

MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DEL EFECTO DE LA ENTRADA DE CALOR EN LA PENETRACIÓN DE UNA JUNTA SOLDADA

LINA GÓMEZ

Escuela de Ingeniería de Materiales, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Recibido para revisar 22 de Octubre de 2002, aceptado 28 de Febrero de 2003, versión final 10 de Marzo de 2003

RESUMEN: En esta investigación se realizó el simulador SimVol, en el cual se experimentó con el fin de encontrar una relación entre la entrada de calor y la *penetración* de la junta soldada. SimVol se basó en un modelo en 2D, que describe el flujo de calor y el flujo de metal líquido en el charco de una soldadura realizada con el proceso GTAW (Gas Tungsten Arc Welding). En el modelo matemático se incluyen las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de energía, las cuales constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, no-lineales, no homogéneas y transitorias. El modelo numérico se desarrolla en Volúmenes Finitos en un esquema totalmente implícito, con malla regular y escalonada; además, debido al desconocimiento del campo de presión es necesario utilizar el algoritmo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*). La investigación también incluye una serie de experimentos que permitieron validar el modelo planteados.

PALABRAS CLAVES: Soldadura, Modelamiento, Comportamiento del Pozo de Soldadura, Transferencia de calor

ABSTRACT: A simulator (SimVol) was developed in order to establishing the relation between the heat input and weld penetration. SimVol was based on a two-dimensional model. The model describes both heat transfer and fluid flow in transient Tungsten Inert Gas (GTAW) weld pool. Mathematical model uses the Navier-Stokes equations and energy equation. Numerical model was developed using Finite Volume method with staggered grid; also the SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked equations) algorithm was used. The fusion boundaries calculated were compared with the boundaries observed in order to validate the model.

KEYWORDS: Welding, Modeling, Welding Pool Behavior, Heat Transfer,

1. INTRODUCCIÓN

Los procesos de soldadura por arco son una de las formas de unión más utilizadas en estructuras soldadas como barcos, puentes, reactores nucleares, tuberías, trenes, carros, entre otros. En la fabricación de estas estructuras la seguridad y la economía son importantes, por esto los procesos de soldadura siempre están en continuo estudio y mejoramiento.

El estudio de éstos procesos se puede lograr mediante el modelamiento, el cual permite

predecir el comportamiento de materiales y procesos bajo condiciones que no son fáciles de reproducir en un laboratorio, extrapolar comportamientos en tiempo y espacio, guiar la optimización de los procesos y permite su control en tiempo real (Ashby, 1992).

Por lo anterior y debido a que la penetración de la junta soldada es una variable relacionada con la calidad de las estructuras soldadas, se han realizado en los últimos años una serie de modelamientos que permiten predecir la penetración de la junta en el proceso GTAW (Gas Tungsten Arc Welding) (Lancaster, 1984; Kou and Sun, 1985; Kim et al., 1994). Aunque la penetración se encuentra gobernada por el flujo

de calor y de metal líquido en el charco de la soldadura, los primeros modelos sólo incluían la predicción del flujo de calor (Roshental, 1941; Rykalline, 1961), a partir de los años 80 se realizaron modelos que además del flujo de calor, también incluían el flujo de metal líquido o flujo convectivo (Lin y Eagar, 1986; Choo y Székely, 1990; Wu y Dorn, 1995).

En esta investigación además de proponer un modelo para la realización del simulador SimVol, se realizaron una serie de experimentos en este simulador, los cuales permitieron encontrar una relación entre la entrada de calor y la penetración de la junta en un proceso GTAW (Gómez, 2002).

Las investigaciones desarrolladas hasta ahora se han enfocado principalmente al problema numérico que representa solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes cuando no se conoce el campo de presión; además, las validaciones realizadas se han fundamentado en comparar los resultados obtenidos por la solución numérica con los resultados arrojados por las soluciones analíticas (Kou and Wang, 1986a), estas últimas se encuentran fundamentadas en demasiados supuestos. Otras validaciones se han realizado comparando los resultados obtenidos con las mediciones realizadas de la temperatura y la velocidad del metal líquido en la superficie del charco.

