominal (σ_{nom}) en el agujero cuando la relación a/b tiende a cero para:

$$\theta = \pi/2 \text{ y } \theta = 3\pi/2$$

Entonces el factor de concentración de esfuerzo tiende a un valor máximo de tres, (ver Tabla 1), de igual manera se observa que, si el radio del agujero se incrementa, el valor del esfuerzo

nominal en el agujero aumenta y por lo tanto el esfuerzo máximo del concentrador decrece rápidamente (Boresi, 1993) y FEA.

Tabla 1. Relaciones geométricas de agujero – ancho de placa vs concentración de esfuerzo teórico, experimental y el obtenido por FEA.

2b	a	Relación a/b	Relación a/d (Boresi) D=2(b-a)	Kea tomado De Boresi	σ_{max} (Boresi) $K^*S^*(Ao/Areal)$	σ_{max} (FEA)	σ_{max} teoria elas.	K según (FEA)	K según (TE)
20	0,1	0,01	0,01	2,9	14,6	14,2	13,5	2,8	2,7
20	1	0,1	0,06	2,6	14,4	15,6	15,5	2,8	2,8
20	2	0,2	0,13	2,4	15,0	15,7	16,9	2,5	2,7
20	3	0,3	0,21	2,3	16,4	16,3	19,6	2,3	2,8
20	4	0,4	0,33	2,2	18,3	18,7	24,7	2,2	3,0
20	5	0,5	0,50	2,1	21,3	21,6	37,7	2,2	3,8
20	6	0,6	0,75	2,1	26,0	26,5	64,7	2,1	5,2
20	7	0,7	1,17	2,1	34,2	35,3	140,0	2,1	8,4
20	8	0,8	2,00	2,1	51,3	52,2	457,5	2,1	18,3
20	9	0,9	4,50	2,1	102,5	92,0	3605,5	1,8	72,1
20	9,9	0,99	49,50	2,1	1025,0	988,4	3684706,3	2,0	7369,4

$\sigma_r = 5Kg/mm^2$ (Esfuerzo aplicado al extremo de la placa).

2b = ancho de placa (mm).

a = radio del agujero (mm).

σ_{max} = esfuerzo máximo en el borde del agujero.

Kea = Factor de concentración del esfuerzo en el agujero.

K = Factor de concentración del esfuerzo.

Así los gradientes de esfuerzos altos son bastante localizados. Se observa también una considerable discrepancia cuando el diámetro del agujero es comparable con el ancho de la placa en los resultados del análisis por FEA con los de (Boresi, 1993). En este extremo los errores son mayores y varios autores han estudiado el problema desde el punto de vista experimental (fotoelasticidad y tensometría), y cuyos resultados los han expresado de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$K_{nea} = \frac{3\left(\frac{b}{2a}\right) - 1}{\left(\frac{b}{2a}\right) + 0,3}$$

La curva obtenida por el FEA muestra la irregularidad señalada a diferencia de la curva de Boresi; sin embargo, según la teoría de la elasticidad basada en un modelo matemático sólo es válida para placa de una relación de a/b tiendiendo a cero lo que implica un agujero muy pequeño con relación al ancho de la placa. La placa probeta se modeló por FEA. Se verificó: el modelamiento en 2D y 3D, la forma de sujeción (aplicación de la carga), el elemento utilizado, densidad de malla, variación del diámetro del agujero, errores presentados, etc. Los resultados son mostrados en la Figura 3.

