TAMAÑO ÓPTIMO DE PLANTAS INDUSTRIALES

GABRIEL POVEDA RAMOS
Escuela de Formación Avanzada, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín

RESUMEN. Este trabajo busca llenar un vacío muy serio que existe en la literatura referente a la evaluación económica y financiera de plantas industriales, cual es el de la ausencia de un procedimiento para calcular de modo racional el tamaño o capacidad de la planta en proyecto. Aquí presentamos un método para traducir las características técnicas y financieras de la presunta planta en expresiones matemáticas y en funciones; para definir la rentabilidad como función del tamaño que se le dé; y para calcular por métodos matemáticos el tamaño óptimo para lograr la planta más rentable. No hay en la literatura ningún tratamiento matemático de esta cuestión. Se dá un ejemplo de la vida real.

PALABRAS CLAVES.Evaluación de proyectos, Diseño de plantas, Matemáticas financieras, Economía matemática, Ingeniería económica.

ABSTRACT. This paper is intended to fill in a very serious gap existing in the literature on the economic and financial evaluation of industrial plants, i.e. the absence of a rational methods to define the size of the plant to be built. We establish here a procedure designed to translate the technical and financial caracteristics of the would be plant; into mathematical expressions and to define its expected profitability as a function of the size to be decided upon; and to calculate by mathematical methods the optimum size for obtaining the most profitable plant other mathematical treatment of this issue is found in the literature. One real-life example is given.

KEY WORDS. Project evaluation, Industrial plants design, Financial mathematics, Mathematical economics, Engineering economics.

1 INTRODUCCIÓN

En el medio universitario colombiano no se encuentra casi ninguna literatura referente al problema industrial muy importante de cómo escoger el tamaño o capacidad más conveniente de una fábrica nueva que se trata de instalar y que en el futuro no vá a ser susceptible de pequeñas y graduales ampliaciones y que, por lo tanto, durante varios años vá a permanecer con la misma capacidad de producción con que se inicie. Según la experiencia del autor este problema se plantea cuando se ván a construir plantas químicas, de cemento, cerámicas, electroquímicas, fábricas de oxígeno, siderúrgicas, automotrices, termoeléctricas, metalúrgicas, refinerías de petróleo, destilerías de alcohol, fábricas de papel y de varios otros tipos.

También se plantea el mismo problema, aunque en menor escala técnica y económica, cuando se trata de adquirir una máquina o equipo que en sí mismo constituye una unidad de producción y de beneficio económico. Este es el caso de un tracto-camión diesel con remolque, para un pequeño transportador; y el de un horno eléctrico de inducción para una fundición de metales que es pequeña. Lo es también cuando una pequeña industria proyecta dotarse de una planta diesel electrogeneradora. Se podrían agregar muchos otros ejemplos tomados de la realidad industrial en Colombia y en otros muchos países análogos a éste.

En una situación como las indicadas lo primero que debe tenerse presente es el tamaño actual de la demanda que vá a atender la instalación en ciernes, y su crecimiento previsible hacia el futuro, respecto al producto o servicio que se trata de proveer. Es indispensable también tener una noción clara sobre la configuración y el funcionamiento de la instalación y sobre sus requerimientos de materias primas e insumos por cada unidad física del (o de los) producto(s) que se vá a generar en ella. Es necesario conocer los precios y los costos de dichos productos y de dichos insumos y, por supuesto, toda la información tecnológica, comercial y financiera que es pertinente en una situación como la que estamos tratando.

Este documento se escribe por tres razones:

(i) Porque el problema que aquí se expone y se resuelve ha sido y seguirá siendo importante y frecuente en la industria de Colombia y del mundo.
(ii) Porque es un enfoque teórico original y novedoso que no se encuentra en la literatura atinente a estos temas.
(iii) Porque esta metodología ha sido aplicada con éxito por el autor en varios casos de ensanches industriales y de nuevas plantas en este país y en otros.

2 RELEVANCIA DEL TEMA

Supongamos que se instala una planta demasiado pequeña. Surgen dos objeciones a saber:

(i) La experiencia mundial indica que para muchísimos tipos de industrias y de máquinas, es mas costoso producir cada unidad física de producto (p.e.: tonelada de cemento, barril de gasolina) en una instalación pequeña que en una instalación grande. Este es el fenómeno muy conocido y que se denomina con el nombre de "economías de escala".
(ii) Si la demanda crece (que es el escenario donde

esto se discute), la planta pequeña vá a quedar copada pronto y en los años subsiguientes se desaprovechará una gran parte de esa demanda futura

Si por el contrario, se instala una planta muy grande, aparecen otras objeciones como las siguientes:

(i) El desembolso inicial de dinero vá a ser demasiado grande, con los correspondientes grandes costos financieros.
(ii) La planta vá a trabajar largo tiempo con capacidad de producción sobrante y los costos de capital (como la depreciación) se ván a repartir en una producción relativamente pequeña, generando fuertes extracostos unitarios a cada unidad de producto.

Surge pues la necesidad de escoger un tamaño intermedio que no sea demasiado pequeño ni demasiado grande. Es decir que aproveche las economías de escala pero que ocasione un desembolso que no sea excesivo; y que atenúe los costos fijos de producción de cada unidad de producto, siendo pequeña, pero no tan pequeña que pierda mercado futuro desde muy joven. Se trata de un "*trade-off*" entre las economías de escala de lo grande y su alto costo financiero. Y de un "*trade-off*" entre los bajos costos fijos por unidad que permite lo pequeño, frente a sus desventajas ante el fenómeno de las economías de escala.

