

ANÁLISIS NO LINEAL ELÁSTICO A GRANDES DEFLEXIONES DE UNA VIGA-COLUMNA CON CONEXIONES SEMI-RÍGIDAS

JOSÉ DARÍO ARISTIZÁBAL OCHOA

Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia

RESUMEN. Se presenta de manera simplificada el análisis no-lineal elástico de una viga-columna esbelta sometida a grandes deflexiones y pequeñas deformaciones unitarias, con sección transversal simétrica, y con conexiones semi-rígidas cargada sólo en los extremos, incluyendo los efectos de las excentricidades de las cargas axiales y la falta de aplomo vertical inicial. Las funciones clásicas de estabilidad desarrolladas por Timoshenko son utilizadas en el método propuesto, el cual aunque aproximado, puede ser utilizado en el análisis no-lineal geométrico y de estabilidad a pequeñas deformaciones unitarias elásticas de una viga-columna con conexiones rígidas, semi-rígidas y simples. El método propuesto, el cual consta de una ecuación no-lineal relativamente sencilla, puede ser utilizado también en el análisis inelástico geométrico de columnas sometida a pequeñas deformaciones unitarias cuyas conexiones sufren de degradación a flexión, o que por lo contrario, de rigidización. Las cargas resultantes obtenidas por el método propuesto están dentro del 1,5% de los valores teóricos "exactos" hasta deflexiones transversales muy grandes (alrededor de 0.80 de la luz de la viga-columna, cuando los cambios en la longitud de su cuerda son tenidos en cuenta; ó 0.30 de la luz de la viga-columna, cuando la longitud de su cuerda se supone que permanece constante). La validez y efectividad del método y de las ecuaciones propuestas son corroboradas con soluciones elásticas disponibles de vigas-columnas a grandes deflexiones y a pequeñas deformaciones unitarias, incluyendo la solución del problema clásico de la "Elástica".

PALABRAS CLAVES. Vigas; columnas; grandes deflexiones; análisis $P\Delta$; análisis no-lineal; conexiones semi-rígidas; estabilidad; análisis estructural.

ABSTRACT. The nonlinear large deflection-small strain analysis of a slender beam-column of symmetrical cross section with semi-rigid connections under end loads including the effects of axial load eccentricities and out-of-plumbness is developed in a simplified manner. The classical (Timoshenko's) stability functions are utilized in the proposed method which, although approximate, can be used in the stability and nonlinear large deflection-small strain elastic analyses of beam-columns with rigid, semi-rigid, and simple connections. The proposed method consisting of a single nonlinear equation can also be utilized in the large deflection-small strain inelastic analysis of beam-columns whose connections suffer from flexural degradation or, on the contrary, flexural stiffening. Load results from the proposed method are within 1.5% of the theoretical values up to very large transverse displacements (0.80 times the member span when the changes in the member cord length are taken into account, or 0.30 times the member span when its cord length is assumed to remain constant). The validity and effectiveness of the proposed method and equations are verified against available solutions of large deflection-small strain elastic analysis of beam-columns, including the solution of the classic problem of the "Elastic".

KEY WORDS. Beams; beam-columns; large deflections; $P\Delta$ analysis; nonlinear analysis; semi-rigid connections; stability; structural analysis.

1. INTRODUCCIÓN

Con los adelantos en la ciencia y tecnología de materiales compuestos con grandes capacidades elásticas (resiliencia y resistencia última), y la necesidad de estructuras con miembros estructurales de grandes luces, livianos y esbeltos, se ha creado un gran interés por el análisis a grandes deflexiones de estructuras de alta flexibilidad y resiliencia. Por ejemplo, miembros hechos de materiales de polímeros livianos pueden sufrir deflexiones laterales extremadamente grandes con pequeñas deformaciones unitarias sin exceder sus

límites elásticos. Esta tendencia ha influenciado aun los códigos de construcción actuales que rigen las estructuras hechas de materiales tradicionales de construcción como el acero, aluminio, concreto (reforzado y pretensado), y la madera.

En miembros esbeltos con deflexiones transversales a lo largo de sus luces (i.e., los efectos $P\Delta$), la deriva entre sus extremos (i.e., los efectos $P\Delta$), y los efectos de los momentos debidos a flexión en la rigidez axial (i.e., el efecto "arco") causan comportamientos no-lineales geométricos con momentos flectores, rotaciones, desplazamientos y deformaciones adicionales. Estos tres

efectos geométricos no-lineales alteran por completo la respuesta elástica. La respuesta pre y post-pandeo a pequeñas deformaciones unitarias de vigas-columnas ha llegado a ser de gran interés en el análisis estructural, especialmente si los miembros son esbeltos. En una estructura de marcos o aporticada, por ejemplo, los efectos $P\Delta$ pueden conducir al pandeo de uno de los miembros individualmente (o al colapso local). Los efectos $P\Delta$ pueden llevar a una inestabilidad estructural global (o al colapso de un piso); la reducción en la rigidez axial de un miembro puede llevar al fenómeno denominado en la literatura técnica como "snap-through" en los miembros sometidos inicialmente a compresión (Smith-Pardo y Aristizabal-Ochoa, 1999). Estos tres efectos geométricos no-lineales dependen no solo de la capacidad del material para deformarse elásticamente y de la geometría de la estructura, sino también del arriostramiento lateral, de las condiciones de apoyo y de la intensidad de las cargas axiales aplicadas externamente o inducidas en los miembros de la estructura.