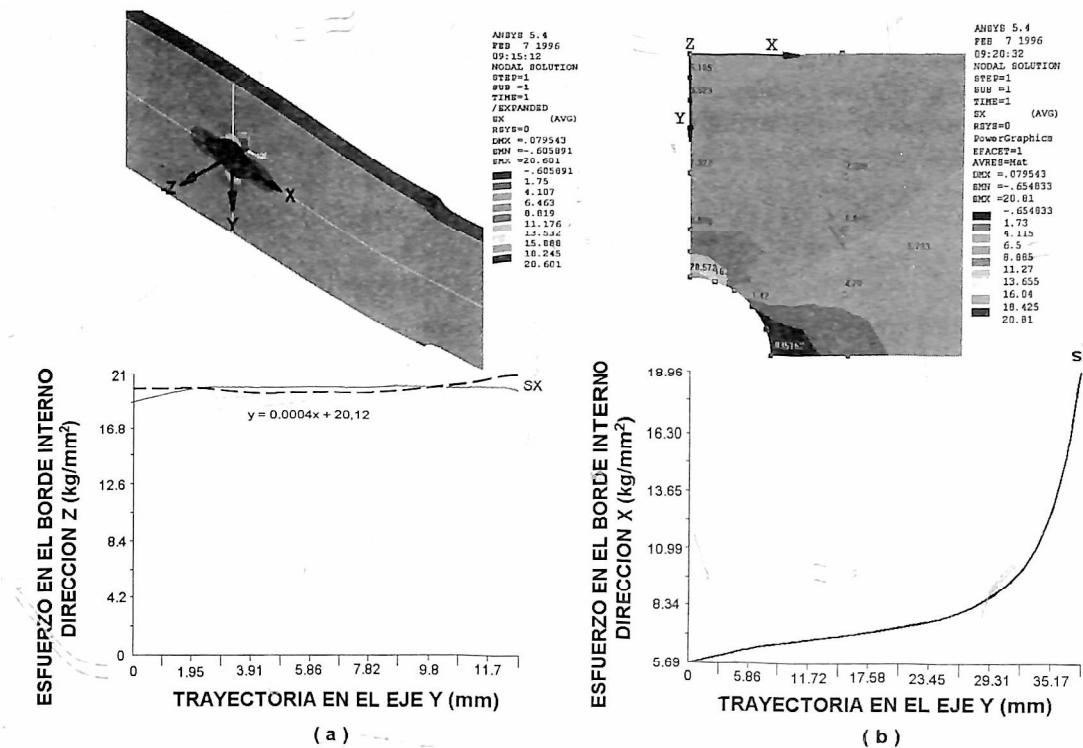


Figura 3. Gráficos de resultados de distribución de esfuerzos: a) borde interior del agujero, b) sobre la superficie, desde el borde exterior de la placa hasta el borde exterior agujero

5. IMPLEMENTACIÓN

EXPERIMENTAL.

El objetivo de esta parte experimental es la verificación de los resultados de los esfuerzos en la sección transversal donde se encuentra el agujero, reportados por (*Frocht, 1936*), para una placa de longitud infinita. Se tomó la placa probeta y se le colocaron galgas extensométricas en las zonas de interés. Se aplicó una carga de ocho toneladas en los extremos en la máquina universal de ensayos de tensión cuya sujeción se hace por fricción. Los datos obtenidos se encuentran graficados en la Figura 4 al final del artículo.

6. COMPARACIÓN DE RESULTADOS Y ANÁLISIS.

La medición de los esfuerzos de manera experimental en un elemento se da a partir de su superficie y poco sabremos de su comportamiento interno, a no ser que utilicemos métodos indirectos para lograrlo, sin producir discontinuidad, como sería el análisis por FEA. Un pequeño orificio para hacer una medición traería como consecuencia una concentración del esfuerzo y no daría una medición real sino la medición de la perturbación, la cual suele ser más crítica que lo esperado en un continuo uniforme, v. g. una placa sin entalla u orificio o una grieta que suele ser, en ingeniería, motivo de estudio por su naturaleza crítica de los esfuerzos generados en la superficie de dicha perturbación.

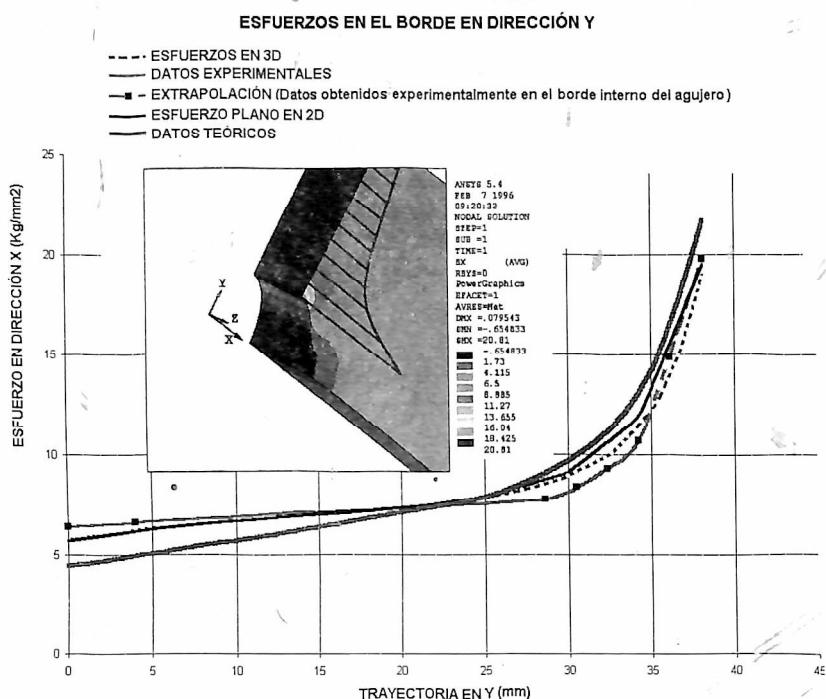


Figura 4. Comparación de la distribución de los esfuerzos en la sección del agujero obtenidos experimentalmente, de acuerdo a la teoría de la elasticidad y por FEA.