3 LAS ECONOMÍAS DE ESCALAS. LEY DE WILLIAMS

Si se compra un horno eléctrico de arco para hacer acero, con capacidad de 500 toneladas diarias, la inversión cuesta, digamos, 1 millón de "denarios". Pero si se compra otro horno eléctrico de la misma marca y del mismo diseño pero más grande, de 1000 toneladas diarias (doble de capacidad), cuesta más que la primera, pero bastante menos de 2 millones de "denarios". Y si se usan el uno y el otro, ambos a plena carga, el costo de capital (amortización del horno) por tonelada de acero que produzcan, será mayor en el mas pequeño y será menor en el mas grande.

Esto mismo ocurre en muchísimos tipos específicos de máquinas y de equipos: telares planos, reactores químicos, columnas de destilación, prensas de fricción para lámina metálica, motores eléctricos de inducción, ollas de masa para cerveza, transformadores eléctricos de potencia, hornos electrometalúrgicos, locomotoras eléctricas, motores a gasolina, plantas de refrigeración y muchísimos más.

Este hecho, conocido desde hace mucho tiempo, fue expresado muy concretamente en 1947 de una manera cuantitativa por la llamada ley de Williams. Esta ley establece que, dado un cierto tipo de máquina o de equipo, que se construye en distintos tamaños o capacidades, el valor de distintas unidades está correlacionado con sus respectivas capacidades mediante la fórmula empírica.

$$K = AQ^{\alpha}, \qquad (1)$$

en donde

K : es el valor comercial de una unidad nueva, que tiene capacidad Q. Tanto Q como K son variables de una a otra unidad o pieza. Las unidades de medida de K son dólares, u otra moneda dura. Las unidades de Q son unidades físicas que miden tamaños, potencia eléctrica, caudal, etcétera, según la función u operación técnica que ejecute la máquina o equipo.

A: es una constante numérica con dimensiones que es propia de cada tipo de equipo, y cuyo valor numérico específico depende de la magnitud física o geométrica que se use para medir a Q.

α : es una constante numérica sin dimensiones, y que también es propia del tipo de bien o de equipo. Sin embargo, el estudio de muchos tipos distintos de aparatos y máquinas mecánicas, eléctricas, hidráulicas, térmicas, etc., ha puesto de manifiesto que el valor numérico de α, en muchísimos equipos, es muy cercano al número $2/3 = 0.667$. Por esta razón es frecuente que a esta ley de Williams la denominen "ley de los dos tercios". El hecho de que α es numéricamente menor que el número 1,00 es la expresión algebraica del fenómeno de las economías de escala.

Los valores de A y de α para distintos tipos de bienes de capital se encuentran tabulados en manuales de ingeniería mecánica, de ingeniería industrial y de otras tecnologías relacionadas con el tema de los proyectos industriales.

Otra manera de expresar esta ley es que, para un mismo tipo de equipo, si se tienen dos piezas nuevas de capacidades Q_1 y Q_2, distintas, sus valores monetarios son K_1, K_2, respectivamente, y están en la relación

$$\frac{K_1}{K_2} = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{\alpha},$$

siendo α cercana al número 2/3.

4 UNA EMPRESA EN PROYECTO

Consideremos una empresa E que se está proyectando para fabricar un producto físico a partir de una combinación de materias primas conocidas, mediante una tecnología determinada, tal como se muestra en la figura 1

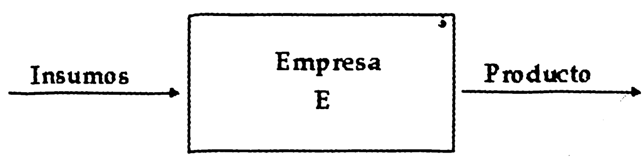

Figura 1. Empresa E que se está proyectando para fabricar un producto físico

Este es el caso, por ejemplo, de una central termoeléctrica que vá a generar energía a partir de carbón y agua. O de una planta de pulpa química de celulosa a partir de madera y de productos químicos. O una hilandería de hilazas de algodón. Puede también tratarse de un proyecto que vá a producir dos o más productos complementarios a partir de un cierto "paquete" de materias primas o insumos. Este es el caso, por ejemplo, de una planta electrolítica para soda cáustica, hidrógeno y cloro a partir de sal común y agua. Muchos mas ejemplos podrían darse de proyectos industriales, algunos ya existentes en Colombia, y otros que aún no existen pero que vendrán en el futuro. En todas estas situaciones puede hablarse de un consumo cuantitativo de todas y cada una de las materias primas que es proporcional a la producción de uno de los productos (si son varios y son complementarios).

3 PRODUCTOS E INSUMOS

Consideremos que E vá a producir tres productos complementarios. Sus respectivas producciones durante el lapso (t, dt) serán

$P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$,

y por la definición de "productos complementatarios" se sabe que los cuocientes

$$\frac{P_2(t)}{P_1(t)} = a, \quad \frac{P_3(t)}{P_1(t)} = b$$

son constantes en todo momento, independientemente de t. Con cada unidad física de producto número 1 se producen también a unidades físicas del número 2, y b unidades físicas del número 3. Esto permite tomar como referencia al producto número 1, y definir como "unidad múltiple de producción" al "paquete" formado por una unidad física del primero, más a unidades del segundo, mas b unidades físicas del tercero. Si sólo se trata de un producto, tendremos $a = 0, b = 0$. Si se trata de dos tendremos $b = 0$. Si se trata de más de tres (que sean complementarios), nuestro método sigue siendo válido y solamente vá a requerir una notación o nomenclatura más prolija.

