

LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN, LAS ONDITAS Y EL EXPONENTE DE HOLDER

HORACIO ARANGO MARÍN

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Medellín

RESUMEN: Las derivadas de la solución fundamental de la ecuación unidimensional del calor en un dominio no acotado, definen onditas con n momentos que se anulan. Las transformadas calculadas con estas onditas, son herramientas útiles en la determinación de la regularidad de una señal. Una medida de la regularidad local, el exponente de Holder, se estima numéricamente con los coeficientes de la transformada módulo máximo, calculados en las escalas pequeñas. Se presentan los resultados en señales de prueba, en movimientos Brownianos fraccionales y en electrocardiogramas.

PALABRAS CLAVES: Onditas, Transformada módulo máximo, Ecuación del calor, Exponente de Holder.

ABSTRACT: The derivatives of the fundamental solution of one-dimensional heat equation in a non-bounded domain define wavelets with n vanishing moments. The transforms calculated with this wavelets are useful tools in determining the regularity of a signal. A measure of the local regularity, the Holder exponent, is numerically estimated with the coefficients of the modulus maxima transform, calculated in small scales. The results of this estimation are presented in testing signals, in fractional brownian motion as well as in electrocardiograms.

KEY WORDS: Wavelets, Modulus Maxima Transform, Heat Equation, Holder Exponent.

1 INTRODUCCIÓN

El índice de precios en una bolsa de valores, los latidos del corazón (*Ivanov et al., 1999*), los movimientos brownianos fraccionales, son entre otras, señales continuas no diferenciables que presentan estructuras fractales o multifractales. Para caracterizar estas estructuras es necesario determinar la regularidad de la señal (función de $L^2(\mathbb{R})$). El exponente de Holder cuantifica la regularidad de una señal en un intervalo o en un punto y además, mide el grado de singularidad de una función o de sus derivadas. El cálculo del exponente de Holder podría hacerse usando su definición, sin embargo, para funciones como la de Riemann, este enfoque no produce un buen resultado (*Meyer, 1993*).

La transformada de Fourier no puede dar información acerca de un evento localizado en el dominio temporal y por ello, no es adecuada para detectar y cuantificar las singularidades de una señal.

Las onditas generadas mediante la derivación de la solución fundamental de la ecuación unidimensional del calor en un dominio no acotado, definen transformadas que detectan y cuantifican las singularidades de una señal o de sus derivadas. El decrecimiento de los coeficientes de la transformada ondita, cuando las escalas de las líneas máximas disminuyen, suministra procedimientos numéricos para la estimación del exponente de Holder.

En la sección 2 de este trabajo, se introduce la solución fundamental de la ecuación del calor y se definen las onditas, la transformada ondita y la regularidad de una función. La estimación numérica de la regularidad local realizada mediante la transformada ondita, se apoya en los teoremas obtenidos principalmente por Jaffard (*Jaffard, 1989*) y Mallat (*Mallat y Hwang, 1991*) y se estudia en las secciones 3 y 4.

En la sección 5, se presentan los resultados del cálculo aproximado del exponente de Holder en señales digitales con exponente conocido, en movimientos brownianos fraccionales y en electrocardiogramas.

2 SOLUCIÓN FUNDAMENTAL, ONDITAS Y REGULARIDAD

2.1 La ecuación del calor y su solución

La solución fundamental del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (1)$$

es

$$p(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

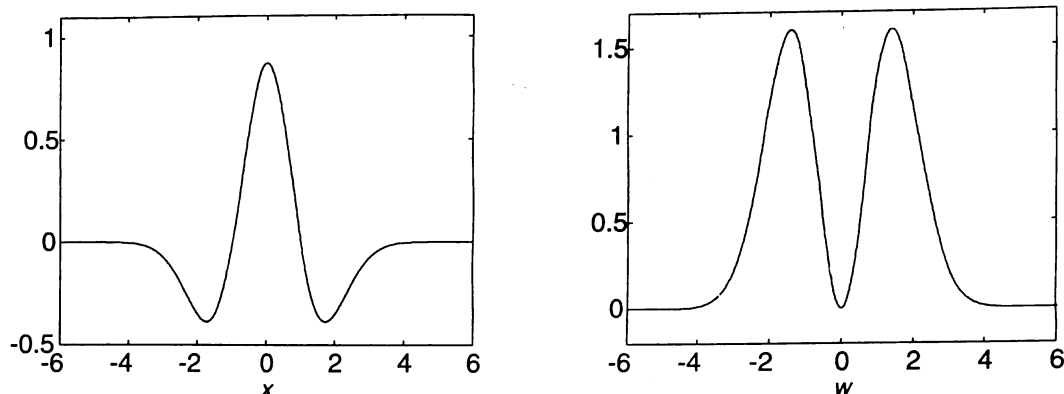
Esta solución se obtiene vía análisis de Fourier y ella es una función C^∞ en $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ (*Taylor, 1996*).