Comparando los resultados obtenidos del efecto del orificio en una placa observamos que, en los resultados por FEA, los esfuerzos en el borde interno en la dirección z (ver Figura 3a), son aproximadamente uniformes y con una tendencia a incrementar hacia el centro, esto representa alrededor del 8,5% con respecto al borde exterior. Experimentalmente la medición hacia la parte central de la trayectoria del borde interior del agujero mostró un valor $19,8 \text{ Kg/mm}^2$, aproximado al obtenido por FEA $20,6 \text{ Kg/mm}^2$. Hacia los extremos de la trayectoria, borde del agujero, existe la imposibilidad de la medición; sin embargo, siguiendo las mediciones experimentales realizadas en la trayectoria del eje (y) perpendicular al eje de aplicación de la carga, la distribución de esfuerzo obtenidos por FEA, y extrapolando la medición experimental de la parte media del borde interno del agujero, nos muestran una gran concordancia entre los resultados y el modelo de la teoría de la elasticidad.

Como se puede observar de la gráfica de la Figura 4, las curvas no experimentan

desviaciones que ameriten un estudio más cuidadoso para analizar las desviaciones de los resultados de un método con respecto a otro, los esfuerzos nominales obtenidos a partir del área bajo la curva en cada caso, ver Tabla 2, no se desvían en un porcentaje que supere el 4% con respecto al obtenido teóricamente. Sin embargo, el valor del factor de concentración de esfuerzo obtenido por el modelo de la teoría de la elasticidad, se aleja en un 12.5% con respecto a los otros procedimientos. Una correcta formulación de las condiciones de frontera en el análisis de elementos finitos valida los resultados frente a los experimentales y viceversa.

Tabla 2. Datos comparativos de σ_{nea} y K_{nea}

	2D	3D	Experimental	Teoría de la elasticidad
Esfuerzo				
nominal	σ_{nea}	8.33	8.11	8.18
en la zona				8.01
del agujero				
K_{nea}	2.4	2.3	2.4	2.7

7. LIMITACIONES DE LOS MÉTODOS

Las fuentes fundamentales de errores presentes en los método numéricos, independiente del planteamiento del modelo, son debido a la aproximación por discretización del contorno del agujero, el grado de ello depende del enmallado utilizado, comportamiento del elemento elegido (error de formulación) y errores en la utilización de la precisión matemática finita como consecuencia del redondeo de los datos o punto flotante de cálculo y el asociado con los procedimientos de integración numérica, (error numérico), que depende de la aproximación computacional alcanzada del programa, comparadas con las fuentes de error de los sensores extensométricos que son principalmente, que el esfuerzo aplicado no debe sobrepasar el margen elástico permisible (no exceder del 4% de su longitud) y no transmitir la medida del esfuerzo. Además, idealmente las galgas deberían ser puntuales para poder medir los esfuerzos en un punto. En la práctica sus dimensiones son apreciables, y se supone que el punto de medida es el centro geométrico de la galga. Otro aspecto muy importante a considerar en la medición, es la presencia de esfuerzos residuales en la zona de colocación de la galga, los cuales, en muchos casos son inevitables.

ahorro considerable en tiempo. Un estudio experimental valida el comportamiento del material sobre todo cuando se desconoce su grado de anisotropía, por ejemplo, el generado por el proceso de fabricación y sólo en este caso se justifica su realización. Estos procesos de validación deben incluir la confrontación con los resultados de los modelos teóricos.

REFERENCIA

- Popov, Egor P. *Mecánica de Sólidos*. Pearson Educación, 2000.
- Peterson R.E. *Stress Concentration Factors*. Ed. Wiley, 1974.
- Timoshenko, S.. *Theory Of Elasticity*. Ed. McGraw-Hill, 1934
- Boresi, A., et al. *Advanced Mechanics of Materials*, Ed. Wiley, 1.993. .
- MACHINE DESING. *Stress Concentration Pose Sticky Meshing Problems*, 2000
- D'Isa, Frank A. *Mechanics Of Metals*, Ed Addison Wesley, 1968.
- Ortiz Berrocal, Luis. *Elasticidad*. Ed. McGraw-Hill, 1998.

8. CONCLUSIONES

Es evidente que la predicción del comportamiento de un orificio actuando como un concentrador de esfuerzo en una placa, se puede realizar con un cálculo como el utilizado por la teoría de la elasticidad y es de solución rápida, además, es recomendable hacerlo porque se parte de relaciones matemáticas simples afectadas por un factor obtenido experimentalmente, mas no ocurre lo mismo cuando se trata de modelar formas geométricas complejas. En este caso un análisis por métodos numéricos presenta ventajas obvias sobre cualquier otro método y resulta económico y altamente confiable frente al primero, con un