La planta E vá a requerir -supongamos- tres insumos distintos. Durante el lapso (t, dt) las cantidades de esos insumos son

$S_1(t).dt \quad , \quad S_2(t).dt \quad , \quad S_3(t).dt$

Por consideraciones tecnológicas se sabe que, en nuestro caso, se tiene que los cuocientes (que se llaman coeficientes de insumo/producto) son muy aproximadamente constantes:

$$\frac{S_1(t).dt}{P_1(t).dt} = c_1 \quad , \quad \frac{S_2(t).dt}{P_1(t).dt} = c_2 \quad , \quad \frac{S_2(t).dt}{P_1(t).dt} = c_3$$

son constantes con respecto al tiempo y con respecto a las cantidades de producción. En el caso de un proyecto con más de tres insumos, basta alargar la enumeración de la ♮S-es" y de las ♮c-es".

Sean los precios en moneda dura por unidad física de los respectivos tres productos; y sean los precios por unidad física de los respectivos tres insumos. Los consideraremos invariables en el tiempo por varias razones:

- porque hacer pronósticos sobre variaciones de precios en el largo plazo usualmente no es posible sin grandes riesgos de error.
- porque si se consideran precios variables en el tiempo, eso complicaría la nomenclatura del método, sin beneficio y sin necesidad
- porque en el mundo real de la industria se trabaja con precios constantes en estos casos.
- porque, si en algún caso, por excepción, se trabajase con precios variables en el tiempo, este método sigue siendo válido a condición de hacerle los ajustes que serían obvios.
- porque trabajamos en moneda dura y descartamos asíla inflación.

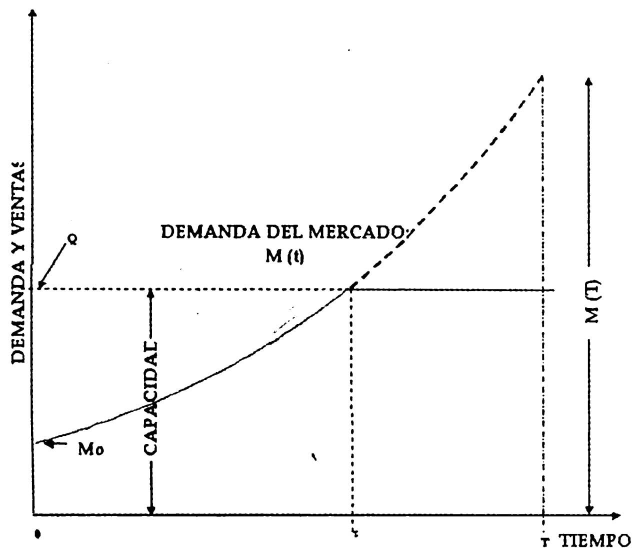

Figura 2. Relación entre la demanda en el mercado y la capacidad

Al producir una unidad física del producto número 1, más las a unidades del número 2, mas las b unidades del numero 3, su valor económico es

$p_1 + a.p_2 + b.p_3$

y el valor de los insumos consumidos es, para cada unidad física del producto número 1,

$c_1.q_1 + c_2.q_2 + c_3.q_3$

Por definición, el valor agregado en tal proceso vale

$v = p_1 + a.p_2 + b.p_3 - c_1.q_1 - c_2.q_2 - c_3.q_3$

El valor agregado por la planta E durante un lapso futuro (t, dt) vá a ser

$P_1(t).v.dt$

Denotemos también los siguientes conceptos:

K: costo de inversión en los activos físicos depreciables de E, expresado en moneda dura.

d: coeficiente de depreciación de estos activos, en el tiempo.

L : número de operarios y técnicos necesarios para E, en producción.

s :nivel de salario por persona promedio y por día civil promedio, en dólares por persona-día.

E : extensión de tierra que necesite el proyecto, en metros cuadrados, hectáreas, etc.

l : canon de arrendamiento de la tierra, en dólares por hectárea y por mes (o por metro cuadrado y por año, etcétera) (l = letra "ele").

6 COSTOS, VENTAS Y UTILIDADES

Escribimos así para un lapso futuro:

(t, dt)

Valor agregado:

$V(t) \cdot dt = P_1(t) \cdot v \cdot dt$

Depreciación del capital K invertido:

$K \cdot d \cdot dt$

Costo de personal:

$L \cdot s \cdot dt$

Costo de ocupación de la tierra:

$E \cdot l \cdot dt$

Otros gastos, independientes del nivel de producción y del tiempo, llamados industrialmente "gastos fijos":

$G \cdot dt$

Utilidad industrial que produzca E:

$U(t) \cdot dt$, siendo

$U(t) = V(t) - d \cdot K - L \cdot s - E \cdot l - G$

y que se expresa en dólares por día, por mes, etc. En proyectos industriales que son muy intensivos en capital (maquinaria) y poco intensivos en mano de obra, el término $L \cdot s$ es usualmente constante en el tiempo y, además, numéricamente es bastante menor que $d \cdot K$. Lo reunimos con G:

$$G + L \cdot s + E \cdot l = H,$$

y ponemos

$$U(t) = V(t) - d \cdot K - H.$$

Todo proyecto de producción industrial se hace para que dure varios años. Por lo menos, para que dure el número de años necesario para depreciarlo contablemente en la totalidad de su valor. En Colombia esto significa 10 años. Pongamos, en general, que la vida útil que se exige de E es un período de varios años que llamaremos T, y que, evidentemente, todo inversionista exige que sea igual o mayor que el tiempo de depreciación. Si hay alguna razón para esperar que la vida útil sea corta, el proyecto no se hace.

La capacidad de E se denotará con Q, y se expresa en términos de unidades físicas del producto de referencia (el producto número 1, que dijimos) que la planta puede producir, trabajando normalmente, durante un año (o un día, etc.) más los productos complementarios correspondientes (los productos números 2 y 3 que dijimos arriba). Se expresa, pues, en toneladas/día, o en litros/segundo, o en megavatios. En algunos casos la capacidad Q se expresa en otra forma. Por ejemplo: en unidades de un insumo de referencia, por mes, o algo así.