Por lo anterior, y debido a la imposibilidad actual de medir la velocidad y la temperatura del metal líquido al interior del charco de soldadura, en esta investigación la validación se realizó de manera indirecta; es decir, midiendo los efectos del flujo de calor y de fluidos en el charco de soldadura, los cuales se reflejan en la penetración de la junta soldada. La validación consistió entonces, en comparar datos de penetración obtenidos experimentalmente con los datos de penetración dados por el simulador SimVol.

2. MODELO FÍSICO

En el proceso de soldadura GTAW se genera un arco eléctrico entre el material base y el electrodo, el cual tiene la energía suficiente para fundir el metal base produciéndose inmediatamente un charco de metal líquido en el material base.

Cuando la pistola que soporta el electrodo es fija, es decir, no se desplaza, el flujo de calor y de fluidos, y por tanto, la forma del charco de soldadura es simétrico con respecto a la línea central, ver Figura 1. Esta característica permite modelar sólo el cuadrado bi-dimensional que se ilustra en la parte derecha de la Figura 1, pues los resultados obtenidos en esta geometría son válidos para cualquier ángulo medido perpendicular al plano $z-r$. Así pues, el proceso GTAW puede describirse como un intenso arco eléctrico que funde el metal y forma un charco de metal líquido, en el cual se genera un flujo convectivo, debido a una combinación de fuerzas, las cuales incluyen, la electromagnética, la de flotabilidad y la debida a los gradientes de tensión superficial. La fuerza de flotabilidad es el resultado de la variación espacial de la densidad del líquido debido a los gradientes de temperatura que se generan en el charco; a su vez, este cambio de la densidad en la superficie genera unos gradientes de tensión superficial lo cual también ocasiona flujo y finalmente, la fuerza electromagnética es el resultado de la interacción de la corriente de soldadura y el campo magnético generado por ésta.

En conclusión, el proceso físico puede ser definido como un flujo de calor y de corriente que incide en la cara superior ocasionando la fusión del metal base debido a los procesos de conducción y convección de transferencia de calor.

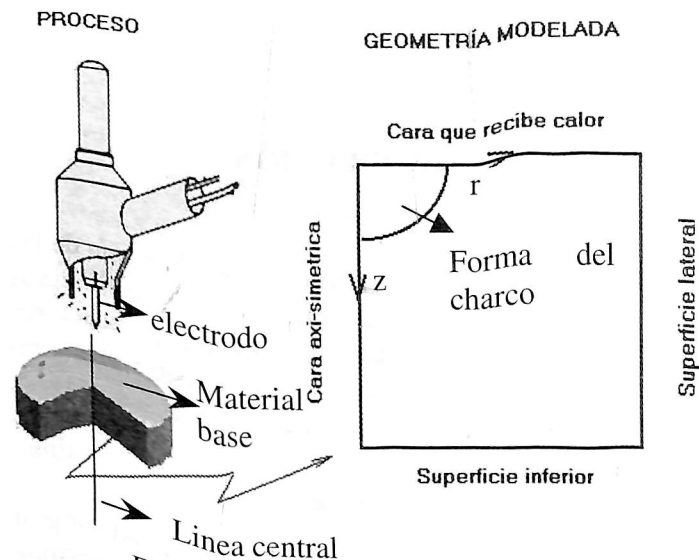


Figura 1. Modelo físico y geometría modelada.

3. MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático consta de los supuestos, las ecuaciones diferenciales, las condiciones de frontera y las condiciones iniciales.

3.1. Supuestos

- El calor y la corriente (DC) tienen una distribución Gaussiana (*Kim et al.*, 1997).
- El Fluido es Newtoniano, incompresible y laminar (*Kou y Wang*, 1986).
- Las propiedades físicas son constantes.
- La densidad es constante excepto para los efectos de la flotabilidad (también conocido como aproximación Bossinesq), (*Zhang et al.*, 1998; *Choo y Szekely*, 1990).

