

# APLICACIÓN DE LA SIMULACIÓN MATEMÁTICA AL ANÁLISIS EN RÉGIMEN TRANSITORIO DE UN CIRCUITO CERRADO DE MOLIENDA.

JUAN MARÍA MENÉNDEZ AGUADO

*Departamento de Explotación y Prospección de Minas. Universidad de Oviedo. Independencia, 13 (33004). Oviedo. España. maguado@correo.uniovi.es*

BLANCA ROSA DZIOBA

*Departamento de Minería, Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales. Universidad Nacional de San Luis. Chacabuco y Pedernera. (5600) San Luis. Argentina  
rbdzioba@unsl.edu.ar*

Recibido para revisar 17 de Noviembre de 2003, aceptado 18 de Febrero de 2004, versión final 17 de Marzo de 2004

**RESUMEN:** En el siguiente trabajo se realiza un estudio de la aplicación del Modelo Cinético Acumulativo, de simulación de procesos de molienda-clasificación, al estudio del régimen transitorio en un circuito cerrado de molienda – clasificación realizado a escala de laboratorio, sobre diferentes minerales. Se realiza un análisis de estabilidad del tamaño de grano en los diferentes flujos del circuito, estudiando los tiempos hasta la estabilidad de dichos flujos. Se concluye que, para todos los materiales ensayados, el flujo que determina el alcance de la estabilidad del circuito global parece ser el flujo de recirculación, al presentar mayores duraciones del régimen transitorio.

**PALABRAS CLAVES:** Molienda, modelos matemáticos, simulación

**ABSTRACT:** In this work, application of Cumulative Based Kinetic Model is made to the study of transitional phase in a mill closed circuit carried out at laboratory scale, on different minerals. It is carried out an analysis of stability of the grain size in the different currents of the circuit, studying its times to stability. As conclusion, at the sight of the obtained results, the current that determines the reaching of stability of the global circuit seems to be the recirculating flow, which shows longer times of the transitional phase.

**KEY WORDS:** grinding, comminution, mathematical models, simulation

## 1. Introducción

La simulación matemática de procesos de molienda y clasificación es uno de los campos de investigación en la Mineralurgia más recientes y de una importancia crucial para esta rama de la Ciencia <sup>4, 5, 7, 8</sup>. Para efectuar dicha simulación, es fundamental la definición de los modelos matemáticos, de forma que cuanto mayor sea la elaboración y complejidad de estos, se conseguirá un mayor ajuste a la realidad de los resultados obtenidos; pero, como contrapartida, mayor número de variables se deberá manejar. El modelo matemático utilizado en este trabajo, denominado Modelo Cinético Acumulativo, ha sido el elegido para la

simulación debido a que rompe de algún modo la regla general enunciada anteriormente, ya que permite, con un escasa complejidad en el tratamiento matemático y en la definición del modelo, la simulación del proceso de molienda sin renunciar a la precisión en los resultados <sup>1, 3, 8</sup>.

La definición de este Modelo Cinético Acumulativo se encuentra en la literatura específica <sup>1, 8</sup>, por lo que en este trabajo únicamente se expondrá lo necesario para la realización del mismo.

En lo que se refiere al tratamiento matemático de los datos, el modelo permite la realización de los cálculos en una simple hoja de cálculo, por lo que ha sido la herramienta elegida para facilitar la reproducibilidad de los mismos.

## 2. OBJETIVOS

Los objetivos que se pretendieron en la realización del presente estudio son los que se exponen a continuación:

- En primer lugar, realizar la caracterización de los diferentes materiales para permitir la simulación de un proceso de molienda en circuito cerrado con un clasificador.
- En segundo lugar, llevar a cabo los cálculos, suponiendo flujos tipo pistón, con el número de etapas necesarias hasta alcanzar la estabilidad del sistema.
- En tercer lugar, realizar un análisis de los resultados obtenidos en las etapas previas al alcance del régimen permanente, que corresponderán con el régimen transitorio en el funcionamiento de dicho circuito.