Es obvio que el proyecto no se contemplaría si la demanda que se vá a atender se presentara declinando hacia el futuro. Así pues, es preciso realizar las necesarias mediciones de la demanda en el mercado que se quiere atender hoy, y sus previsiones de crecimiento hacia el futuro. La planta debe nacer holgada porque si nó, se pierden mercados futuros. Pero no debe pretender alcanzar a atender la demanda grande al final de su vida útil, es decir, en $t = T$. Si asíse hiciera, trabajaría siempre con capacidad sobrante y ello sería obviamente antieconómico. En la figura 2 se muestra cómo debe ser la relación entre la demanda en el mercado y la capacidad que se le dé a E. En todo momento, la producción será igual a $M(t)$; pero cuando E queda copada, la producción será.

$$P_1(t) = Q$$

Sea $M(t)$ la demanda diaria (o mensual) que vamos a atender, en la fecha t. Por lo que ya dijimos, la capacidad Q deberá ser

$$M_0 < Q < M(t)$$

Asíse muestra en la figura 2. La planta trabaja holgada desde $t = 0$ hasta $t = \tau$. Y trabajará copada ($M(t) > C; P_1(t) = Q$) desde $t = \tau$ hasta $t = T$.

7 RENTABILIDAD DEL PROYECTO

El valor presente, descontado, de las utilidades que vá a generar E durante su vida útil es (como bien se sabe)

$$\int_0^T U(t) \cdot \varrho^{-\gamma t} dt$$

en donde γ es el costo de oportunidad del dinero a largo plazo.

Y la rentabilidad relativa anual es

$$R(Q) = \frac{\int_0^T U(t) \cdot \varrho^{-\gamma t} dt}{K \cdot T} (1 - x) \qquad (2)$$

siendo x la tasa de gravamen del impuesto a la renta.

Separamos el integral definido en dos partes: una, cuando $t < \tau$, con planta E holgada; otra, cuando $\tau < t < T$, con planta copada. Luego

$$R(Q) = \frac{\int_0^\tau U(t) \cdot \varrho^{-\gamma t} \cdot dt + U(Q) \int_\tau^T \varrho^{-\gamma t} \cdot dt}{AQ^\alpha T} (1 - x)$$

Al numerador de la expresión anterior lo llamaremos $N(C)$. Y al denominador lo llamaremos

$$A \cdot T \cdot D(Q) = A \cdot T \cdot Q^\alpha$$

en donde hemos puesto $D(Q) = Q^\alpha$

Luego la rentabilidad relativa anual se escribe

$$R(Q) = \frac{(1 - x)}{A \cdot T} \frac{N(Q)}{D(Q)}$$

La capacidad óptima económica será, por definición la que le dé a $R(Q)$ el máximo valor posible entre las distintas opciones posibles de Q.

8 LAS DOS CONDICIONES DEL ÓPTIMO

La primera condición del óptimo es que

$R'(Q) = 0$

o sea que

$N(Q) \cdot D'(Q) = N'(Q) \cdot D(Q)$

en donde $D'(Q) = \alpha Q^{\alpha-1}$

Para derivar el numerador $N(Q)$ recordemos la fórmula de Leibniz:

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \varphi(\lambda \cdot x) \cdot dx = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\lambda, x)\, dx$$

$$+\varphi(\lambda \cdot b)\frac{db}{d\lambda} - \varphi(\lambda \cdot x)\frac{da}{d\lambda}$$

Asíse calcula $N'(Q)$, y la condición $R'(Q) = 0$ resulta ser

$$\alpha \int_0^{\tau(Q)} U(t)\, \varrho^{-\gamma t} dt = \left(\frac{dU(\tau)}{dQ}\right)\left(\frac{1}{\gamma}\right)\left(\varrho^{-\gamma\tau(Q)} - \varrho^{-\gamma t}\right)$$

Pero, en todo momento se tiene

$U(t) = P_1(t) - d \cdot AQ^{\alpha} - H$

Además la producción a lo largo del tiempo está dada por la función:

$$P(t) = \begin{cases} M(t) \text{ cuando } & 0 < t < \tau \\ Q \text{ cuando } & \tau < t < \tau \end{cases}$$

La planta se copa en el momento $t = \tau$, que es cuando

$M(\tau) = Q,$

o sea cuando

$\tau = M^{-1}(Q),$

en donde M^{-1} es la función inversa de M.

En resumen, la condición $dR/dQ = 0$ significa que

$$\alpha \int_0^{\tau(Q)} [v \cdot M(t) - d \cdot A \cdot C^{\alpha} - H]\, \varrho^{-\gamma t} dt$$

$$= \left[v - \alpha a d Q^{\alpha-1}\right]\left(\frac{1}{\gamma}\right)\left(\varrho^{-\gamma\tau} - \varrho^{\gamma T}\right) \qquad (3)$$

Una situación frecuente es cuando se proyecta que hacia el futuro, la demanda en el mercado vá a crecer en un cierto porcentaje determinado, año por año. Esto quiere decir que

$M(t) = M_0 \cdot \varrho^{kt}$

en donde $M_0 = M(0)$ en la demanda que la planta E vá a comenzar a atender en el momento de arrancar, o sea en el momento $t = 0$, y la planta se copa en el momento t cuando

$M_0 \varrho^{k\tau} = Q$

o sea cuando

$$\tau = \left(\frac{1}{k}\right) \ln\left(\frac{Q}{M_0}\right).$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones de más arriba, y después de un cálculo prolijo, se encuentra que la primera condición del óptimo, con mercado que crecerá a tasa porcentual constante (k), es la condición de que

$$\left(\frac{(\alpha v M_0)}{(k-\gamma)}\right)\left[\left(\frac{Q}{M_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{k}} - 1\right]$$

$$* \left[dAQ^{\alpha} + H\right]\left[1 - \left(\frac{M_0}{Q}\right)^{\frac{\gamma}{k}}\right]$$

$$= \left[v - \alpha A d Q^{\alpha-1}\right]\left(\frac{1}{\gamma}\right)\left[\left(\frac{M_0}{Q}\right)^{\frac{\gamma}{k}} - \varrho^{-\gamma T}\right]$$

Esta ecuación se resuelve por métodos numéricos, usando un "paquete" de software para computador, para encontrar a Q. A la solución que le hallemos la llamaremos $Q = Q^*$.