3.2. Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones que describen el campo de velocidades y de temperatura en la platina son:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\rho \left[u \frac{\partial U}{\partial r} + v \frac{\partial U}{\partial z} \right] + k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F_r \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + F_z \quad (4)$$

Donde F_r y F_z son las componentes en r y z de las fuerzas de cuerpo, así.

$$F_r = (J \times B)_r \quad (5)$$

$$F_z = (J \times B)_z + \rho \beta g (T - T_0) \quad (6)$$

Con el fin de evaluar la fuerza de Lorentz o fuerza electromagnética, es necesario solucionar las ecuaciones de Maxwell. Para esta investigación se utilizó la solución analítica de estas ecuaciones reportada por (*Kou and Sun*, 1985), la cual se indica en la ecuación 7.

$$J \times B = \frac{\mu_m I}{4\pi^2 (r^2 + z^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right) \left(\mathbf{z} - \frac{z}{r} \mathbf{r} \right) \quad (7)$$

3.3. Condiciones de frontera

De acuerdo con la Figura 1, se tiene.

- Cara que recibe calor
 $v = 0$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial \gamma}{\partial T} \\ K \frac{\partial T}{\partial z} &= -q \end{aligned} \quad (8a)$$

- Cara axi-simétrica

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (8b)$$

- Superficie lateral y superficie inferior

$$\begin{aligned} u &= v = 0 \\ q &= h(T_\infty - T) \end{aligned} \quad (8c)$$

Adicionalmente, de todas las ecuaciones propuestas para la entrada de calor, se seleccionó la reportada en el trabajo de (*Zhang et al.*, 1996), ya que coincide con los valores obtenidos por el trabajo experimental realizado por (*Lin and Eagar*, 1986).

$$q = -\frac{\eta \times V \times I}{2\pi\sigma_q^2} \exp \left[\frac{-r^2}{2\sigma_q^2} \right] \quad (9)$$

3.4. Condiciones iniciales

En este caso la platina se encuentra a temperatura ambiente y como aún no se ha comenzado a

fundir el metal, por tanto, la velocidad en toda la platina es cero.

3.5. Valores de las propiedades físicas del acero ASTM A36

Los valores de las propiedades físicas utilizados para el cálculo se encuentran en la Tabla 1.

Tabla 1. Valores de las propiedades físicas del acero ASTM A36 (Zhang *et al.*, 1996; Grong, 1994)

PROPIEDAD	VALOR	PROPIEDAD	VALOR
μ	0,006 kg/m-s	C_p	753 J/kg-°K
ρ	7200 kg/m ³	g	9,81 m/s ²
T_∞	300 °K	k	15,48 W/m ² -°K
η	0,4	T_s	1700 °K
$\partial\gamma/\partial T$	-10 ⁻⁵ N/m °K	β	10 ⁻⁴ °K ⁻¹
μ_m	1,26x10 ⁻⁶ H/m		

4. MODELO NUMÉRICO

El modelo del flujo de calor y de metal líquido en el charco de soldadura presenta una dificultad, la cual consiste en el desconocimiento del campo de presión en el charco y, además no existe una expresión para calcularlo, por tanto, es necesario utilizar un algoritmo que permita determinar el campo de presión de manera indirecta a través de la ecuación de continuidad. Por lo anterior se utilizó el algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) desarrollado por (Patankar, 1980), y retomado por (Peric, 1997), el cual permite solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes cuando no se conoce el campo de presión.

Este algoritmo es desarrollado con el método numérico Volúmenes Finitos, por esto las ecuaciones son discretizadas con este método en un esquema totalmente implícito. Adicionalmente, las ecuaciones algebraicas deben ser solucionadas por un método iterativo (Patankar, 1980), por esta razón las ecuaciones algebraicas fueron resueltas por el método de (Stone, 1968).