1.1 Métodos de análisis.

El comportamiento elástico no-lineal geométrico de una viga-columna puede ser investigado utilizando la expresión exacta de la curvatura en la ecuación diferencial de la deflexión (i.e., el método de la "Elástica" descrito por *Timoshenko y Gere*, 1961 págs. 76-82), o por un análisis aproximado de segundo orden, tal como el método matricial por elementos finitos (MEF) a grandes deflexiones con o sin grandes deformaciones unitarias (*Torkamani et al.*, 1997). Aunque se conoce la solución exacta para el comportamiento post-pandeo de una viga-columna perfecta sometida a una carga axial de gravedad, dicha solución incluye integrales elípticas, y los resultados obtenidos son presentados en una forma muy poco práctica, tanto para su estudio durante el comportamiento bajo otras combinaciones de cargas, como para la relación entre la carga axial aplicada y las deflexiones transversales, particularmente cuando el miembro sufre de imperfecciones iniciales tales como combaduras, falta de verticalidad o aplomo, y de las excentricidades en las cargas axiales aplicadas. *Rivello* (1969, págs. 411-417) trata este problema y presenta una solución aproximada para una columna articulada-articulada imperfecta (con combadura inicial) bajo carga axial concéntrica utilizando el método variacional de Rayleigh-Ritz. *Bolotin* (1964, págs. 45-47) igualmente presenta una solución aproximada para una columna articulada-articulada perfecta usando el método variacional de Galerkin.

Por otro lado, a pesar de la disponibilidad de algoritmos por el MEF y programas poderosos por computadora, el análisis de segundo orden de una viga-columna todavía es una tarea difícil y poco práctica para gran mayoría de los ingenieros estructurales. Esto se debe al gran número de grados de libertad (GDL) requerido para lograr un nivel de precisión deseado

(*Wilson y Habibullah*, 1992). Consecuentemente, la gran mayoría de los métodos de análisis no-lineales no son fáciles de utilizar en problemas prácticos (*Zhou y Chan*, 1997). Para obviar tales dificultades en los análisis de segundo-orden de estructuras aporticadas hechas con materiales convencionales, se utilizan métodos simplificados basados en la metodología de la aplicación de factores de amplificación a los resultados obtenidos de un análisis estructural de primer orden (*ACI 1999, AISC-LRFD 1994*). Se debe hacer énfasis en que estos métodos simplificados pueden ser utilizados con una exactitud aceptable en estructuras elásticas, a cambio de otros más exactos, si la relación de la carga axial aplicada P es menor que 0,6 de la carga crítica de pandeo (produciendo errores en los momentos amplificados calculados menores del 2%, *Timoshenko y Gere*, 1961 pág. 15). Por lo tanto, existe la necesidad de un método simple y práctico para el cálculo de la respuesta a grandes deflexiones de una viga-columna.

1.2 Objetivos.

El objetivo de esta publicación es presentar un método práctico para el análisis no-lineal a grandes deflexiones de una viga-columna esbelta con sección transversal simétrica y con conexiones semi-rígidas bajo cualquier tipo de cargas en sus extremos, incluyendo los efectos de la falta de aplomo y de excentricidades de las cargas axiales en los extremos. El método aquí propuesto, aunque aproximado, se puede utilizar en el análisis elástico no-lineal a grandes deflexiones y pequeñas deformaciones unitarias de una viga-columna con conexiones simples, rígidas y semi-rígidas. La ecuación propuesta también puede ser utilizada en el análisis inelástico a grandes deflexiones y pequeñas deformaciones unitarias de una viga-columna cuyas conexiones sufren de degradación flexural, o que por el contrario, sufren de rigidización a flexión. También se incluyen los efectos no lineales de las deformaciones a flexión en la longitud de la cuerda del miembro desarrollados por *Ekhande et al.* (1989).

Las ventajas del método propuesto son: 1) los efectos de las conexiones semi-rígidas son condensados en una sola ecuación no-lineal con una sola incógnita (para ambos casos: tracción y compresión axial) sin introducir grados de libertad y ecuaciones adicionales; 2) el método propuesto, basado en funciones de estabilidad clásica para una viga-columna con conexiones semi-rígidas (*Aristizabal-Ochoa*, 1996 y 1997a-b), es mucho más exacto que cualquier otro método aproximado disponible; y 3) el método puede ser incorporado en el análisis no-lineal elástico a grandes deflexiones de una viga-columna con cualquier condición de soporte y de cargas en los extremos sin mayores dificultades. Las cargas aplicadas en los extremos pueden incluir combinación de momentos, fuerzas transversales y axiales conservativas y no conservativas. Su validez y efectividad son verificadas con soluciones ya disponibles de análisis elásticos con grandes deflexiones y con pequeñas deformaciones unitarias de viga-

columnas, incluyendo la solución del problema clásico de la "Elástica".

1.3 Suposiciones.

Consideremos una viga-columna prismática en el plano, que conecta los puntos A y B como lo muestra la fig. 1a. El elemento se compone de la misma viga-columna AB, y de las conexiones a flexión κ_a y κ_b en los extremos superior e inferior, respectivamente. Se supone que el miembro AB es flexionado alrededor de uno de los ejes principales en su sección transversal, con un momento de inercia I y área A y además: 1) está hecho de un

material elástico lineal y homogéneo con un módulo de elasticidad E ; 2) su eje centroidal es una línea recta con un desaplomo inicial θ_0 con respecto al eje vertical; y 3) está cargado en A con P (carga vertical), Q (carga transversal), y M ($M=Pe+M'$, donde M' es un momento externo adicional aplicado en A). Cada una de estas tres cargas aplicadas en el plano de flexión pueden ser combinaciones de cargas conservativas y no conservativas con sus intensidades, direcciones y signos variando independientemente.

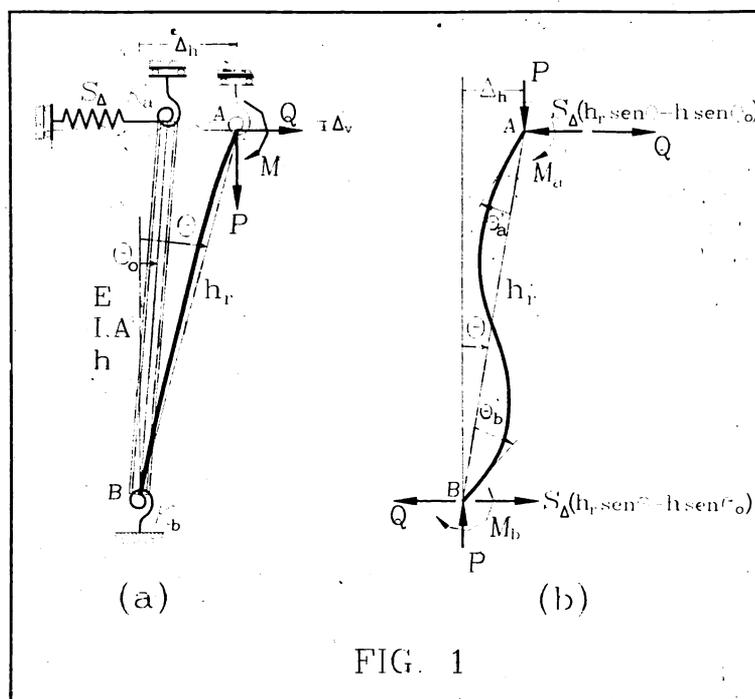


FIG. 1

Figura 1. Esquema del sistema viga-columna bajo cargas en los extremos con conexiones semi-rígidas y arriostramiento lateral. (a) Modelo estructural con un ángulo de aplomo vertical inicial θ_0 ; (b) Grados de libertad, fuerzas y momentos en el plano de flexión.