Para un $t > 0$ fijo, se tiene:

i). La solución $p(x, t)$ y cada una de sus derivadas con respecto a x , son funciones rápidamente decrecientes, es decir, para cualquier $k \geq 0$ y $m \in \mathbb{N}$ existe C_m , tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |p^k(x)| \leq \frac{C_m}{1 + |x|^m}.$$

ii). La función $p(x, t)$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ y está bien localizada en tiempo y frecuencia. Usualmente se interpreta, como la respuesta al impulso de un filtro de paso bajo, debido a que su transformada de Fourier

Figura. 1. La ondita Ψ_2 y su transformada de Fourier

$\hat{p}(w) = e^{-tw^2}$, toma valores muy pequeños en las frecuencias altas ($|w| > 6$).

iii). La solución $p(x, t)$ es una dilatación de la función de densidad normal, $\Phi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. Haciendo $s^2 = t$, podemos escribir $p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Phi_s(x)$, donde $\Phi_s(x) = \frac{\Phi(\frac{x}{s})}{\sqrt{s}}$. Con esta notación, la solución única $u(x, s)$ del problema 1 con condición inicial $f \in L^2(\mathbb{R})$ dada, es la convolución de f con $p(s, t)$

$$u(s, x) = p(s, \circ) * f(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Phi_s * f(x).$$

La solución, en la variable x , es una función continua de $L^2(\mathbb{R})$. Ella se obtiene por la acción de un filtro de paso bajo dilatado, sobre la condición inicial f .

2.2 Las Onditas

Una ondita es una función $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dx = 0. \quad (2)$$

En este trabajo las onditas Ψ son funciones de valor real con $\|\Psi\|_2 = 1$. La condición 2, llamada de admisibilidad, es equivalente a $\hat{\Psi}(0) = 0$ y por ello su transformada de Fourier, $\hat{\Psi}(w) \in L^2(\mathbb{R})$, es la función de transferencia de un filtro de paso banda. Dilatando y trasladando a Ψ se obtiene una familia de onditas $\Psi_{s,v}(x) = \frac{\Psi(\frac{x-v}{s})}{\sqrt{s}}$, con $\|\Psi_{s,v}\| = 1$.

La transformada ondita de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$, con respecto a Ψ , en la escala $s > 0$ y en la variable $v \in \mathbb{R}$, se define como

$$\begin{aligned} Wf(s, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{x-v}{s}\right) dx = \langle f, \Psi_{s,v} \rangle \\ &= f * \Psi_s(v). \end{aligned} \quad (3)$$

en donde $\Psi_s(x) = \frac{\Psi(\frac{x}{s})}{\sqrt{s}}$. La convulsión (3) calcula la

transformada ondita de una señal f con filtros de paso banda expandidos ($s > 1$) o contraídos ($s < 1$). Como Ψ satisface la condición 2, el coeficiente $Wf(s, v)$ mide la variación de f en una vecindad con centro en v y radio proporcional a la escala s . A variaciones bruscas de la señal corresponden coeficientes $Wf(s, v)$ de magnitud grande y a cambios suaves, coeficientes pequeños.

Para calcular la regularidad de una señal, se requiere que la ondita Ψ tenga $n \in \mathbb{N}$ momentos que se anulen, es decir, Ψ debe satisfacer la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \Psi(x) dx = 0, \text{ para } 0 \leq k < n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Una ondita con n momentos que se anulan es ortogonal a todo polinomio de grado $(n-1)$ y por lo tanto, la transformada ondita de estos polinomios es $Wf(s, v) = 0$.

2.3 La regularidad de una función

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Holder $\alpha \geq 0$ en x_0 , si existe $K > 0$ y un polinomio de grado $m = \lfloor \alpha \rfloor$, tal que para todo x en una vecindad de x_0 , se cumple

$$|f(x) - P_m(x)| \leq K |x - x_0|^\alpha. \quad (5)$$

Se dice que f es Holder α uniformemente en $[a, b]$, si satisface 5 para todo $x_0 \in [a, b]$, con K independiente de x_0 . Al número α se le llama Exponente de Holder.

La regularidad de f en x_0 o en $[a, b]$ es el sup de los valores de α , tales que f es Holder α .