4.1. Malla numérica

Otro aspecto importante en este modelo es el uso de la malla escalonada, la cual es requerida para garantizar estabilidad numérica en el cálculo del flujo de fluidos (Patankar, 1980 y Peric, 1997), como se ve en la Figura 2.

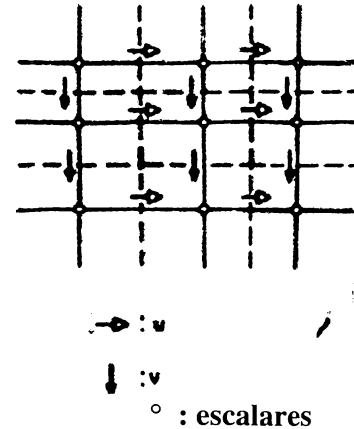


Figura 2. Malla escalonada. Conservación de masa y cantidades escalares (izquierda), cantidad de momento en x (centro) y cantidad de momento en y (derecha).

4.2. Discretización para la energía

$$a_p U_p = a_E U_E + a_W U_W + a_N U_N + a_S U_S + SU \quad (10)$$

Donde:

$$a_i = \rho \cdot u_i \cdot \frac{r_i \Delta z}{2} \quad I=W,S \quad (10.a)$$

$$a_j = -\rho \cdot u_j \cdot \frac{r_j \Delta z}{2} \quad J=E,N \quad (10.b)$$

$$a_p = \frac{\rho}{\Delta t} \cdot r_p \Delta r \Delta z \quad (10.c)$$

$$SU = UA \frac{\rho \cdot \bar{r} \Delta r \Delta z}{\Delta t} + CD \times \bar{r} \Delta r \Delta z \quad (10.d)$$

$$CD = k \left[\frac{T_E - T_W}{2 \Delta r} + \frac{T_E - 4T_P + T_W + T_N + T_S}{\Delta r^2} \right] \quad (10.e)$$

4.3. Discretización para la velocidad

$$a_p u_p = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + SU + (P_w - P_e) \cdot S_p \quad (11)$$

Donde:

$$a_I = \mu_i \frac{r_i \Delta z}{\Delta r} - \rho \cdot u_i \cdot \frac{r_i \Delta z}{2} \quad I=E, N \quad (11.a)$$

$$a_J = \mu_j \frac{r_j \Delta z}{\Delta r} + \rho \cdot u_j \cdot \frac{r_j \Delta z}{2} \quad J=W, S \quad (11.b)$$

$$a_p = \frac{\rho}{\Delta t} \cdot \bar{r} \Delta r \Delta z - \frac{\mu_p \Delta r \Delta z}{r_p} - a_E - a_W - a_N - a_S \quad (11.c)$$

$$SU = Flr \cdot \bar{r} \Delta x \Delta y + \mu_p \frac{\Delta z}{2} (u_E - u_W) + \frac{\rho}{\Delta t} u_p \quad (11.d)$$

$$Flr = (J \times B)_r = \frac{\mu_m \cdot I^2}{4\pi \cdot (r^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \left(1 - \frac{y}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right) \quad (11.e)$$

De forma análoga se encuentra la ecuación de la componente en z de la velocidad.

4.4. Discretización para la corrección de la presión

$$a_p P_p' = a_E P_E' + a_W P_W' + a_N P_N' + a_S P_S' + SU \quad (12)$$

Donde:

$$a_E = \rho \cdot \frac{\Delta z^2}{a_e} \quad (12.a) \quad a_W = \rho \cdot \frac{\Delta z^2}{a_w} \quad (12.a)$$

$$a_N = \rho \cdot \frac{\bar{r}^2 \Delta r^2}{a_n} \quad (12.c) \quad a_S = \rho \cdot \frac{\bar{r}^2 \Delta r^2}{a_s} \quad (12.b)$$

$$SU = (\rho u_w^* - \rho u_e^*) \Delta z + (\rho v_s^* - \rho v_n^*) \bar{r} \Delta r \quad (12.c)$$

4.5. Algoritmo SIMPLE

Este algoritmo permite solucionar las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento para encontrar el campo de flujo cuando no se conoce el comportamiento de la presión y consta de los siguientes pasos:

1. Asigne un campo de presión P^* .
2. Resuelva la ecuación (11) y encuentre la velocidad en r . Haga lo mismo con la velocidad en z , y obtenga u^* y v^* respectivamente.
3. Resuelva la ecuación (12) de la corrección de la presión y encuentre P' .
4. Calcule la nueva presión:

$$P = P^* + P' \quad (13)$$
5. Calcule u y v usando las formulas de la velocidad corregida:

$$u_p = u_p^* + \frac{S_p}{a_p} (P_p' - P_e') \quad (14.a)$$

$$v_p = v_p^* + \frac{S_p}{a_p} (P_p' - P_n') \quad (14.b)$$
6. Resuelva la ecuación (10) de la energía y calcule la temperatura.
7. Asigne el nuevo valor de P , como el valor P^* , y regrese al punto 2.

5. VALIDACIÓN DEL MODELO

Tal como se planteó en la introducción, debido a la imposibilidad actual para medir la velocidad y la temperatura al interior del charco de soldadura, se realiza una validación indirecta; es decir, midiendo los efectos de estos flujos, los cuales determinan la penetración de la junta. Así pues, para validar el modelo propuesto se comparan valores simulados de penetración con valores reales de penetración. Para la obtención de los datos reales se realizaron una serie de experimentos con el proceso GTAW, cuyo método se basó en el propuesto por (Aidun y Martín, 1998), el cual consistió en aplicar un punto de soldadura sobre una platina de acero A36, una vez realizados los puntos de soldadura, la platina se corta por la mitad del punto de soldadura para luego ser pulida, con el fin de dejar en evidencia la penetración, para ello la

superficie de corte de la platina debe ser pulida y atacada con Nital al 2%, para finalmente observarla en el analizador de imágenes (Figura 3), donde se mide la penetración de la junta, tal como es definida por la AWS (American Welding Society), (Figura 4).

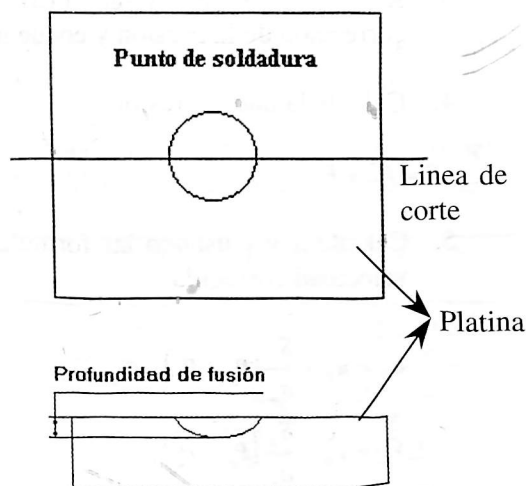


Figura 3. Profundidad de fusión (penetración).

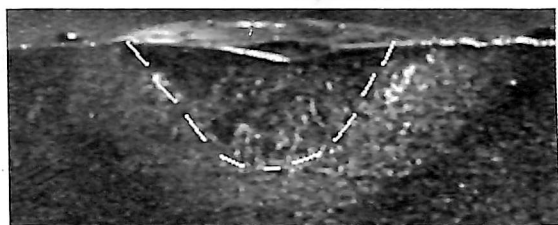


Figura 4. Microfotografía del charco de soldadura obtenido con el proceso GTAW con una corriente de 90A y 2 s de permanencia del arco.

Durante la validación del modelo se encontró que los datos obtenidos por el simulador SimVol tienen una correspondencia total, siempre y cuando se utilicen valores del parámetro de distribución de calor en la ecuación de entrada de calor (9) apropiados para cada entrada de calor; es decir, este parámetro no es un valor fijo, sino que también es función de la corriente.

6. EXPERIMENTOS

EN

EL

SIMULADOR

Una vez validado el modelo se realizaron una serie de experimentos en el simulador SimVol, los cuales permitieron predecir el comportamiento de la penetración para diferentes valores de entrada de calor, los resultados de estos experimentos se ilustran en la Figura 5.