2. MODELO ESTRUCTURAL

El arriostramiento lateral en A es dado por un resorte de desplazamiento de rigidez S_D con un extremo conectado al extremo A de la viga-columna, y el otro extremo a rodillos verticales que se deslizan sobre un muro vertical rígido y sin fricción, como se puede apreciar en Fig. 1a. Las unidades de S_D son en fuerza/distancia. Las conexiones a flexión tienen rigideces κ_a y κ_b (cuyas unidades son en fuerza×distancia/radian) en el plano de flexión. Las relaciones $R_a=\kappa_a/(EI/h)$ y $R_b=\kappa_b/(EI/h)$ son designadas como los índices de rigidez de las conexiones, donde: I = momento de inercia de la viga-columna alrededor del eje principal en cuestión; y h = luz de la viga-columna o la longitud inicial de cuerda.

Estos índices varían entre cero (i.e., $R_a=R_b=0$) para conexiones simples (i.e., articuladas) a infinito (i.e., $R_a=R_b=\infty$) para conexiones totalmente restringidas (i.e., empotradas). Nótese que el algoritmo propuesto puede ser utilizado en el análisis inelástico de una viga-columna cuando el comportamiento inelástico está concentrado en las conexiones. Esto puede llevarse a cabo actualizando la rigidez de las conexiones κ_a y κ_b para cada aumento de las cargas de una manera de incrementos lineales. Gerstle (1988) ha indicado límites superiores e inferiores para κ_a y κ_b . Xu y Grierson (1993) utilizaron estos límites en el diseño de estructuras metálicas con conexiones semi-rígidas.

Los siguientes dos parámetros son introducidos (Cunningham 1990) para mayor conveniencia:

$$\rho_a = 1/(1 + 3/R_a) \quad (1a)$$

$$\rho_b = 1/(1 + 3/R_b) \quad (1b)$$

en donde ρ_a y ρ_b son llamados factores de fijeza. Para conexiones perfectamente articuladas, tanto el factor de fijeza ρ como el índice de rigidez R son cero; pero para conexiones rígidas o empotradas, el factor de fijeza es 1 y el índice de rigidez es infinito. Ya que el factor de fijeza sólo puede variar entre 0 a 1 en conexiones elásticas estables (mientras el índice de rigidez R puede variar de 0 a ∞), es más conveniente utilizarlo en el análisis elástico de estructuras con conexiones semi-rígidas (Aristizábal-Ochoa, 1997a-b, y Xu y Grierson, 1993).

Método y ecuaciones propuestas.

Las ecuaciones de una viga-columna sometida a grandes deflexiones y pequeñas deformaciones unitarias en el plano de flexión alrededor de uno de los ejes principales son desarrolladas en esta sección. El método propuesto consiste en resolver las ecuaciones no-lineales (2) y (3) simultáneamente.

$$\begin{aligned} & (M_a + M_b) h \\ & + \{P \sin \theta + (Q - S_{\Delta} h [(h_r/h) \sin \theta - \sin \theta_o]) \cos \theta\} \\ & \bullet (h_r/h) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$h_r/h = \left[1 - \frac{P_t}{EA} - \frac{H_z}{4P_t^2 h^2} \right] \quad (3)$$

en donde:

$$P_t = P \cos \theta + \{S_{\Delta} h [(h_r/h) \sin \theta - \sin \theta_o] - Q\} \sin \theta$$

Reemplazando la ecuación (3) en la (2), resulta que sólo es necesario resolver la siguiente ecuación no-lineal:

$$\begin{aligned} & \left\{ P \sin \theta + \left(Q - S_{\Delta} h \left[\left(1 - \frac{P_t}{EA} - \frac{H_z}{4P_t^2 h^2} \right) \sin \theta - \sin \theta_o \right] \right) \cos \theta \right\} \\ & \bullet \left(1 - \frac{P_t}{EA} - \frac{H_z}{4P_t^2 h^2} \right) + \frac{M_a + M_b}{h} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

La ecuación (2) representa la condición de equilibrio rotacional de la viga-columna que se muestra en la fig. 1b alrededor del extremo B, y la ecuación (3) la condición geométrica de la distancia real entre los dos extremos de la viga-columna o cuerda (expresión que incluye el efecto de la fuerza axial y el efecto "arco" causado por la flexión). Nótese que la carga axial de la viga-columna P_t se toma como la suma de los

componentes existentes de las fuerzas horizontales y verticales en A, a lo largo de su cuerda. Las magnitudes de los momentos finales M_a y M_b y el efecto "arco" proveniente del factor H_z dependen del signo de P_t , así:

a) Para $P_t \geq 0$ (compresión), y definiendo

$$\begin{aligned} D_c &= (1 - \rho_a)(1 - \rho_b)\phi^2 + 3(\rho_a + \rho_b - 2\rho_a\rho_b) \\ & (1 - \phi/\tan\phi) + 9\rho_a\rho_b [\tan(\phi/2) (\phi/2) - 1] \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} M_a D_c &= -3\rho_a [(1 - \rho_b) + 3\rho_b \tan(\phi/2) \phi] \\ & \bullet (\theta - \theta_o) \frac{EI}{h} \phi^2 + (1 - \rho_a) \\ & \bullet \left[(1 - \rho_b)\phi^2 + 3\rho_b(1 - \phi/\tan\phi) \right] M \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} M_b D_c &= -3\rho_b [(1 - \rho_a) + 3\rho_a \tan(\phi/2) \phi] \\ & \bullet (\theta - \theta_o) \frac{EI}{h} \phi^2 - 3\rho_b(1 - \rho_a)(1 - \phi/\sin\phi) M \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} H_z &= \phi (M_a^2 + M_b^2) (1/\tan\phi + \phi/\sin^2\phi) \\ & - 2(M_a + M_b)^2 + 2\phi M_a M_b (1 + \phi/\tan\phi) \sin\phi \end{aligned} \quad (6)$$