Para la consecución de los objetivos expuestos, a continuación se detalla la metodología utilizada.

## 3. METODOLOGÍA

El mencionado Modelo Cinético Acumulativo queda definido matemáticamente, tanto en el caso de la molienda discontinua como continua en flujo pistón, por la siguiente expresión:

$$W_{(x,t)} = W_{(x,0)} \cdot e^{-k \cdot t}$$

donde:

- $W_{(x,t)}$  es el porcentaje acumulado de material de tamaño superior a un tamaño

$x$  dado (rechazo acumulado) en un tiempo  $t$

- $W_{(x,0)}$  es el rechazo acumulado correspondiente al mismo tamaño  $x$ , en la alimentación
- $K$ , parámetro cinético, se puede definir como la velocidad de desaparición del material, en  $\text{min}^{-1}$ .

Según este modelo, la relación entre el parámetro cinético y el tamaño de partícula puede ser descrita matemáticamente mediante la siguiente expresión:

$$k = C \cdot x^n$$

en la que  $C$  y  $n$  son constantes dependientes del molino y de las características del material, respectivamente.

De esta forma, una vez sean conocidos  $C$  y  $n$ , podría obtenerse la distribución granulométrica de un producto tras un tiempo  $t$  de molienda a partir de una alimentación determinada, haciendo uso de la composición de las dos expresiones anteriores:

$$W_{(x,t)} = W_{(x,0)} \cdot e^{-C \cdot x^n \cdot t}$$

expresión que nos daría el porcentaje de rechazo al tamaño  $x$ , tras un tiempo de molienda  $t$ .

La validez de este modelo ha sido estudiado, obteniéndose gráficos comparativos como el presentado en la Figura 1, para el caso del Clinker, en el que el grado de ajuste para todos los tiempos ha sido excelente:

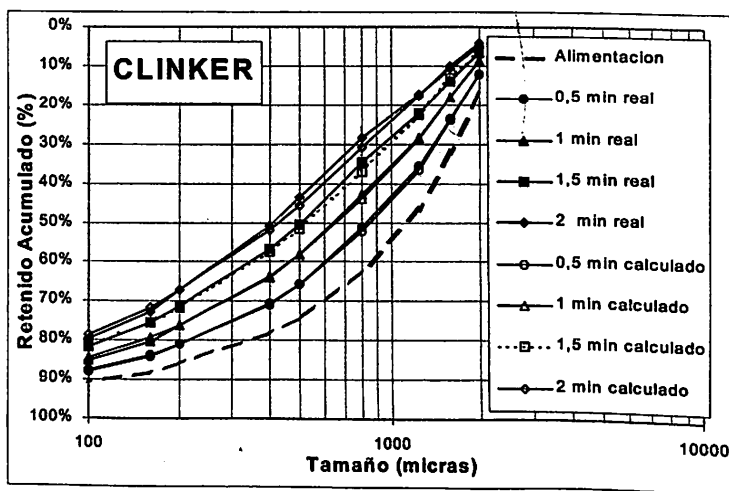


Figura 1: Comparación entre valores reales y calculados.

Se obtendrán los parámetros del modelo, mediante ensayos que consisten en la molienda durante diferentes tiempos, determinando la distribución granulométrica del producto resultante en cada caso.

Los valores del parámetro cinético  $k$  para cada tamaño se pueden obtener realizando una regresión lineal de los valores de rechazo acumulado frente al tiempo, sobre la ecuación linealizada de la siguiente forma:

$$L(W_{(x,t)}) = L(W_{(x,0)}) - k \cdot t \Rightarrow L(W_{(x,t)}) - L(W_{(x,0)}) = -k \cdot t$$

(ecuación 1)

Para el cálculo de  $C$  y  $n$ , a partir de los valores de  $k$  obtenidos para cada tamaño, se realizó de nuevo una regresión de tipo lineal, teniendo en cuenta, al igual que antes, la linealización mediante logaritmos de lo siguiente:

$$L(k) = L(C) + n \cdot L(x) \quad (\text{ecuación 2})$$

De los ensayos realizados a 0.5, 1, 1.5 y 2 minutos, tras la realización del análisis granulométrico, se obtiene la Tabla 1.