La segunda condición del óptimo Q es que

$R''(Q^*) < 0,$

o sea que (derivando dos veces la función $R(Q)$):

$sgn\,[D(Q)\,N''(Q) - N(Q)\,D''(Q)] = -1$

Calculamos $N''(Q)$ y $D''(Q)$, sustituimos y encontramos que

$$sgn\,[R''(Q)]$$

$$= sgn\left(AdQ^{\alpha}\int_{\tau}^{T} \varrho^{-\gamma t} dt - \int_0^T U(t) \cdot \varrho^{-\gamma t} dt\right)$$

Interpretemos las dos integrales del lado derecho. La primera es

$$\int_{\tau}^{T} dK \varrho^{-\gamma t} dt$$

y significa el valor presente, en el momento $t = 0$, de las depreciaciones que se le carguen a la planta en los años futuros cuando ya trabaje copada.

La segunda integral es

$$\int_0^T U(t)\, \varrho^{\gamma t} dt$$

y significa el valor presente de las utilidades que genere la planta durante toda su vida útil. Es evidente que este último integral tiene que ser muy superior al primero. Por lo tanto se deduce que

$sgn\,[R''(Q^*)] = -1,$

y por lo tanto que la solución Q^* síle dá su valor máximo a la rentabilidad $R(Q)$. Esta es la capacidad óptima económica que debemos elegir para el proyecto de planta E.

Adoptando para E la capacidad óptima Q^*, la planta E vá a durar trabajando sin coparse durante el tiempo

$$\tau^* = \left(\frac{1}{k}\right) \ln\left(\frac{Q^*}{M_0}\right).$$

Su rentabilidad futura, en valor presente descontado, durante su vida útil T será la más alta posible

$$R^* = R(Q^*) \quad (4)$$

$$= \frac{\int_0^{\tau^*} U(t)\, \varrho^{\gamma t} dt + U(Q^*) \int_{\tau^*}^{T} \varrho^{-\gamma t} dt}{AQ^* T} (1-x) \quad (5)$$

Se sabe, por consideraciones prácticas y financieras, que esta rentabilidad que se espera de E, debe ser muy superior al costo de oportunidad del dinero a largo plazo, o sea R^* debe ser

$$R^* \gg \gamma$$

además de otras condiciones de factibilidad que son de tipo financiero.

9 OTRO CRITERIO DE RENTABILIDAD

Se denomina tasa interna de retorno del proyecto, a la cual designamos con z a una tasa de descuento tal que los desembolsos, descontados en $t = 0$, sean compensados por los ingresos futuros de dinero, ignorando la depreciación. Es decir, que z es, por definición, la raíz de la ecuación

$$AQ^\alpha - \int_0^{\tau(Q)} [vM(t) - H]\, \varrho^{-zt} dt$$

$$+ \int_{\tau(Q)}^{T} [vQ - H]\, \varrho^{-\gamma t} dt = 0$$

Llamamos al lado izquierdo de esta ecuación con la función $J(Q)$. Por lo tanto el valor de Q que hace óptima la tasa interna de retorno es

$$\frac{dJ}{dQ} \equiv \left(\frac{\partial J/\partial Q}{\partial J/\partial z}\right) = 0,$$

en donde

$$\frac{\partial J}{\partial Q} = \left(\frac{\partial J}{\partial Q}\right)_\tau + \left(\frac{\partial J}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial \tau}{\partial Q}\right).$$

La ecuación que asíresulta es más compleja pero puede también resolverse con el computador.

10 PROBLEMA RESUELTO

Se pretende construir una planta para producir anhídrido ftálico a partir de ortoxileno por oxidación con aire. La reacción química es

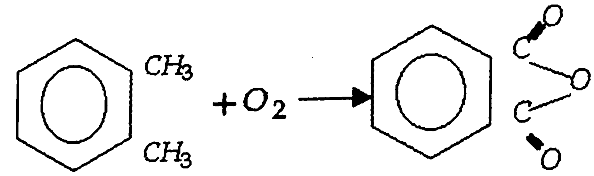

Figura 3. Anhídrido ftálico a partir de ortoxileno.

o sea

$$C_8H_{10} + 3O_2 \rightarrow C_8H_4O_3 + 3H_2O$$

si la reacción fuera 100% eficiente

El esquema de la planta y su proceso es el siguiente:

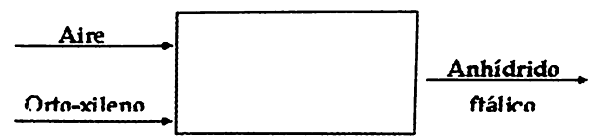

Figura 4. Planta para producir anhídrido ftálico a partir de ortoxileno.

El precio de ortoxileno es de 200 dólares por tonelada y el del anhídrido es de 3000 dólares por tonelada.