b) Para $P_t < 0$ (tracción), se define

$$\begin{aligned} D_t &= -(1 - \rho_a)(1 - \rho_b)\phi^2 + 3(\rho_a + \rho_b - 2\rho_a\rho_b) \\ & \bullet (1 - \phi/\tanh\phi) + 9\rho_a\rho_b [\tanh(\phi/2) (\phi/2) - 1] \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} M_a D_t &= 3\rho_a [(1 - \rho_b) + 3\rho_b \tanh(\phi/2) \phi] \\ & \bullet (\theta - \theta_o) \frac{EI}{h} \phi^2 + (1 - \rho_a) \left[(1 - \rho_b)\phi^2 - 3\rho_b(1 - \phi/\tanh\phi) \right] M \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} M_b D_t &= 3\rho_b [(1 - \rho_a) + 3\rho_a \tanh(\phi/2) \phi] \\ & \bullet (\theta - \theta_o) \frac{EI}{h} \phi^2 - 3\rho_b(1 - \rho_a)(1 - \phi/\sinh\phi) M \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} H_z &= \phi (M_a^2 + M_b^2) (1/\tanh\phi + \phi/\sinh^2\phi) \\ & - 2(M_a + M_b)^2 + 2\phi M_a M_b (1 + \phi/\tanh\phi) \sinh\phi \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{donde: } \phi = \sqrt{P_t (EI/h^2)}$$

Aunque en las ecuaciones (2) y (4) el arriostramiento lateral se supone que sea un resorte lineal (lineal con respecto a la deflexión horizontal

de A) sobre rodillos verticales, de tal manera que ninguna fuerza vertical es inducida en cualquier etapa de las deflexiones laterales, un arriostramiento no lineal con condiciones diferentes en sus extremos se puede utilizar en el modelo propuesto, siempre y cuando sus componentes de sus fuerzas inducidas (horizontales y verticales) sean conocidas en función de las deflexiones horizontal y vertical del extremo A de la viga-columna. La deducción de las ecuaciones (5) y (7) para M_a y M_b están incluidas en el Apéndice I. Las ecuaciones (6) y (7) de H_z fueron desarrolladas por Ekhande *et al.* (1989).

La ecuación (2) puede ser resuelta de dos formas: una simplificada, ignorando cualquier cambio en la longitud de la cuerda AB (i.e., haciendo $h_r/h=1$ para cualquier combinación de cargas); o una completa, utilizando la ecuación (4) que incluye cualquier cambio en la relación h_r/h . Las ecuaciones (2) o (4) deben ser resueltas para cada incremento de carga, o para un caso o problema nuevo con un conjunto nuevo de valores P , Q , M , θ_0 , EA , EI , h , y S_A .

Los tres ejemplos adjuntos que siguen muestran la efectividad, simplicidad y exactitud del método propuesto. Los ejemplos 1 y 2 son sobre el problema clásico de una viga-columna en voladizo bajo fuerzas

concentradas, verticales y horizontales en la parte superior y sometido a grandes deflexiones. El ejemplo 3 muestra los efectos de imperfecciones iniciales en una viga-columna (que consiste en dos segmentos idénticos en línea recta) simplemente apoyada sobre su respuesta elástica a grandes deflexiones bajo cargas axiales excéntricas en los extremos.

3. EJEMPLOS Y VERIFICACIÓN

3.1 Ejemplo 1.- Análisis no lineal a grandes deflexiones de una viga en voladizo.

Determinar el comportamiento de la viga en voladizo a grandes deflexiones que se muestra en la fig. 2a. Suponga que el miembro es perfectamente recto y horizontal inicialmente con propiedades E , A , I y h . También suponga que la flexión ocurre alrededor de su eje mayor y que la carga aplicada Q es siempre vertical. Ignore los efectos de la tracción axial en la longitud de la cuerda h_r . Compare los resultados calculados con los presentados por Bisshop y Drucker (1945) y reproducidos posteriormente por Aswell (1962, págs. 45-4).

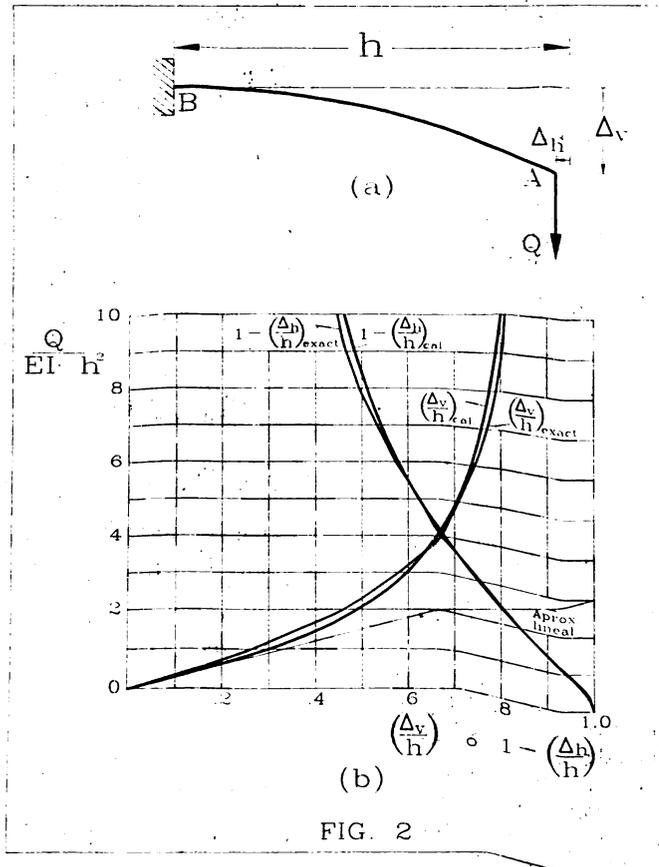


Figura 2. Ejemplo 1: Análisis de una viga en voladizo sometida a grandes deflexiones (tomado de Aswell 1962, pág. 45-4) (a) Modelo estructural; (b) Deflexiones verticales y horizontales en el extremo libre-versus- $Q/(EI/h^2)$.