Si la regularidad α_0 de f en x_0 cumple $n-1 < \alpha_0 < n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces f es $(n-1)$ veces continuamente diferenciable, pero su derivada $f^{(n-1)}$ es singular en x_0 . El exponente α_0 caracteriza esta singularidad. Una señal $f \in L^2(\mathbb{R})$ acotada y discontinua en x_0 , tiene regularidad $\alpha = 0$ en x_0 y si la regularidad es $\alpha < 1$ en x_0 , la señal f es continua y no diferenciable en x_0 .

Si f es Holder $\alpha < n$ en x_0 , entonces en una vecindad de x_0 , podemos aproximar a f con un polinomio, P_{n-1} , de grado a lo sumo $(n-1)$; es decir $f(x) = P_{n-1}(x) + E_{x_0}$, con $|E_{x_0}| \leq K |x - x_0|^\alpha$. La

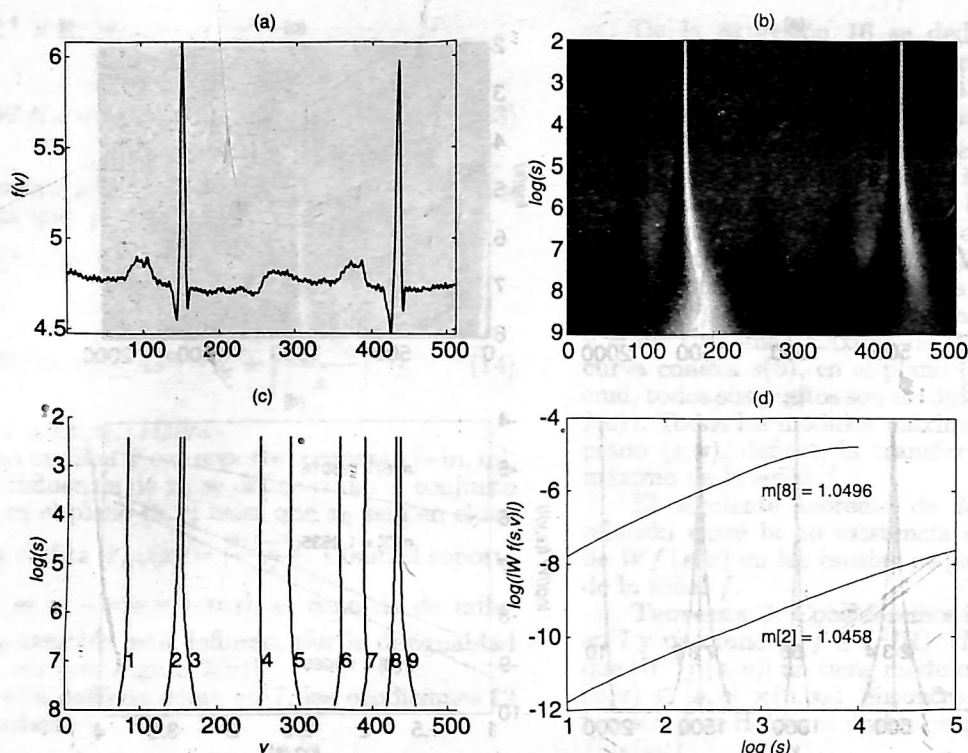


Figura. 2.(a) Electrocardiograma.(b) Transformada Ondita.(c) Líneas máximas.
(d) Exponentes de Holder, $(\alpha + \frac{1}{2})$, estimados en las escalas de las líneas 2 y 8.

transformada ondita de f , con respecto a una ondita Ψ con n momentos que se anulan, se escribe

$$Wf(s, v) = W E_{x_0}(s, v). \quad (6)$$

Cuando v está en una vecindad de x_0 , con la expresión 6, se calcula aproximadamente el exponente de Holder α en el punto x_0 .

3 CARACTERIZACIÓN DE SINGULARIDADES USANDO ONDITAS

3.1 Las onditas para el análisis de las singularidades

La función par $\Phi(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}}$, con $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx \neq 0$, es la solución fundamental de la ecuación del calor, cuando $t = \frac{1}{2}$. Esta es una función suavizante, porque la convolución o filtrado de f con Φ remueve las altas frecuencias de f .

Con la función Φ se define

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Psi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(\Phi(x)). \quad (7)$$

La función Ψ_n es rápidamente decreciente. Veamos que es una ondita con n momentos que se anulan.

En efecto, $\Psi_n \in L^2(\mathbb{R})$ porque $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx < \infty$. La transformada de Fourier de Ψ_n es $\hat{\Psi}_n(w) = (iw)^n \hat{\Phi}(w)$ y como $|\hat{\Phi}(w)| < \infty$ y $\hat{\Phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx \neq 0$,

se tiene que $\hat{\Psi}_n(0) = 0$ y así, $\hat{\Psi}_n$ satisface la condición de admisibilidad 2.