La planta comenzará atendiendo una demanda segura de 10 000 ton. de producto en el primer año, y ésta seguirá creciendo al 7% anual, acumulativo. Hay tres ofertas para suministrar la planta con el correspondiente "*know-how*" básico y de detalle, las que llamamos $T1, T2, T3$. El monto de la inversión para comprar la planta en las tres alternativas obedece a la conocida ley de Williams

$$K_j = A_j Q^{\alpha_j}$$

y los datos numéricos son:

$$\begin{array}{llll} Para\ T_1: & A_1 = 60000\ dolls & \alpha_1 = 0.65 & \varepsilon_1 = 0.95 \\ Para\ T_1: & A_2 = 58000\ dolls & \alpha_2 = 0.65 & \varepsilon_2 = 0.92 \\ Para\ T_1: & A_3 = 62000\ dolls & \alpha_3 = 0.65 & \varepsilon_3 = 0.97 \end{array}$$

en donde ε_j es la eficiencia de la reacción con tecnología T_j.

El horizonte de tiempo en que proyecta operar la planta se escoge igual al tiempo de depreciación, que es de 10 *años* $(\alpha = año^{-1})$. El costo de oportunidad del capital, en el largo plazo es $\gamma = 15\%$ por año, en dólares constantes; y el tipo de interés bancario a corto y mediano plazo es $i = 20\%$ *por año*, en dólares constantes.

Se trata de escoger el tamaño óptimo de la planta y la tecnología óptima, desde el punto de vista económico.

Escojamos las siguientes denominaciones algebraicas.

t : Un momento en la vida de la planta, contando desde el inicio de la producción

$P(t)$:Producción por año de la planta en la fecha t.

b :Tasa acumulativa de crecimiento de la demanda que se atiende, antes de llegar a copar la capacidad de la planta anual($b = 7\%$ $anual = 0.07$ $año^{-1}$).

Q :Capacidad de la planta que se elija, expresada en toneladas anuales de anhídrido que puede producir, a lo máximo.

h :Duración de tiempo en que la planta trabajará sin coparse (con alguna holgura de producción).

D :Capital de trabajo de la empresa = 2'000.000 dólares.

Ek :2 millones de dólares = costo de inversión en la tierra para la planta.

E :Extensión de tierra necesaria para la planta, que se compra al precio k (por hectárea).

i :Tasa de interés comercial que cobran los bancos por créditos a corto plazo.

r :Costo de oportunidad del dinero, a largo plazo.

$K_j(Q) \cdot d$:Depreciación de la planta, por año, con tecnología T_j.

d :Factor de depreciación anual del valor de los activos fijos depreciables.

p :Precio del anhídrido = 1000 dólares/tonelada.

q :Precio del ortoxileno = 200 dólares/tonelada.

G :Gastos generales por año = 1 millón de dólares por año.

Ls :Costo de mano de obra en producción, por año = 250.000 dólares/año.

L :Número de trabajadores que ocupe la fábrica, con salario anual promedio s cada trabajador.

$S(t)$:Consumo de ortoxileno por año, en fecha. De acuerdo con la estequiometría de la reacción es

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{106}{148\varepsilon} P(t) = 07162 \frac{Y(t)}{E} \\ &= \lambda \frac{Y(t)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

dado que 106 es el peso molecular del ortoxileno y 148 es el del anhídrido, y siendo la eficiencia de reacción,.entonces:

-Valor agregado por año:

$$V(t) = P(t) \cdot p - S(t) \cdot q$$

$$V(t) = P(t) \left(p - \lambda \cdot \frac{q}{\varepsilon}\right)$$

-Utilidad por año

$$\begin{aligned} U(t) &= V(t) - d \cdot K - D \cdot i - L \cdot s - G \\ &= P(t) \left(p - \lambda \cdot \frac{q}{\varepsilon}\right) - dk - (Di - Ls - G) \end{aligned}$$

Inversión de capital en la empresa:

$$\Pi = K + Z + Ek$$

Rentabilidad por año

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{V(t) - dK - Di - Ls - G}{K + Z + Ek} \\ &= \frac{U(t)}{\Pi} = \frac{V(t) - d \cdot AQ^{\alpha} - W}{\Pi} \end{aligned}$$

en donde hemos abreviado y hemos escrito $D \cdot i + L \cdot s + G = W = (250000 + 1000000)$ $dols/año$ $=$ 1250000 $dols/año$, porque el capital de trabajo es aportado, a riesgo, por el dueño del proyecto y por eso no se pagan intereses por capital de trabajo ($i = 0$, en nuestro caso).

La rentabilidad respecto a la inversión, por año promedio de la vida T que se proyecta para la planta, descontada en valor presente, es

$$\overline{R} = \frac{\int_0^T \varrho^{-\gamma t} \cdot U(t) \cdot dt}{\Pi \cdot T}$$

Pero la función $P(t)$ está descrita por dos tramos

$$P(t) = \begin{cases} P_0 . \varrho^{bt} & : 0 < t < h \\ Q & : h < t < T \end{cases}$$

El momento $t = h$ cuando la capacidad de la planta llega a coparse está definido por la condición

$$P_0 . \varrho^{bt} = Q$$

o sea

$$h = \frac{1}{b} ln \left(\frac{Q}{Y_0}\right)$$

entonces

$$\int_0^t P(t) \cdot \varrho^{-\gamma t} \cdot dt$$

$$= \int_0^h P_0 \cdot \varrho^{-(\gamma - b)t} \cdot dt + \int_h^T Q \cdot \varrho^{-\gamma t} \cdot dt$$

Para comparar las diferentes alternativas tecnológicas entre ellas vamos a construir una función que expresa el flujo neto de caja, descontando en el instante inicial, al arrancar la planta, y antes de reembolsarnos el valor invertido en ella (mediante la reserva para depreciación $D(t) = d \cdot K$). Dicho valor está expresado por la función

$$\begin{aligned} F(Q) &= -[K(Q) + I] - \int_0^T \varrho^{-\gamma t} \cdot W \cdot dt \\ &\quad + \int_0^{h(Q)} v \varrho^{-\gamma t} Y_0 \varrho^{bk} \cdot dt \\ &\quad + \int_{h(Q)}^T v \varrho^{-\gamma t} Q \cdot dt. \end{aligned}$$

cuyos símbolos significan*:

* En este ejercicio usamos como criterio de evaluación económica y de optimización el flujo neto de caja proyectado y descontado por tres razones: (1) porque este criterio también

$F(Q)$: Flujo neto de caja, proyectado, descontado a la tasa γ, continua y compuesta, igual al costo de oportunidad del dinero, a largo plazo, expresado en moneda dura (por ejemplo en dólares constantes, como convenimos de aquíen adelante).