Solución: en este ejemplo $P=S_{\Delta}=0$, $\rho_a=0$ y $\rho_b=1,0$; entonces de la ecuación (4):

$$\frac{(M_a + M_b)}{h} + \left[1 - \frac{P_t}{EA} - \frac{H_z}{4P_t^2 h^2} \right] Q \cos \theta = 0 \quad (9a)$$

Donde: $P_t = -Q \sin \theta < 0$ (tracción); $M_a=0$;

$$M_b = \frac{1}{(1 - \phi \tanh \phi)} \frac{EI}{h} \phi^2 \theta; \text{ y}$$

$$H_z = \left[\phi (1 \tanh \phi + \phi \operatorname{senh}^2 \phi) - 2 \right] M_b^2.$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (9a) y

teniendo en cuenta que $\phi = \sqrt{\frac{P_t}{EI h^2}}$ e

ignorando los efectos de la tracción axial (i.e., el término P/EA):

$$\frac{\theta \tan \theta}{(1 - \theta \tanh \theta)} - \frac{H_z}{4P_t^2 h^2} + 1 = 0 \quad (9b)$$

ó

$$\frac{\theta \tan \theta}{1 - q_s \tanh q_s} - \frac{q_s (1 \tanh q_s + q_s \operatorname{senh}^2 q_s)}{4(1 - q_s / \tanh q_s)^2} - 2 \theta^2 + 1 = 0 \quad (9c)$$

donde: $q = \sqrt{\frac{Q}{EI h^2}}$ y $q_s = q \operatorname{sen} \theta$.

Las deflexiones horizontales y verticales en el extremo libre de la viga serían aproximadamente:

$$\Delta_v = h_r \operatorname{sen} \theta = \left[1 - \frac{q_s (1 \tanh q_s + q_s \operatorname{senh}^2 q_s)}{4(1 - q_s / \tanh q_s)^2} - \theta^2 \right] h \operatorname{sen} \theta \quad (10a)$$

$$\Delta_h = h - h_r \cos \theta =$$

$$\left[1 - \cos \theta + \frac{q_s (1 \tanh q_s + q_s \operatorname{senh}^2 q_s)}{4(1 - q_s / \tanh q_s)^2} - \theta^2 \cos \theta \right] h \quad (10b)$$

La figura 2b muestra las variaciones de Δ_h/h y Δ_v/h contra el parámetro de carga lateral $Q/(EI/h^2)$. Las curvas calculadas fueron obtenidas de las ecuaciones (10a-b) y las líneas exactas fueron tomadas de *Aswell* (1962, pág. 45-4). El acuerdo o correlación en este problema en particular entre la solución exacta que utiliza ecuaciones elípticas y las del método propuesto, es excelente.

3.2 Ejemplo 2-. Análisis de una columna en voladizo con grandes deflexiones (la "Elástica").

Determinar las deflexiones verticales y horizontales de la columna en voladizo que se muestra en la fig. 3. Suponga que el miembro es perfectamente recto y

vertical inicialmente, con propiedades E , A , I y h . Suponga también que la carga P permanece vertical y el miembro se deflecta en el plano alrededor del eje principal. Desprecie los efectos de la deformación axial P/EA en la cuerda h_r . Compare los resultados obtenidos con la solución exacta presentada por *Timoshenko* y *Gere* (1961, págs. 76-82) de la "Elástica".

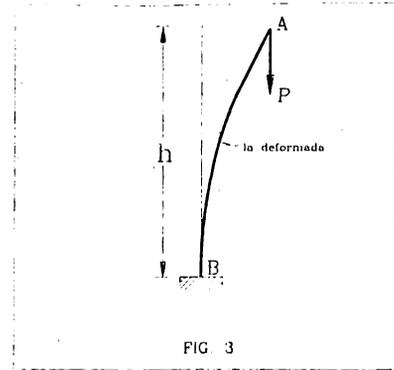


FIG. 3

Figura 3. Ejemplo 2: Análisis de una columna en voladizo sometida a grandes deflexiones (la "Elástica") (tomado de *Timoshenko* y *Gere* 1961, págs. 76-82).

Solución: en este ejemplo $Q=M=S_{\Delta}=0$, $\rho_a=0$ y $\rho_b=1,0$; entonces, utilizando la ecuación (4):

$$\frac{(M_a + M_b)}{h} + \left[1 - \frac{P_t}{EA} - \frac{H_z}{4P_t^2 h^2} \right] P \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (11a)$$

en donde: $P_t = P \cos \theta \geq 0$ (compresión); $M_a = 0$;

$$M_b = -\frac{1}{(1 - \phi \tanh \phi)} \frac{EI}{h} \phi^2 \theta;$$

$$H_z = \left[\phi (1 \tanh \phi + \phi \operatorname{sen}^2 \phi) - 2 \right] M_b^2.$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (11a)

y teniendo en cuenta que $\phi = \sqrt{\frac{P_t}{EI h^2}}$ y despreciando el término P/EA :

$$\frac{\theta \tan \theta}{(1 - \theta \tanh \theta)} - \frac{H_z}{4P_t^2 h^2} + 1 = 0 \quad (11b)$$