**Tabla 1** Resultados de la molienda a diferentes tiempos.

x \ t	W(x,t)				
	0	0,5	1	1,5	2
2000	0,172890377	0,122387804	0,087090956	0,066855963	0,047225095
1600	0,322516954	0,236724906	0,180709439	0,13844433	0,106773526
1250	0,467250408	0,357913669	0,285407541	0,221992772	0,174164081
800	0,62280024	0,51276122	0,427381259	0,345379453	0,282316443
500	0,743497296	0,65870161	0,581722924	0,50369988	0,435625646
400	0,783586574	0,708119219	0,638752899	0,567114094	0,508273009
200	0,859215383	0,80952381	0,762947694	0,711667527	0,671406412
160	0,880676453	0,840013703	0,801855192	0,754947513	0,724922441
100	0,907974933	0,877869133	0,850897535	0,814919979	0,795329197

A partir de los datos de la tabla anterior, se pueden realizar los cálculos de  $L(W(x,t)) - L(W(x,0))$ , recogidos en la Tabla 2.

**Tabla 2.** Cálculos realizados.

x \ t	L(W(x,t)) - L(W(x,0))				
	0	0,5	1	1,5	2
2000	0	-0,34546301	-0,68570469	-0,95011724	-1,29773231
1600	0	-0,30925697	-0,57926527	-0,84568741	-1,10544569
1250	0	-0,26657351	-0,49294719	-0,74422049	-0,98686747
800	0	-0,19441555	-0,37654933	-0,58958215	-0,79119725
500	0	-0,12109449	-0,24537087	-0,38938452	-0,53458186
400	0	-0,10126908	-0,20436387	-0,32332104	-0,43286283
200	0	-0,05957344	-0,11883015	-0,18840878	-0,24664499
160	0	-0,0472721	-0,09376228	-0,15404208	-0,19462564
160	0	-0,03371924	-0,06492506	-0,10812685	-0,13246066

Realizando para cada tamaño la mencionada regresión, se obtienen los valores de  $k$  presentados en la Tabla 3:

Tabla 3. Valores de k obtenidos.

x	k
2000	0,640023771
1600	0,549464364
1250	0,490276384
800	0,395512219
500	0,267490751
400	0,217555524
200	0,124425065
160	0,099204251
160	0,067865785

A partir de la tabla anterior, se puede ya realizar el cálculo de los valores de C y n mediante regresión lineal mostrado en la Figura 2.