La ondita $\hat{\Psi}_n$ tiene a lo más n momentos que anulan. De acuerdo con las propiedades de la transformada de Fourier, se deduce que $\int_{-\infty}^{\infty} x^n \hat{\Psi}_n(x) e^{-iwx} dx = (i)^n \hat{\Psi}_n^{(n)}(w)$ y realizando unos cálculos sencillos, se concluye que, para $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_n^{(k)}(w) &= w^n \hat{\Phi}^{(k)}(w) + \\ &+ k \left(n w^{n-1} \hat{\Phi}^{(k-1)}(w) + \dots + n(n-1) \right. \\ &\quad \left. + \dots + (n-k+2) w^{n-k+1} \hat{\Phi}^{(1)}(w) \right) \\ &\quad + n(n-1) \dots (n-k+1) w^{n-k} \hat{\Phi}(w). \end{aligned}$$

Si $0 \leq k < n$, es claro que $\hat{\Psi}_n^{(k)}(0) = 0$ y si $k = n$ entonces, $\hat{\Psi}_n^{(n)}(0) = n! \hat{\Phi}(0) \neq 0$. Por lo tanto, la ondita Ψ_n tiene a lo más n momentos que se anulan. adicionalmente desde el punto de vista numérico, la ondita Ψ_n se considera de soporte compacto (ver figura 1).

La transformada ondita de $f \in L^2(\mathbb{R})$, con respecto a Ψ_n viene dada por

$$W^n f(s, v) = s^n \frac{d^n}{dv^n} (f * \Phi_s)(v) \quad (8)$$

$$= s^n f * \frac{d^n \Phi_s}{dx^n}(v) \quad (9)$$

$$= s^n \frac{d^n f}{dx^n} * \Phi_s(v), \quad (10)$$

en donde $\Phi_s(x) = \frac{\Phi(x/s)}{\sqrt{s}}$. De la definición 7, se

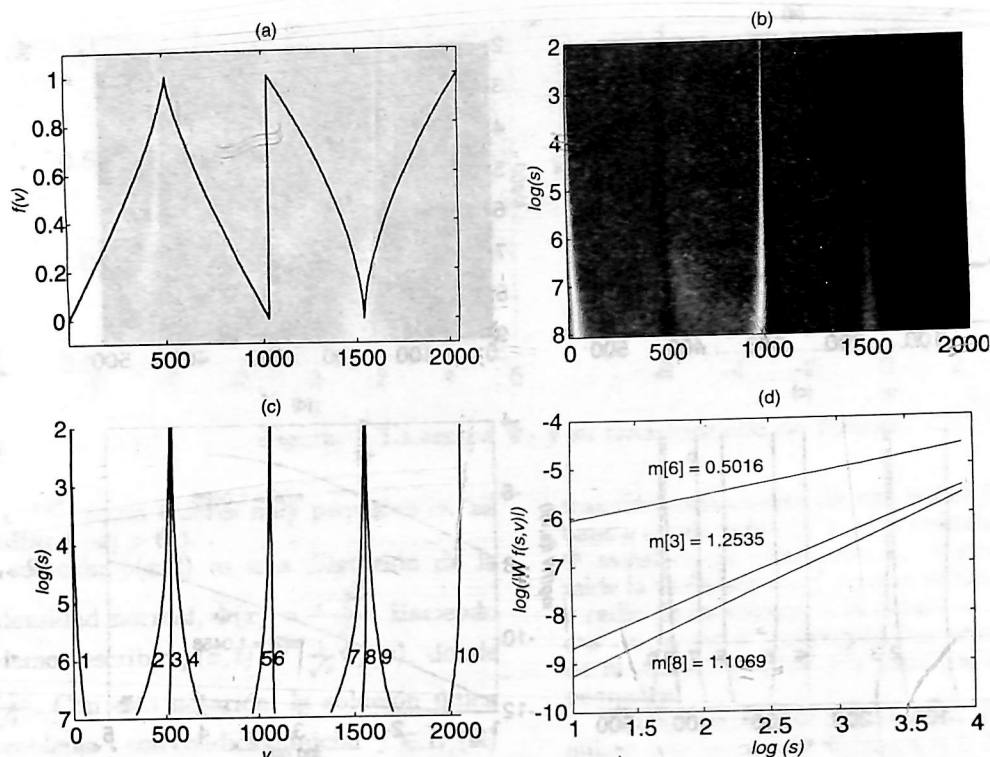


Figura. 3. (a) Señal con exponentes de Holder conocidos. (b) Transformada ondita. (c) Líneas máximas que convergen a las singularidades. (d) Pendientes estimados en las escalas de las líneas máximas 3, 6 y 8.

obtiene $\Psi_s(x) = \frac{\Psi_n(\frac{x}{s})}{\sqrt{s}} = s^n \frac{d^n}{dx^n}(\Phi_s(x))$ y conmutando los operadores convolución y diferencial en $W^n f(s, v) = f * \Psi_s(v)$, se deduce 8.