ó

$$\frac{\theta \tan \theta}{1 - p_c \tan p_c} + \frac{p_c (1 \tan p_c + p_c \operatorname{sen}^2 p_c)}{4(1 - p_c \tan p_c)^2} - 2 \theta^2 - 1 = 0 \quad (11c)$$

donde: $p = \sqrt{\frac{P}{EI h^2}}$ y

$$p_c = p \cos \theta$$

Los desplazamientos horizontal y vertical del extremo A de la columna son aproximadamente:

$$\Delta_h = h_r \operatorname{sen} \theta = \left\{ 1 - \frac{p_c \left(\frac{1}{\tan p_c} + p_c / \operatorname{sen}^2 p_c \right) - 2 \theta^2}{4 \left(1 - p_c / \tan p_c \right)^2} \right\} h \operatorname{sen} \theta \quad (12a)$$

$$\Delta_v = h - h_r \cos \theta = h \left\{ 1 - \cos \theta + \frac{p_c \left(\frac{1}{\tan p_c} + p_c / \operatorname{sen}^2 p_c \right) - 2 \theta^2 \cos \theta}{4 \left(1 - p_c / \tan p_c \right)^2} \right\} \quad (12b)$$

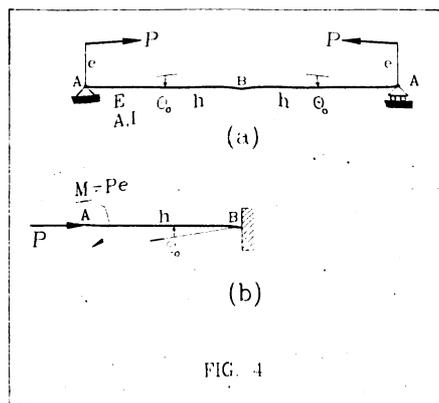


Figura 4. Ejemplo 3: Análisis de una viga-columna con una imperfección inicial sometida a grandes deflexiones (tomado de *Timoshenko y Gere* 1961, págs. 34). (a) Viga-columna inicial y cargas excéntricas aplicadas; (b) Modelo estructural.

La tabla 1 muestra los valores calculados de θ , Δ_r/h y Δ_v/h con las ecuaciones (11c) y (12a-b) para diferentes valores P/P_{cr} . Los valores exactos de la "Elástica" obtenidos por *Timoshenko y Gere* (1961, págs. 76-82), también están incluidos en la tabla. Los valores calculados concuerdan con los de la "Elástica". Por ejemplo, las deflexiones están dentro del 2,8% de los valores de la "Elástica" para un valor dado P/P_{cr} y para un valor dado de la deflexión transversal el valor de la carga axial correspondiente está dentro del 1,5% del valor de la "Elástica".

3.3 Ejemplo 3-. Análisis a grandes deflexiones de una columna con imperfección inicial

Determine la ecuación no-lineal a grandes deflexiones y pequeñas deformaciones unitarias de una viga-columna simplemente apoyada sometida a una carga axial excéntrica en cada extremo como lo muestra la fig. 4a. Suponga que la viga-columna fue fabricada inicialmente con dos segmentos rectos idénticos haciendo un ángulo θ_0 con la cuerda AB y deflectándose en el plano formado por los dos segmentos. Las propiedades de cada segmento son: E , A , I y longitud h . Compare los resultados calculados con los presentados por *Timoshenko y Gere* (1961, pág. 34) para el caso de pequeñas deflexiones. Desprecie los efectos de la deformación axial P/EA en la magnitud de la cuerda h_r .

Solución: Tomando solo un segmento, como se muestra en la Fig. 4b, entonces $Q = S_{\Delta} = 0$, $M = Pe$; $\rho_a = 0$ y $\rho_b = 1,0$; entonces, utilizando la ecuación (4): tenemos que:

$$\frac{(M_a + M_b)}{h} + \left[1 - \frac{P_t}{EA} - \frac{H_z}{4P_t^2 h^2} \right] P \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (13)$$

donde: $P_t = P \cos \theta \geq 0$ (compresión); $M_a = Pe$;

$$M_b = - \frac{(\theta - \theta_0) \cos \theta + (1 - \phi / \operatorname{sen} \phi)(e/h)}{(1 - \phi / \tan \phi)} P h$$

$$H_z = \phi \left(M_a^2 + M_b^2 \right) \left(\frac{1}{\tan \phi} + \phi / \operatorname{sen}^2 \phi \right) -$$

$$2(M_a + M_b)^2 + 2\phi M_a M_b (1 + \phi / \tan \phi) / \operatorname{sen} \phi.$$

Substituyendo las expresiones de arriba para M_a y M_b en la ecuación (13) y teniendo en cuenta que

$\phi = \sqrt{P_t / (EI h^2)}$ y despreciando el efecto axial P/EA , tenemos que:

$$\frac{-(\theta - \theta_0) \cos \theta + \frac{1 - \cos \phi}{\operatorname{sen} \phi} \phi (e/h)}{(1 - \phi / \tan \phi)} + \left(1 - \frac{H_z}{4P_t^2 h^2} \right) \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (14)$$

La ecuación (14) representa el comportamiento a grandes deflexiones y pequeñas deformaciones unitarias de una viga-columna, como se puede apreciar en la Fig. 4a [después de que la expresión H_z es substituida en la ecuación (14)]. Con la solución para θ obtenida de la ecuación (14), las deflexiones horizontal y vertical en el centro se calculan directamente como

$$\Delta_v = \left[\left(1 - \frac{H_z}{4P_t^2 h^2} \right) \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta_0 \right] h; \text{ y}$$

$$\Delta_h = \left[\cos \theta_0 - \left(1 - \frac{H_z}{4P_t^2 h^2} \right) \cos \theta \right] h,$$

Ahora, para pequeñas deflexiones (i.e., para valores pequeños de θ), la ecuación (14) se reduce a:

$$\frac{-(\theta - \theta_0) + \frac{1 - \cos \phi}{\operatorname{sen} \phi} \phi (e/h)}{(1 - \phi / \tan \phi)} + \theta = 0 \quad (15)$$

$$\delta \quad \theta = -\frac{1}{\cos \phi} \left[\theta_0 \frac{\sin \phi}{\phi} + (1 - \cos \phi) \frac{e}{h} \right] \quad (15')$$

La expresión (15') es idéntica a la obtenida utilizando el método presentado por *Timoshenko y Gere* (1962, pág. 14) para pequeñas deflexiones y deformaciones unitarias usando las funciones clásicas de estabilidad.