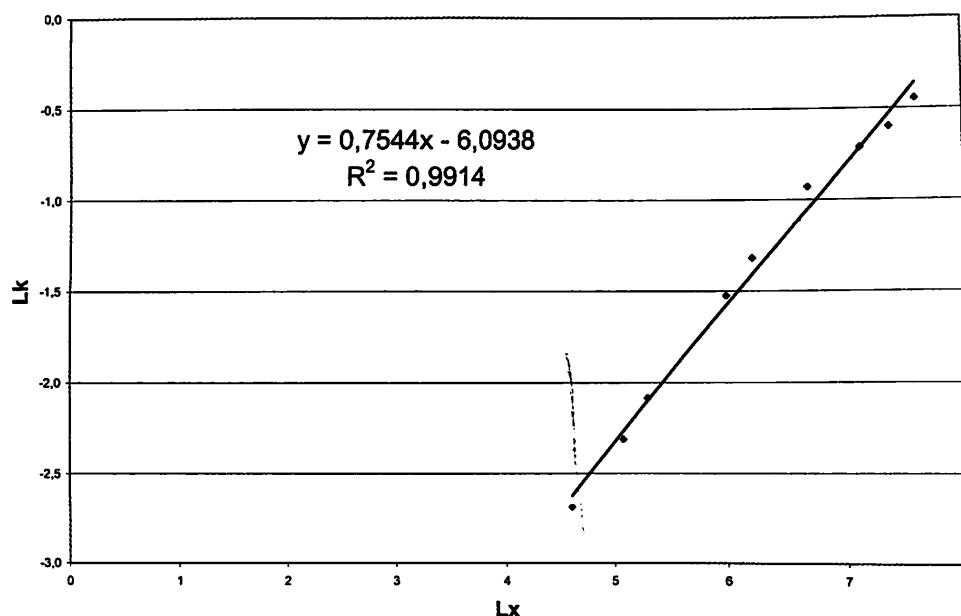


Figura 2: Análisis de regresión efectuado.

Y teniendo en cuenta la ecuación 2, se obtienen finalmente los parámetros del modelo, que en este caso, correspondiente a la muestra de clinker, serán los mostrados en la Tabla 4, en la que se incluyen los resultados obtenidos con los demás materiales ensayados.

Tabla 4. Parámetros del modelo para los materiales ensayados

Material	C	n
Clínker	0,002256844	0,754389
Fluorita	0,003333000	0,785951
Feldespató	4,7928E-07	2,135524
Escoria de Cobre	1,3456E-05	1,570187
Yeso	0,011337180	0,707335
Caliza	0,000882920	0,903102

Se supone un circuito de molienda cerrada compuesto por un molino de bolas y una criba de malla 500 micras, tal como se representa en la Figura 3.

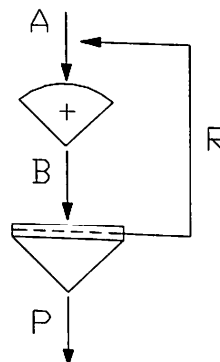


Figura 3. Esquema de molienda utilizado

Se consideran además como parámetros de entrada los siguientes:

- 1000 g de alimentación continua de mineral.
- Tamiz de corte de 500 micras.
- Tamices (en micras): 3000, 2500, 2000, 1500, 1000, 800, 500, 300 y 100
- Granulometría de alimentación igual en todos los casos: según tabla 5.