Con lo anterior, se obtiene que la transformada $W^n f(s, v) = s^{\frac{2n+1}{2}} u(s, v)$, donde $u(s, v)$ es la solución de 1 con condición inicial $f^{(n)}$, $s^2 = t$ y $x = v$. La derivada $f^{(n)}$, se define en el sentido de las distribuciones.

3.2 Los coeficientes ondita en las escalas pequeñas

La regularidad de una señal en un punto o en un intervalo, está relacionada con la forma como los coeficientes de la transformada ondita, decrecen en las escalas pequeñas. Medir el decrecimiento asintótico de los coeficientes, es equivalente a observar la señal a resoluciones cada vez mayores o a escalas que se van acercando a cero.

Veamos una primera relación entre el decrecimiento de los coeficientes y la escala.

Consideremos una ondita Ψ rápidamente decreciente, con n momentos que se anulan y de soporte compacto $[-m, m]$. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, una función de regularidad α en un intervalo $[a, b]$, con $n-1 < \alpha \leq n$.

Para cualquier $x_0 \in [a, b]$ y para cualquier x y v en una vecindad de x_0 , de acuerdo con la hipótesis de regularidad, se tiene que $f(x) = P_{n-1}(x) + K|x - x_0|^\alpha$, con K independiente de x_0 .

Como Ψ tiene n momentos que se anulan, la

transformada ondita es ortogonal a todos los polinomios de grado $n-1$ y por tanto $|Wf(s, v)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} K|x - x_0|^\alpha |\Psi_s(v - x)| dx$.

Por ser Ψ es rápidamente decreciente, se tiene que $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi_s(x)}{\sqrt{s}} = c\delta$. Con este límite y la continuidad de la función $|x - x_0|^\alpha$, la desigualdad anterior la podemos escribir, como $|Wf(s, v)| \leq M|v - x_0|^\alpha \sqrt{s}$. Por último, ya que Ψ es de soporte compacto, concluimos que

$$|Wf(s, v)| \leq O(s^{\alpha+\frac{1}{2}}), \text{ cuando } s \rightarrow 0 \quad (11)$$

Los teoremas de Jaffard dan condiciones necesarias y suficientes para que la transformada ondita determine la regularidad de f en un punto o en un intervalo.

Teorema 1. Dada una ondita Ψ rápidamente decreciente y con n momentos que se anulan. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ es Holder $\alpha \leq n$ uniformemente en $[a, b]$, entonces existe $A > 0$ tal que

$$\forall (s, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, |Wf(s, v)| \leq As^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Recíprocamente, si $|Wf(s, v)|$ satisface 12 y si $\alpha < n$ no es un entero, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, f es Holder $\alpha \leq n$ uniformemente en $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ (Mallat).

Teorema 2. Dada una ondita Ψ rápidamente decreciente y con n momentos que se anulan. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ es Holder $\alpha \leq n$ en x_0 , existe $A > 0$ tal que

$$\forall(s, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},$$

$$|Wf(s, v)| \leq As^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{v-x_0}{s} \right|^\alpha\right). \quad (13)$$

Recíprocamente si $\alpha \leq n$ no es un entero y existen A y $\alpha' < \alpha$ tales que

$$\forall(s, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},$$

$$|Wf(s, v)| \leq As^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{v-x_0}{s} \right|^{\alpha'}\right), \quad (14)$$

f es Holder α en x_0 (Mallat)

Para las onditas Ψ con soporte compacto $[-m, m]$, el cono de influencia de x_0 se define como el conjunto de puntos en el plano (s, v) tales que x_0 está en el soporte de la ondita $\Psi_{s,v}(x) = \frac{\Psi(\frac{x-v}{s})}{\sqrt{s}}$. Como el soporte de $\frac{\Psi(\frac{x-v}{s})}{\sqrt{s}}$ es $[v - ms, v + ms]$, el cono de influencia de x_0 también está definido, por la desigualdad $|v - x_0| \leq ms$ (ver Figura 2(b)).