4. RESUMEN Y CONCLUSIONES

El análisis elástico no lineal con grandes deflexiones y pequeñas deformaciones unitarias de una viga-columna esbelta de sección transversal simétrica con conexiones semi-rígidas bajo cargas en los extremos incluyendo los efectos de las excentricidades de la carga axial y el desplome se resuelven de una forma simplificada. Las funciones de estabilidad clásica de Timoshenko son utilizadas en el método propuesto. Los efectos de las deformaciones a flexión sobre la longitud de la cuerda del miembro según lo establecido por *Ekhande et al.* (1989) también son incluidos. Los resultados de la carga por el método propuesto están dentro del 1,5% de los valores teóricos hasta desplazamientos transversales muy grandes (de 0,80 veces la luz del miembro cuando se toman en cuenta los cambios en la longitud de la cuerda del miembro; ó hasta 0,30 veces la luz del miembro cuando se supone que la longitud de su cuerda permanece constante). La validez y efectividad del método propuesto y de las ecuaciones no lineales son comprobadas y verificadas con tres soluciones bien documentadas de análisis elástico a grandes deflexiones y pequeñas deformaciones unitarias de viga-columnas, incluyendo la solución al problema clásico de la "Elástica".

Las ventajas del método propuesto son: 1) los efectos de las conexiones semi-rígidas están condensados en una ecuación no lineal simple con una sola incógnita (para ambos casos de fuerzas axiales a tracción o a compresión) sin introducir grados de libertad y ecuaciones adicionales; 2) el método propuesto es más exacto que cualquier otro método aproximado disponible; y 3) el método es muy práctico y puede ser incorporado en análisis elástico-plástico a grandes deflexiones de viga-columnas.

Los resultados analíticos indican que la respuesta elástica a grandes deflexiones y pequeñas deformaciones unitarias de una viga-columna esbelta no es solamente afectada por la magnitud de la carga axial, las restricciones de la deriva lateral (i.e., arriostamiento), el grado de fijación de las conexiones y sus propiedades elásticas, sino también por el "efecto arco" causado por los momentos a flexión. Aumentos significativos en los momentos a flexión y en las deflexiones laterales son causados por los efectos geométricos no lineales, particularmente en viga-columnas esbeltas.

5. RECONOCIMIENTOS

La investigación presentada en esta publicación se llevó a cabo en la Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas de Medellín. El autor desea expresar su aprecio por el apoyo financiero e incentivo del CINDEC y el Departamento de Ingeniería Civil de la Facultad de Minas, Universidad Nacional, Sede Medellín.

REFERENCIAS

- ACI Committee 318. *Building Code Requirements for Structural Concrete (318-99) and Commentary (318R-99)*, American Concrete Institute, Detroit, 391 p., (1999).
- Aristizábal Ochoa, J. Darío. Braced, partially braced, and unbraced columns: complete set of classical stability equations", *Int. J. Struct. Engrg. and Mech.*, Taejon, Korea 4(4), 365-381, (1996).
- Aristizábal Ochoa, J. Darío. First and second order stiffness matrices and load vector of beam columns with semirigid connections, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 123(5), May, 669-678, (1997a).
- Aristizábal Ochoa, J. Darío. Story stability of braced, partially braced, and unbraced frames: classical approach, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 123(6), June., 799-807, (1997b).
- Ashwell, D. G. *Nonlinear Problems*, Handbook of Engineering Mechanics, W. Flügge, Editor, McGraw-Hill, Chapter 45, s.f.
- Bolotin, V. V. *Dynamic Stability of Elastic Systems*", Holden-Day Inc., 728 Montgomery Street, San Francisco, Ca., Capítulo 3, (1964).
- Cunningham, R. Some aspects of semi-rigid connections in structural steel-work, *Structural Engineering*, 68(5), 85-92, (1990).
- Gerstle, K. H. Effects of connections on frames, *Steel Beam to Column Building Connections*, W. F. Chen, ed., Elsevier Science Publishers Ltd., New York, N.Y., 241-267, (1988).
- Ekhande, S. G., Selvappalam, M., y Madugula, M. K. S. Stability functions for three-dimensional beam columns, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 115(2), Feb., 467-479, (1989).
- Manual of Steel Construction *Load & Resistance Factor Design*, 2nd Edition, AISC, (1994).
- Rivello, M. R. *Theory and Analysis of Flight Structures*, McGraw-Hill, Capítulo 14, (1969).
- Timoshenko, S., y Gere. *Theory of Elastic Stability*, 2nd Ed., McGraw-Hill, Chapter 2, (1961).
- Salmon, C. G., y Johnson, J. E. *Steel Structures*, 2nd Ed., Harper & Row, Chapter 14, (1980).
- Smith-Pardo, J. Paul y Aristizabal Ochoa, J. Darío. Buckling reversals of axially restrained beam column, *J. Engrg. Mechanics*, ASCE, 125(4), 401-409, (1999).
- Torkamani, M. A. M, Sonmez, M., y Cao, J. Second order elastic plane frame analysis using finite element method, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 123(9), 1225-1235, (1997).

Wilson, E. L., y Habibullah, A. *SAP90: a Series of computer programs for the finite element analysis of structures*, Computers and Structures, Inc., 1995 University Avenue, Berkeley, CA. 94704, (1992).

Xu, L., y Grierson, D. E. Computer automated design of semirigid steel frameworks, *J. Struct. Engrg.*, 119(6), 1740-1760, (1993).

Zhou, Z. H., y Chan, S. L. Second order analysis of slender steel frames under distributed axial and member loads, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 123(9), Sept, 1187-1193, ., (1997).