**Tabla 5.** Distribución granulométrica de la alimentación, en porcentaje.

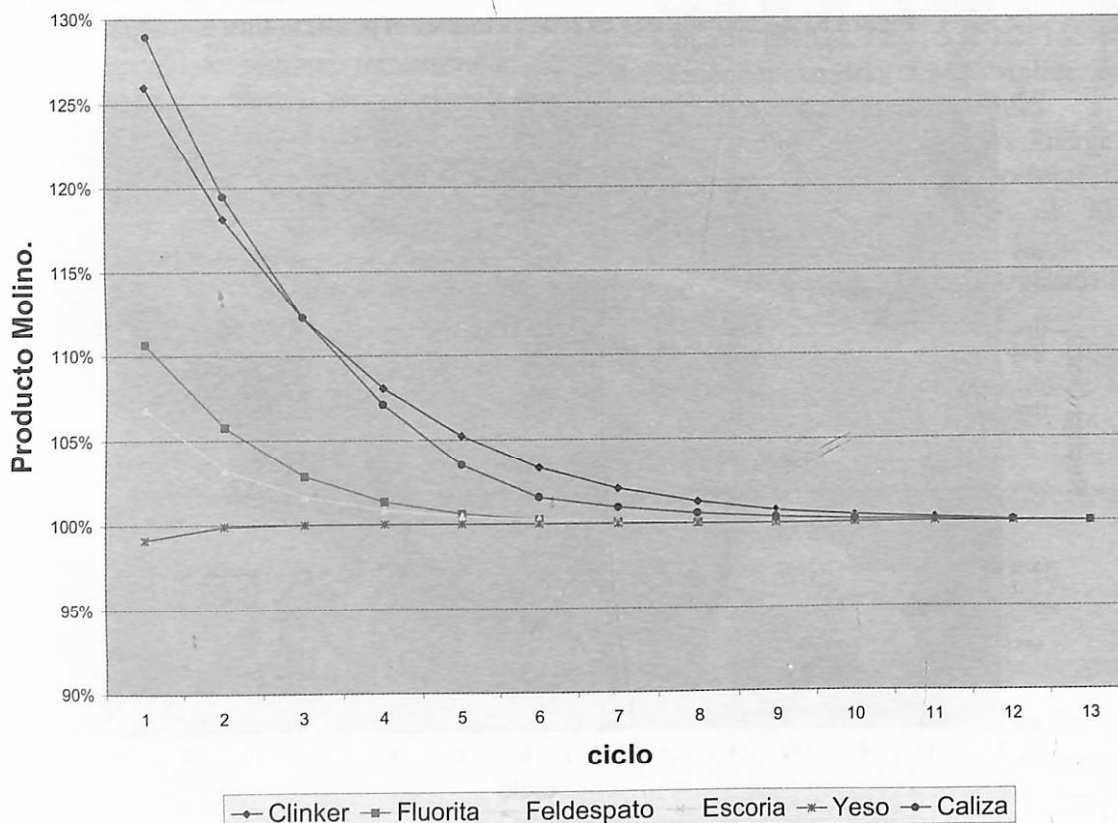
Alimentación		
Tamaño	Pasante ac.	Retenido ac.
3000	99,0	1,0
2500	90,2	9,8
2000	77,2	22,8
1500	51,1	48,9
1000	31,6	68,4
800	15,3	84,7
500	8,8	91,2
300	5,4	94,6
100	1,6	98,4

Consideraremos ciclos de molienda con duración de 2 minutos, de forma que mediante la aplicación de la ecuación 1, se puede conocer la distribución granulométrica del producto a partir de la distribución granulométrica de la alimentación, expresados ambos como retenido acumulado. Para la simulación del corte por el tamiz de 500 micras, se consideró un proceso de clasificación perfecto.

Se realizaron tantos ciclos como fue necesario hasta estabilizar el  $d_{80}$  y el caudal másico de los diferentes flujos. Este número resultó ser de 13 ciclos, pues fue el número más alto necesario entre todos los materiales.

#### 4. RESULTADOS

Después de los 13 ciclos calculados, se obtuvieron los resultados (mostrados en la figura 4) de  $d_{80}$  normalizado en cada ciclo para cada mineral del **Producto del Molino**. Se define el  $d_{80}$  normalizado como el cociente entre el  $d_{80}$  en el ciclo y el  $d_{80}$  en el equilibrio.



**Figura 4.**  $d_{80}$  normalizado en cada ciclo, para el producto del molino

De igual forma, en la Figura 5 se muestran los resultados del **Producto Final**, es decir, el producto del circuito cerrado, y en la Figura 6 los correspondientes al **Producto Recirculado**.