Si Ψ_n está definida como en 7, las condiciones 12 y 14 se escriben

$$|W^n f(s, v)| \leq A(s^{\alpha+\frac{1}{2}}), \text{ es decir,} \quad (15)$$

$$\log_2(|W^n f(s, v)|) \approx \log_2(A) + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \log_2(s). \quad (16)$$

Entonces, si las escalas correspondientes a cualquier línea dentro del cono de influencia de x_0 se acercan a cero, los valores absolutos de los coeficientes de la transformada ondita decrecen.

4 LA TRANSFORMADA ONDITA MÓDULO MÁXIMO

La señal f suavizada por Φ_s , $f * \Phi_s$, tiene en las discontinuidades de f puntos de inflexión, que pueden ser máximos o mínimos locales del valor absoluto de su primera derivada. Estos máximos locales corresponden a variaciones bruscas de $f * \Phi_s$ y los mínimos están asociados a cambios suaves.

La transformada ondita $W^1 f(s, v)$ es proporcional a la primera derivada de $f * \Phi_s$ y por lo tanto, para cualquier escala $s > 0$ en el dominio de la variable v , los extremos locales de $W^1 f(s, v)$ son los puntos de inflexión de $f * \Phi_s$ y los ceros de $W^2 f(s, v)$. Para $s > 0$, los puntos v en donde el valor absoluto de $W^1 f(s, v)$ tiene máximo local, corresponden a puntos de discontinuidad de la señal f . En forma similar, los puntos en donde $|W^2 f(s, v)|$ tiene un máximo local, son los puntos de discontinuidad de la primera derivada de la señal. En general, para $s > 0$, los v en donde el valor absoluto de $W^n f(s, v) = s^n \frac{d^n}{dv^n}(f * \Phi_s)(v)$ toma un máximo local, son los puntos de discontinuidad de la derivada $(n-1)$ de f .

De la expresión 16 se deduce un primer algoritmo para la estimación del exponente de Holder, $\alpha \leq n-1$, en un punto. Se calcula la pendiente de $\log_2 |W^n f(s, v)|$ como función lineal de $\log_2(s)$, en las escalas de la línea vertical que termina en el punto x_0 . Este procedimiento se modifica haciendo el cálculo de la pendiente, en las escalas de la línea que converge a x_0 y que une los puntos en donde los coeficientes $|W^n f(s, v)|$ tienen un máximo local.

Un punto (s_0, v_0) se llama módulo máximo de $W^n f(s, v)$, si $|W^n f(s, v)|$ toma un máximo local en $v = v_0$. Una línea máxima de $W^n f(s, v)$ es cualquier curva conexa $s(v)$, en el plano (s, v) , a lo largo de la cual, todos sus puntos son módulo máximo (ver Figura 2(c)). Todos los módulos máximo de $W^n f(s, v)$, en el plano (s, v) , definen la transformada ondita módulo máximo de la señal f .

El siguiente teorema de Mallat establece una relación entre la no existencia de módulos máximos de $Wf(s, v)$ en las escalas pequeñas y la regularidad de la señal f .

Teorema 3. Consideremos la ondita Ψ_n definida en 7 y una función $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Si existe s_0 tal que $|W^n f(s, v)|$ no tiene módulo máximo en la región $(v, s) \in [a, b] \times (0, s_0)$, entonces para todo $\epsilon > 0$, la función f es Holder n uniformemente en $[a + \epsilon, b - \epsilon]$. (Mallat)

Como corolario se establece que f puede ser singular en $x_0 = v_0$ con exponente de Holder $\alpha \in (0, 1)$, si existe una sucesión de módulos máximos (s_k, v_k) , $k \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v_0 \in [a, b]$. La transformada ondita detecta entonces todas las singularidades, cuando la escala $s \rightarrow 0$.

Como una consecuencia del principio del máximo, veamos que los módulos máximos de $W^n f(s, v)$ pertenecen a curvas conexas que no se interrumpen cuando la escala decrece.

En efecto, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ y los intervalos $[a, b]$ y $[s_0, s_2]$ con $s_0 > 0$, supongamos que los módulos máximos de $W^n f(s, v)$ pertenecen a la región $[a, b] \times [s_0, s_2]$ y que una línea máxima se interrumpe en (s_1, v_1) , con $s_0 < s_1 < s_2$ y $v_1 \in [a, b]$. Ya que $W^n f(s, v) = s^{\frac{2n+1}{2}} u(s, v)$, en donde $u(s, v)$ es la solución de 1 con condición inicial $f^{(n)}$, $s^2 = t$ y $x = v$, el máximo local de $|W^n f(s, v)|$ en (s_1, v_1) es también un máximo local de $|u(s, v)|$. Como la línea máxima se corta en (s_1, v_1) se puede encontrar $\epsilon > 0$, tal que el máximo de $|u(s, v)|$ en la región $[s_1 - \epsilon, s_1] \times [v_1 - \epsilon, v_1 + \epsilon]$ está en (s_1, v_1) . Lo anterior contradice el principio del máximo para la ecuación del calor, pues este garantiza que el máximo de $|u(s, v)|$ para $(s, v) \in [a, b] \times [s_0, s_1]$, se encuentra en $v = a$ o en $v = b$ o en $s = s_0$.