Q : Capacidad de producción de la planta que se escoja, que se expresa en toneladas/año de anhídrido ftálico.

$K(Q)$: Valor de compra de equipos e instalaciones de la planta de capacidad Q, expresado en dólares constantes.

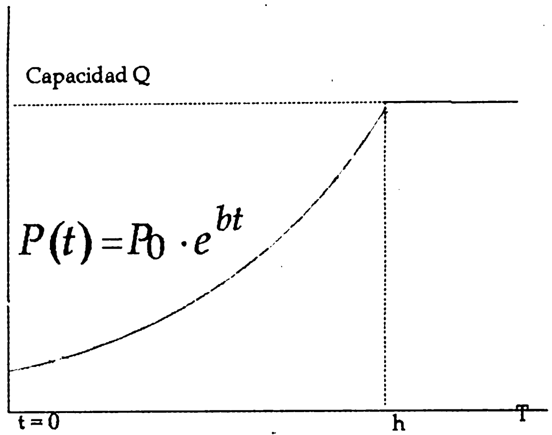

Figura 5. Producción anual de la planta, hasta copar su capacidad Q.

$I = D + E \cdot k$: Inversión inicial en capital de trabajo, más el valor de la tierra para la planta = 4´000.000 dólares.porque

D : Capital de trabajo, que suponemos constante en el tiempo, e independiente de Q, que vale 2´000.000 dólares. Es aportado por el dueño del mismo proyecto

E : Extensión de tierra que se compra para la planta = 1 hectárea = 10.000 metros cuadrados.

k : 200 dólares metro cuadrado: precio de compra de la tierra.

T : Horizonte de tiempo que se contempla para la planta, en su trabajo y para su depreciación ($T = 10$ años, en este caso).

$P(t)$: Producción anual de la planta, en fecha t $(0 < t < T)$, que se expresa en toneladas por año.Producción de la planta al momento de iniciar, en

V : Valor agregado por tonelada de producto, en la fabricación.

$P_0 = P(0)$: Producción de la planta al momento de iniciar, en $t = 0$.

b : Tasa acumulativa y continua de crecimiento de la demanda que la planta va a atender, antes de copar su capacidad Q.

$P_0 \varrho^{bt}$: Producción anual de la planta, antes de coparse, en fecha t.

$U(t) = v \cdot P(t) - d \cdot K(Q) - W$: Utilidad anual en la planta, después de imputar la depreciación.

$W = D \cdot i + L \cdot s + G$: Costos del proceso no dependientes de t ni de Q

i : Tasa de interés del crédito que tomamos en bancos para capital de trabajo = 20% anual, en dólares constantes. Es nuestro caso consideremos que el inversionista aporta el capital de trabajo de su propio peculio, es decir que $i = 0$.

L : Número de personas que se ocupen en producción.

s : Salarios más otros costos laborales, por persona y por mes promedio.

$L \cdot s$: 250.000 dólares/año.

G : Gastos de administración y generales = 1´000.000 dólares/año, luego

W : 1´250.000 dólares/año.

$h(Q)$: Duración del tiempo que trabaje la planta antes de coparse. Se calcula así:

$$P_0 = \varrho^{bk} = Q$$

luego

$$h = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{Q}{Y_0}\right) \ \ y \ por \ eso \ \frac{dh}{dQ} = \frac{1}{(bQ)}.$$

En cualquiera de las tres tecnologías, el tamaño de planta, Q, que haga máxima la función $F(Q)$, exige que

$$\frac{dF}{dQ} = 0$$

derivando a $F(Q)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dQ} &= -\left(\frac{dK}{dQ}\right)\left[1 + d\int_0^T \varrho^{-\gamma t} dt\right] \\ &+ v \cdot \varrho^{-\gamma h} \cdot Q \cdot \frac{v}{bQ} \\ &+ v \int_{h(Q)}^{T} \varrho^{-\gamma t} dt - v \frac{\varrho^{-\gamma h}}{b}, \end{aligned}$$

en donde hemos usado la fórmula de Leibniz para derivar integrales definidos respecto a sus límites:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \phi(x,\lambda)\, dx\right)$$

$$= \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{d\phi(x,\lambda)}{d\lambda} dx + \phi(b(\lambda),\lambda)\frac{db}{d\lambda}$$

$$-\phi(a(\lambda),\lambda)\frac{da}{d\lambda}$$

es muy usado para este fin; (2) Porque es que prefieren los banqueros, mas que el de la rentebilidad promedio; (3) Como ejercicio didáctico. La definición de flujo neto de caja, proyectado, y descontado se encuentra en cualquier texto de evaluación de proyectos, como el de Varela (ver biblliografía) y simplificando algunos términos se encuentra

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dQ} &= \alpha A Q^{\alpha-1}\left(1+\frac{d}{\gamma}\left(1+\varrho^{\gamma t}\right)\right) \\ &\quad +\varrho^{-\gamma h}Q\left(\frac{v}{bQ}\right)+\frac{v}{\gamma}\left(\varrho^{-\gamma h}-\varrho^{-\gamma t}\right) \\ &\quad -\frac{v}{b}\varrho^{-\gamma h} \\ &= \beta Q^{\alpha-1}-\frac{v}{\gamma}Q^{\frac{\gamma}{b}}P_0^{\frac{\gamma}{b}}-\frac{v}{\gamma}\varrho^{\gamma T},\end{aligned}$$

en donde

$$\beta=\alpha A\left(1+\frac{d}{\gamma}\left(1-\varrho^{-\gamma t}\right)\right).$$