Adicionalmente se realizaron otra serie de experimentos en el simulador, los cuales permitieron obtener una mayor comprensión del fenómeno. El primer experimento consistió en comparar la penetración obtenida cuando sólo se considera la conducción con la penetración obtenida cuando se considera tanto la conducción como la convección, este experimento arrojó el siguiente resultado mostrado en la Tabla 2 y en la Figura 5.

Tabla 2. Comparación de la penetración cuando se considera sólo la penetración, con la obtenida cuando se considera conducción y convección

Conducción	Conducción y convección
Penetración = 0,3 mm	Penetración = 1,6 mm

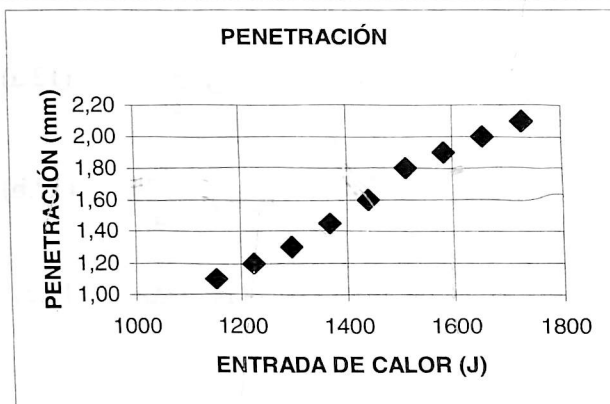


Figura 5. Efecto de la Entrada de calor en la penetración.

Como puede observarse en la Tabla 2, el flujo convectivo tiene una gran influencia en la penetración de la junta, pues para las mismas condiciones del proceso, la penetración pasa de

un valor de 0,3 mm en el caso conductivo a 1,6 mm en el caso en el que se considera tanto la conducción, como la convección. Por tal razón los modelos que sólo consideran el flujo conductivo son demasiados gruesos.

Otro de los experimentos consistió en calcular la penetración obtenida con cada una de las fuerzas impulsoras, los resultados se indican en la Tabla 3.

Tabla 3. Comparación de la penetración obtenida con las diferentes fuerzas impulsoras.

Fuerza Flotabilidad	Fuerza Electromagnética	Efecto Marangoni
Penetración = 0,3mm	Penetración = 1,7mm	Penetración = 0,3mm

La fuerza electromagnética produce un patrón de flujo hacia adentro, lo cual le permite transferir el calor desde la fuente hacia la raíz del charco de soldadura, aumentando, por tanto, considerablemente la penetración de la junta. Mientras que la fuerza de flotabilidad y el efecto Marangoni generan un patrón de flujo hacia fuera y por tanto, disminuyen la penetración.

7. CONCLUSIONES

En esta investigación se realizó el simulador SimVol, basado en un modelo numérico de flujo de fluidos acoplado al flujo de calor que describe en dos dimensiones y en estado transitorio el flujo de calor y de metal líquido en el charco de soldaduras por arco con fuente fija. En particular el simulador fue aplicado para observar el efecto de la entrada de calor en la *penetración*.

Los experimentos realizados a través de un simulador permiten predecir el comportamiento de un proceso. En este caso, después de realizar una serie de experimentos en el simulador SimVol se encontró que la *penetración* aumenta linealmente con el incremento de la entrada de calor.

Uno de los grandes aportes de la simulación es que permite conocer el efecto de cada variable y ponderar su incidencia en el fenómeno. Así,

con el simulador SimVol se observó el efecto de cada una de las fuerzas en el flujo de metal líquido en el charco de soldadura y en la *penetración*.