Por lo tanto, los módulos máximos pertenecen a curvas conexas que no se interrumpen cuando la escala decrece.

5 ESTIMACIÓN NUMÉRICA DEL EXPONENTE DE HOLDER

De acuerdo con lo anterior, las líneas máximas que no se interrumpen cuando la escala decrece, no necesi-

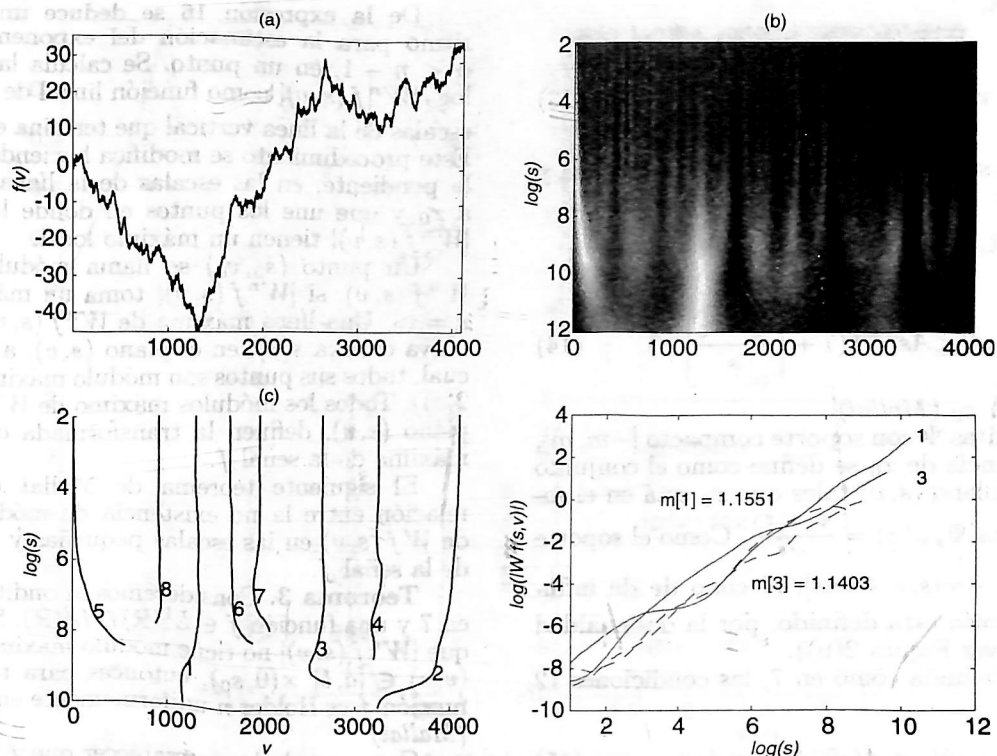


Figura 4. (a) Movimiento browniano fraccional ($H=0.654$). (b) Transformada ondita. (c) Líneas máximas. (d) Pendientes estimadas en las líneas 1,3,4 y 6.

riamente terminan en puntos singulares. Entonces, para detectarlos es necesario estudiar como decrecen los módulos máximos en las líneas máximas, cuando la escala $s \rightarrow 0$.

Para ello, sea $f \in L^2(\mathbf{R})$ una función con singularidades $[a, b]$. Para determinarlas y cuantificarlas, usamos las onditas ψ_n .

Dado $s > 0$, si para $0 < s < s_0$ todos los módulos máximos que convergen a algún $x_0 \in [a, b]$, se encuentran en el interior del cono $|v - x_0| \leq ms$, entonces x_0 es una potencial singularidad de f .

De la ausencia de módulos máximos por debajo del cono ($s > s_0$) y el teorema 3., se puede concluir f es Holder n uniformemente en la vecindad de cualquier $z \neq x_0$ y $z \in (x_0 - ms_0, x_0 + ms_0)$.