Los datos del problema y los otros parámetros que hemos formado tienen los siguientes valores numéricos en las tres tecnologías que se nos ofrecen

datosy parametros	T_1	T_2	T_3
ψ_j	60000	52000	68000
α_j	0.65	0.67	0.60
ε_j	0.95	0.92	0.97
β_j	39000	38860	37200
v_j	2849.26	2844.30	2852.33
$\frac{v_j}{\gamma}$	18995.07	18962.0	18015.53

en donde $\psi_j = A_j\left(EnK_j = A_jQ^{\alpha_j}\right)$.

Entonces, para las tres tecnologías, la condición de óptimo se escribe:
para:

$$T_1:\left(\begin{array}{c}-39000\cdot Q^{-0.35}\\ +982710*10^6\cdot Q^{-2.14284}-1263\end{array}\right)=0$$

$$T_2:\left(\begin{array}{c}-38860\cdot Q^{-0.33}\\ +976862*10^6\cdot Q^{-2.14284}-1256\end{array}\right)=0$$

$$T_3:\left(\begin{array}{c}-37200\cdot Q^{-0.40}\\ +986157*10^6Q^{-2.14284}-1267\end{array}\right)=0$$

En un computador personal, y usando el programa Math-cad, se encuentra:

$Q_1 =$ 9669 *tons / año*
$Q_2 =$ 9149 *tons / año*
$Q_3 =$ 10970 *tons / año*

Los costos de las respectivas plantas se calculan con la fórmula de Williams, y resultan ser:

$K_1 = 60000 * 9669^{0.65} = 23'370000$ *dols*
$K_2 = 58000 * 9149^{0.67} = 26'150000$ *dols*
$K_3 = 62000 * 10970^{060} = 16'460000$ *dols*

Obsérvese que la segunda derivada de F respecto a Q es

$$\frac{d^2F}{dQ^2}=-\beta\left(\alpha-1\right)Q^{\alpha-2}-\frac{v}{b}P_0^{\frac{\gamma}{b}}Q^{\frac{-\gamma}{b-1}}<0,$$

cuya expresión es negativa para todo valor positivo de Q. Por lo tanto los valores hallados para Q corresponden al máximo de $F\left(Q\right)$.

Sustituyendo los valores numéricos de Q y de los parámetros respectivos en la función de $F\left(Q\right)$ que definimos más arriba, encontramos que los máximos flujos de fondos para las tres tecnologías son

$F_1 =$ 258'300000 *dols*
$F_2 =$ 78'940000 *dols*
$F_3 =$ 101'300000 *dols*

calculando para 10 años de trabajo, descontando a 15% anual y sin pensar en la depreciación de la planta.

En conclusión: la mejor tecnología es T_1. Antes de reembolsarnos el valor invertido en la planta (K_1 = 23´370.000 dólares), deja 258´300.000 dólares, que corresponden a una rentabilidad promedio sobre la inversión que puede esperarse de:

$$\begin{aligned}&F\left(K+D+E\cdot k\right)\\ =\;&\frac{358'300000}{\left(21'450000+2*2'000000\right)*10\ \textit{años}*\textit{dols}}\end{aligned}$$

antes del impuesto a la renta.

11 RESUMEN Y CONCLUSIONES

- El tamaño o capacidad que se le dé a una planta industrial, cuando se construya, determinará en gran medida su rentabilidad. Usualmente esa incidencia depende del principio de las economías de escala y del comportamiento del mercado del producto que se trata de fabricar.
- El costo de capital de una planta (para un producto dado, o para un servicio dado) es tanto mayor cuanto mayor sea la planta. En el caso de un gran número de tipos de planta, el costo depende del tamaño según una relación empírica cuantitativa que se llama "ley de Williams" (Fórmula 1).
- La rentabilidad previsible de una inversión como ésta está dada por la Fórmula 2 que ningún libro presenta ni deduce.
- Dada la ley de Williams, el tamaño óptimo de una planta en proyecto está definido por la ecuación 3, de manera bastante general. En el caso particular (pero que es muy frecuente) de que la producción vaya a crecer con tasa anual constante, dicha ecuación adopta la forma 4. Estas ecuaciones, en la práctica, tienen una raíz única que el óptimo que buscamos.
- La mejor rentabilidad que puede esperarse de un proyecto del mismo producto, en las mismas condiciones, está expresada por la ecuación 5.
- Este método es original del autor. No está presentado en ningún libro. El autor lo ha aplicado en numerosos casos reales de plantas industriales nuevas en Colombia y en otros países.
- Los textos que se presentan en las referencias (y muchos otros que se exploraron) tratan el tema de la evaluación de plantas industriales, ex-ante. Pero ninguno trata el sub-tema del tamaño del proyecto.

REFERENCIAS

Blanck, L. T. y A. J Tarquin, *Ingeniería Económica. Mc Graw-Hill.* Méjico, Bogota, etc. 546 pags. 1989.

Maynard, H.B. (compilador) y C. A José (traductor).*Manual de Ingeniería de la Producción Industrial* Méjico. Editorial Reverté. 8 secciones con paginación variable, 1960.

Varle V., *Evaluación Económica de Inversiones* Cali, Grupo Editorial Norma. 512 pags. 1989.

Vilbrandt, F. C. y C. E Dryden, *Chemical Engineering Plant Desing.* New York. Mc Graw-Hill Book Company, Inc.. 575 págs. 1960.