La simulación permite una mayor comprensión del fenómeno, lo cual a su vez permite su mejoramiento y control. Es decir, el conocimiento del efecto de una variable en el fenómeno junto con su adecuada manipulación permiten controlar las variables de salida del proceso. En esta investigación se pudo demostrar la gran incidencia de la entrada de calor en la *penetración*, pues al aumentarse la entrada de calor se aumenta la fuerza electromagnética, y por lo tanto la *penetración*. Otros comportamientos ocurridos en el flujo de calor y de fluidos en el charco de soldadura que pudieron ser inferidos de los experimentos realizados en el simulador SimVol son:

- El flujo de metal líquido en el charco de soldadura afecta considerablemente la *penetración*. El campo de flujo que favorece la *penetración* es aquel que transfiere el calor de la fuente de calor a la raíz del charco, este tipo de flujo es producido por la fuerza electromagnética.
- El parámetro de distribución de calor afecta fuertemente la entrada de calor y, por tanto, la *penetración*. Esta fuerte influencia del parámetro de distribución de calor no es posible observarse en las soluciones analíticas, pues este tipo de solución supone la fuente puntual.
- Al aumentar la eficiencia aumenta la *penetración*, debido a que la entrada de calor es directamente proporcional a la eficiencia.

Cuando se realiza el modelamiento de un fenómeno puede tenerse la dificultad en el planteamiento de algunos de sus modelos (matemático, numérico, computacional). Durante la realización del simulador SimVol la mayor dificultad se presentó en el planteamiento del modelo numérico, pues era necesario encontrar un algoritmo que permitiera tanto la solución de la ecuación de energía acoplada a las ecuaciones de Navier –Stokes, como del campo de presión, pues no se conocía el comportamiento de la presión en el charco de soldadura. Esta dificultad fue superada con el

uso del algoritmo SIMPLE, el cual es un algoritmo iterativo desarrollado con el método numérico Volumen Finito.

REFERENCIAS

- Aidun, D. y Martín, S. Penetration in spot GTA welds during centrifugation. *Journal of Materials and Performance*, vol 7 (5), p. 597-600, 1998.
- Ashby, M. Physical modelling of materials problems. *Materials Science and Technology*, 8, p. 102-111, 1998.
- Choo, R. Szekely, J. Modeling of High-Current Arcs with Emphasis on Free Surface Phenomena in the Weld Pool. *Welding Journal*. p. 346s-361s, 1990.
- Grong, O. Metallurgical Modelling of Welding. Instituto de Materiales, Londres, 1994.
- Kim, W. et al., A Mathematical Model of Gas Tungsten Arc Welding Considering the Cathode and the Free Surface of the Weld Pool. *Metallurgical and Materials Transactions B*. 28B. p.679-686, 1997.
- Kou, S. and Wang, Y. Computer Simulation of Convection in Moving Arc Weld Pools. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 17A, p 2271-2277, 1986.
- Kou, S. and Wang, Y. Three-Dimensional Convection in Laser Melted Pools. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 17A, p 2265-2270, 1986.
- Lin, M. and Eagar, T. Pressures produced by Gas Tungsten Arcs. *Metallurgical Transactions B*, 17B, p601-607, 1986.
- Patankar, S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Editorial Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
- Peric, M. Ferziger, J. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Editorial Springer, segunda edición, Berlin, 1997.
- Rosenthal, D. Mathematical theory of heat distribution during welding and cutting. *Welding Journal*, 20, p 220s-234s, 1941.
- Rykaline, N. Calcul des processus thermiques de soudage. *Soudage et Techniques connexes*, 15, 1961.
- Stone, H. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *Numerical Analysis*, 3, (5), p530-558, 1968.
- Wu, C. and Dorn, L. Prediction of surface depression of a tungsten inert gas weld pool in the full-penetration condition. *Journal of Engineering Manufacture*. Part b. 209. p 221-226, 1995.
- Zhang, Y. et al. Numerical analysis of fully penetrated weld pools in gas tungsten arc welding. *Journal of Mechanical Engineering Science*. 210, parte C. p.187-195, 1996.
- Zhang, Y. et al. Numerical Dynamic Analysis of Moving GTA Weld Pool. *Journal of Manufacturing Science and Engineering. Transactions of the ASME*, 120. p.173-178, 1998.