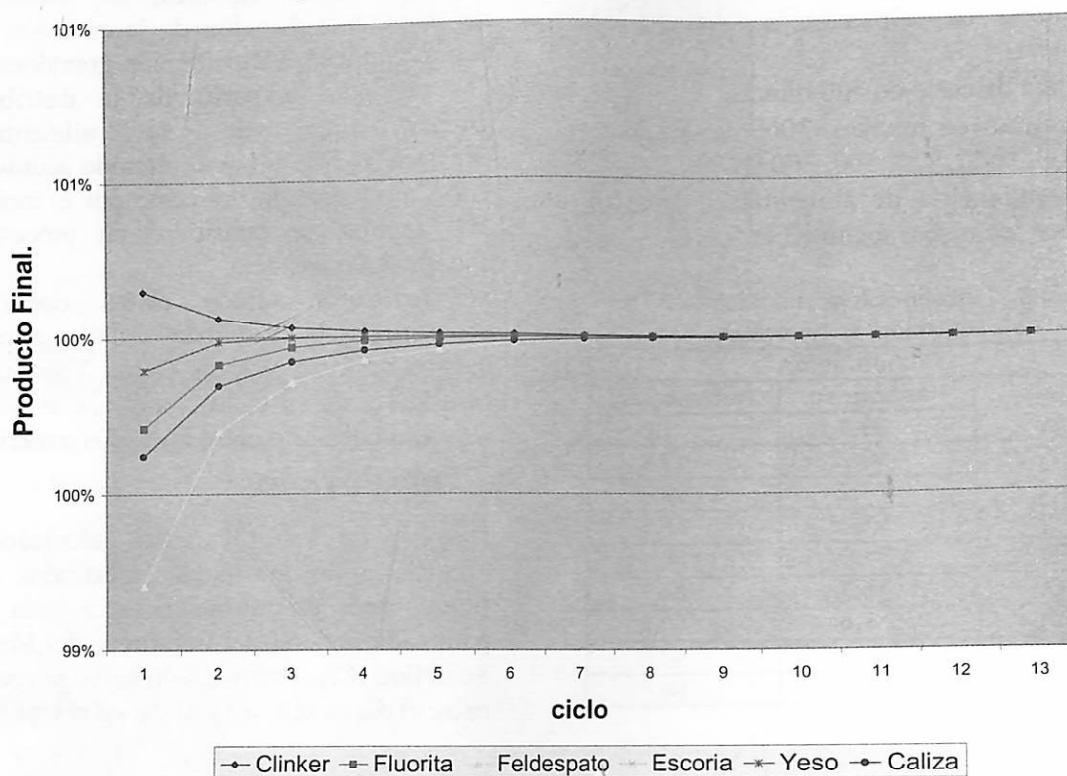


Figura 5.  $d_{80}$  normalizado en cada ciclo, para el producto final

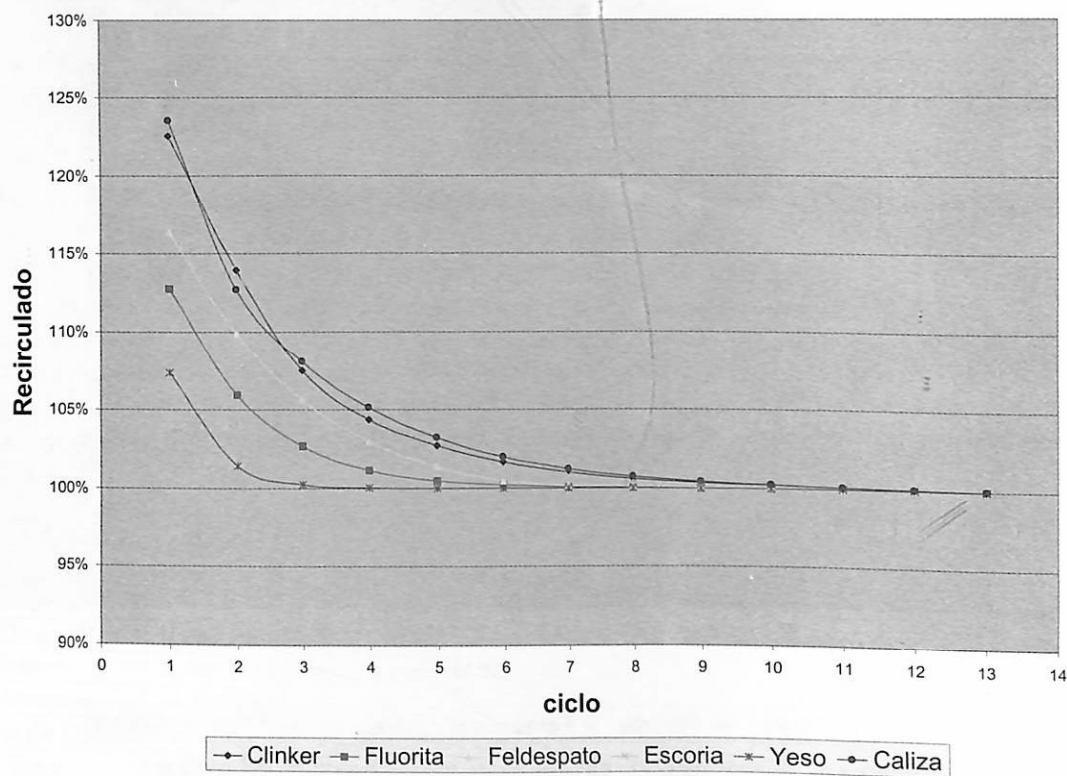


Figura 6.  $d_{80}$  normalizado en cada ciclo, para el recirculado

## 5. DISCUSIÓN

A la vista de los resultados obtenidos, se pueden extraer las apreciaciones expuestas a continuación.

En primer lugar, es evidente que los diferentes materiales alcanzan el régimen permanente, en igualdad del resto de condiciones, en tiempos diferentes.

En segundo lugar, se puede decir que, a pesar de lo anterior, se observa que la estabilidad en el producto final del circuito parece alcanzarse antes que en el caso de los otros flujos internos del circuito.

## 6. CONCLUSIONES

De todo lo expuesto anteriormente, se puede concluir lo siguiente:

- Se ha mostrado un método de análisis del régimen transitorio en un circuito cerrado de molienda-clasificación.
- El circuito aparenta alcanzar el régimen permanente antes de tiempo, ya que la estabilidad en el producto del circuito se alcanza antes que en los flujos internos.
- Para el estudio del régimen transitorio de un circuito cerrado de molienda-clasificación, parece más aconsejable la monitorización del flujo recirculación que del flujo correspondiente al producto final.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