Apéndice I. Desarrollo de las ecuaciones (5a-b) y (7a-b)

La relación entre los momentos M_a y M_b y las rotaciones de los extremos para una viga-columna perfectamente recta bajo compresión y con un ángulo de aplomo vertical inicial θ_0 (Fig. 1a) son más fáciles de formular si se utilizan los coeficientes de flexibilidad (Salmon y Johnson 1980, pág. 849) de la siguiente manera:

$$\theta'_a = -(\theta - \theta_0) - \frac{M_a - M_b}{\kappa_a}$$

$$= \frac{M_a \operatorname{sen} \phi - \phi \cos \phi}{EI h \phi^2 \operatorname{sen} \phi} + \frac{M_b \operatorname{sen} \phi - \phi}{EI h \phi^2 \operatorname{sen} \phi}$$

(16a)

$$\theta'_b = -(\theta - \theta_0) - \frac{M_b}{\kappa_b}$$

$$= \frac{M_b \operatorname{sen} \phi - \phi \cos \phi}{EI h \phi^2 \operatorname{sen} \phi} + \frac{M_a \operatorname{sen} \phi - \phi}{EI h \phi^2 \operatorname{sen} \phi}$$

(16b)

donde θ'_a y θ'_b : rotaciones de los extremos A y B con respecto a la cuerda AB, respectivamente; y $\phi = \sqrt{P_i / (EI h^2)}$.

Los momentos M_a y M_b de las ecuaciones (16a-b) pueden ser expresados en términos de $\theta - \theta_0$, M y las relaciones de fijación (R_a y R_b), así:

$$M_a = -\frac{1}{Z} \left[\frac{1}{R_b} + \frac{\tan(\phi/2)}{\phi} \right] (\theta - \theta_0) \phi^2 (EI h)$$

$$+ \frac{1}{Z} \left(\frac{\phi^2}{R_b} + 1 - \frac{\phi}{\tan \phi} \right) \frac{M}{R_a}$$

(17a)

$$M_b = -\frac{1}{Z} \left[\frac{1}{R_a} + \frac{\tan(\phi/2)}{\phi} \right] (\theta - \theta_0) \phi^2 (EI h)$$

$$- \frac{1}{Z} \left(1 - \frac{\phi}{\operatorname{sen} \phi} \right) \frac{M}{R_a}$$

en donde

$$Z = \frac{\phi^2}{R_a R_b} + \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right) \left(1 - \frac{\phi}{\tan \phi} \right) + \frac{\tan(\phi/2)}{\phi/2} - 1$$

De igual forma, cuando la carga axial P_i es de tracción:

$$M_a = \frac{1}{Y} \left[\frac{1}{R_b} + \frac{\tanh(\phi/2)}{\phi} \right] (\theta - \theta_0) \phi^2 (EI h)$$

$$- \frac{1}{Y} \left(\frac{\phi^2}{R_b} - 1 + \frac{\phi}{\tanh \phi} \right) \frac{M}{R_a}$$

(18a)

$$M_b = \frac{1}{Y} \left[\frac{1}{R_a} + \frac{\tanh(\phi/2)}{\phi} \right] (\theta - \theta_0) \phi^2 (EI h)$$

$$- \frac{1}{Y} \left(1 - \frac{\phi}{\operatorname{senh} \phi} \right) \frac{M}{R_a}$$

(18b)

en donde

$$Y = -\frac{\phi^2}{R_a R_b} + \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right) \left(1 - \frac{\phi}{\tanh \phi} \right) + \frac{\tanh(\phi/2)}{\phi/2} - 1$$

Las ecuaciones (18a-b) se obtuvieron reemplazando ϕ por $i\phi$ (donde $i = \sqrt{-1}$) en las ecuaciones (17a-b) y también teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(i\phi) = i \operatorname{senh} \phi$, $\cos(i\phi) = \cosh \phi$, y $\tan(i\phi) = i \tanh \phi$. Las ecuaciones (5a-b) y (7a-b) pueden ser obtenidas una vez que $R_a = 3\rho_a / (I\rho_a)$ y $R_b = 3\rho_b / (I\rho_b)$, son substituidas en las ecuaciones (17a-b) y (18a-b), respectivamente.

Apéndice II. Nomenclatura

Los siguientes símbolos son utilizados en este trabajo:

A = área de la sección transversal de un miembro viga columna.

E = módulo de Young del material.

H_z = función del efecto "arco" obtenida a partir de las ecuaciones (6) y (8).

h = longitud inicial de la viga-columna AB.

I = momento principal de inercia de una viga-columna alrededor de su eje a flexión.

M = momento total a flexión externo aplicado en A.

M_a y M_b = momentos de extremos A y B de la viga-columna en AB, respectivamente.

P = carga vertical aplicada en A (+ compresión, - tracción).

P_e = $\pi^2 EI / h^2$ = (carga axial de Euler).

P_i = carga axial a lo largo de la cuerda AB (+ compresión).

$p = P / (EI h^2)$ = función de estabilidad en el plano de flexión.

Q = carga transversal aplicada en A.

$q = Q (EI h^2)$: parámetro de carga transversal.

R_a y R_b = índices de rigidez de la conexión a flexión en A y B, respectivamente.

Δ_h y Δ_v = deflexiones horizontal y vertical en A de la viga-columna AB, respectivamente.

κ_a y κ_b = rigideces a flexión de las conexiones en los extremos A y B, respectivamente.

ρ_a y ρ_b = factores de fijeza en A y B de la columna AB, respectivamente.

θ' = ángulo de la cuerda AB con respecto al eje vertical (fig. 1a).

θ_o = falta de aplomo vertical inicial con respecto al eje vertical (fig. 1a).

θ'_a y θ'_b = rotaciones de los extremos A y B con respecto a la cuerda AB, respectivamente (Fig. 1b).

TABLA 1 ANÁLISIS DE UNA COLUMNA EN VOLADIZO

P/P_{cr}	θ (radianes)	$(\Delta_h/h)_{cal}$	$(\Delta_v/h)_{cal}$	$(\Delta_h/h)_{exacto}$	$(\Delta_v/h)_{exacto}$
1.005035	0.12434	0.1238	0.00951	0.12700	0.01001
1.020568	0.25001	0.24561	0.03815	0.25207	0.04020
1.042345	0.35616	0.34353	0.07660	0.37413	0.08590
1.090054	0.51152	0.47466	0.15443	0.48780	0.16349
1.151720	0.65153	0.57675	0.24372	0.59321	0.25898
1.242254	0.80208	0.66600	0.35585	0.68542	0.38003
1.380637	0.96921	0.73721	0.49393	0.75852	0.53100
1.613533	1.16518	0.78161	0.66435	0.80188	0.72065