Además, como el decrecimiento de los coeficientes $|W^n f(s, v)|$ en la vecindad de x_0 , está determinado el decrecimiento de los módulos máximos en el interior del cono de influencia, $|v - x_0| \leq ms$, podemos afirmar, de acuerdo con el teorema 1., que si f es Holder $\alpha \leq n$ uniformemente en la vecindad de un punto x_0 , existe $A > 0$, tal que cada módulo máximo en el cono $|v - x_0| \leq ms$, satisface

$$|W^n f(s, v)| \leq A s^{\alpha + \frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Por lo tanto, la regularidad α en x_0 es la máxima pendiente de $\log_2 |W^n f(s, v)|$ como función lineal de $\log_2(s)$, definida en las escalas correspondientes a las líneas máximas que convergen a x_0 .

Para estimar el grado de singularidad de una función, vamos a usar las onditas Ψ_1 y Ψ_2 . Ellas están definidas explícitamente por:

$$\Psi_1(x) = ce^{-x^2/2} \text{ y } \Psi_2(x) = k(1-x^2)e^{-x^2/2}.$$

El cálculo de $W^1 f(s, v)$ y de $W^2 f(s, v)$, se realiza en el dominio de la frecuencia y en un rango de escalas que van desde 2^0 hasta $2^{\log_2(N)}$. La escala más pequeña que puede usarse está limitada por la resolución de la señal digital y usualmente se toma como $s = 1$ y la escala mayor está acotada por la longitud N de la señal.

Cada intervalo de este rango de escalas, llamado octava, se divide en un número escogido de voces. Los coeficientes $W^1 f(s, v)$ y $W^2 f(s, v)$ correspondientes a cada $v \in [0, N]$ y a cada $s \in [2^0 \text{ hasta } 2^{\log_2(N)}]$, se grafican empleando una escala de grises, blanco para los coeficientes negativos y negro para los positivos.

En primer lugar, consideramos un electrocardiograma y usamos la ondita Ψ_1 para calcular el exponente de Holder al final de la onda R del complejo QRS. Haciendo el ajuste lineal, en el sentido de los mínimos cuadrados, de $\log_s |W^1 f(s, v)|$ como función de $\log_2(s)$, en las escalas que corresponden a las líneas máximas 2 y

8, obtenemos el exponente de Holder estimado $(\alpha + \frac{1}{2})$

como la pendiente de estas rectas (ver Fig. 2. (c) y (d)).

La segunda señal analizada se construye, a partir de la función $|x|^\beta$, con exponentes de Holder $\alpha = 0.754, 0.0, 0.612$ en $x_0 = 512, 1024, 1536$ respectivamente.

Para calcular la transformada de esta señal se usa la ondita Ψ_2 y el ajuste lineal para estimar el expo-

nente de Holder se realiza en las escalas pertenecientes a las líneas máximas 3, 6 y 8 (ver Figura 3.).

La última señal en consideración, es un movimiento browniano fraccional (*mbf*) con exponente de Hurst $H = 0.654$. Cualquier realización de un (*mbf*) es una función no diferenciable en casi toda parte con exponente de Holder puntual $\alpha = H$. Los (*mbf*) se utilizan para simular registros de porosidad verticales y generar mapas de porosidad, que permiten hacer predicción de procesos de recobro mejorado en yacimientos de petróleo (Restrepo, 2000) En la figura 4. se muestra una realización de un (*mbf*), la gráfica de la transformada ondita con respecto a Ψ_2 , varias de las líneas máximas y el ajuste lineal de los módulos de los coeficientes de la transformada como función de las escalas, correspondientes a las líneas 1,3,4,6. La regularidad estimada del (*mbf*) viene dada por la máxima pendiente de estas líneas $\alpha = 0.6551$.

Los cálculos numéricos se realizaron en MatLab, version 5.1 con la ayuda de subrutinas de los programas WaveLab version 701 y 800 (*lab*).

REFERENCIAS

- Ivanov. P., Nunes. L., A. Goldberger. S. Havlin, M. Rosemblaum, Z. Struzik, E., Stanley., *Multifractality in human heartbeat dynamics*, Nature Vol. 399, 461, 1999.
- Meyer.Y., *Wavelets, Algorithms & Applications*, Siam, 17, 1993.
- Jaffard. S., *Exposants de Holder en des points donnees et les coefficients d'ondelettes*, Notesou *Compte Rendude l'Academie des Sciences*, Vol 308, 79-81, 1989.
- Mallat. S. y Hwang. W., *Singularity detection and processing with wavelets*, *Courant Institute de Mathematical Sciences*, Technical Report, , 1-62, 1991.
- Mallat. S. A., *wave tour of signal processing*, Academic Press, 171-172, 1998.
- Restrepo. D., *Análisis de registros de porosidad y su aplicación al modelamiento fractal de un yacimiento*, Tesis de Maestría, Postgrado en Recursos Hidráulicos, Facultad de Minas, 2000.
- Taylor. M., *Partial Differential Equations I*, Springer, 216-218, 1996.