1. Aksani, B., Sönmez, B. (2000), "Simulation of Bond Grindability Test by Using Cumulative Based Kinetic Model", *Miner. Eng.*, 13 6 673-677
2. Austin, L.G., Klimpel, R.R. (1964), "The Theory of Grinding Operations", *Ind. Eng. Chem.*, 56 (11) 18-29
3. Finch, J.A. and Ramirez-Castro, J., (1981) "Modelling Mineral Size Reduction in Closed-Circuit Ball Mill at the Pine Point Mines Concentrator", *Int. J. Min. Proc.*, 1981 8 67-78
4. Gutierrez, L., Sepúlveda, J., "Dimensionamiento y Optimización de Plantas Concentradoras Mediante Técnicas de Modelización Matemática", CIMM, Santiago de Chile, 1986
5. Horst, W.E., Freeh, E.J., (1970) "Mathematical modelling applied to analysis and control of grinding circuits" AIME Annu. Meet., Denver, Pap., 70-B-27
6. Laplante, A.R., Finch, J.A. and del Villar, R., (1987) "Simplification of Grinding Equation for Plant Simulation", *Trans. IMM (Sec. C)*, 96, C108-112
7. Machado Leite, M.R., (1990) "Kinetic Models for the Simulation of Crushing Circuits", *Miner. Eng.*, 3 (1 / 2) 165-180
8. Menéndez Aguado, J.M., "Aplicación de la Simulación Matemática a la Determinación de Consumos Energéticos en Fragmentación", Tesis Doctoral, Dpto. Explotación y Prospección de Minas, Universidad de Oviedo, 2001. (publicada en CD-ROM por la Universidad de Oviedo)
9. Prasher. C. L., "Crushing and Grinding Process Handbook", John Wiley & Sons, 1987, Great Britain.