

REVISIÓN SOBRE MODELADO DE SUPERFICIES COMPLEJAS

JUAN D. OSORIO

Grupo de Percepción y Control Inteligente, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

FLAVIO A. PRIETO

Grupo de Percepción y Control Inteligente, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

GUSTAVO A. OSORIO

Grupo de Percepción y Control Inteligente, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

Recibido para revisar 23 de Septiembre de 2003, aceptado 2 de Febrero de 2004, versión final 20 de Febrero de 2004

RESUMEN: Este artículo presenta una revisión de las técnicas más empleadas para la obtención de modelos computacionales de superficies complejas. Estas representaciones están siendo utilizadas en diversas áreas de la industria mediante procedimientos de ingeniería reversa. Las tres principales categorías son las superficies funcionales (implícitas, paramétricas) y las superficies complejas simplicial (mallas triangulares). Se realiza un paralelo entre estos métodos y se exponen las ventajas y las desventajas de cada una de estas representaciones.

PALABRAS CLAVE: Modelado de superficies, Imágenes 3D, Superficies complejas

ABSTRACT: This paper shows a survey of the most employed technics in the representation of complex surfaces. These representations are employed in many areas by using reverse engineering. The three major categories are the functional surface (implicits, parametrics) and the complex simplicial surfaces (triangular meshes). A comparison between these methods is made and the advantages and disadvantages of each representation are shown.

KEYWORDS: Surface modeling, 3D images, Complex surfaces

1 INTRODUCCIÓN

La reconstrucción de modelos computacionales de objetos 3D a partir de muestras de la superficie del objeto es muy útil en aplicaciones de realidad virtual, CAD, medicina, visualización, manufactura y control de calidad (Farin, G., 2001; Anderson, C.W. y Crawford, H., 2000; Lindmark, L. y Soderkvist, I., 2000; Roth, G. y Boulanger, P., 1998). Cuando se intenta reconstruir la superficie de un objeto lo que se busca es obtener una representación digital del mundo real mediante un procedimiento de ingeniería inversa (Soderkvist, I., 1999; Várady, T., Ralph, M. y Cox, J., 1997). Esto permite tener una representación en términos de números que se pueden incorporar en un sistema digital como por ejemplo un paquete de CAD.

Los escáner 3D muestrean la superficie de un objeto con una aproximación que nos ofrece una nube de puntos bastante densa y con cierto ruido residual inherente al proceso de adquisición. A partir de esta nube de puntos de la superficie se puede obtener un modelo estimado que nos brinde información geométrica del objeto y que además este sujeto a restricciones de continuidad. Adicionalmente,

debe existir un compromiso entre la precisión del modelo y el costo computacional requerido para la visualización.

Una sola imagen de rango provee información parcial de la superficie del objeto, por lo tanto es necesario combinar múltiples imágenes de rango desde diferentes puntos de vista hacia un solo conjunto de puntos para obtener un modelo completo de la escena. Esto involucra los procesos de registro e integración (Eggert, D., Fitzgibbon, A.W. y Fisher, R. B., 1996; Masuda, T., Sakaue, K. y Yokoya, N., 1996; Dorai, C., Wang, G., Jain, A. y Mercer, C., 1995). El registro consiste en deducir y aplicar una serie de transformaciones para llevar las diferentes imágenes de rango hacia un sistema de coordenadas común. La integración es el proceso que consiste en remover los datos redundantes o promediar los puntos que son comunes a diferentes puntos de vista. En muchos casos debido a la falta de datos la imagen de rango no describe completamente el objeto, por lo cual es necesario realizar una extrapolación para completar los datos faltantes.

El proceso de segmentación (Hoover, A., Jean-Baptiste, G., Jiang, X., Flynn, P.J. y Bunke, H.,

1996) busca agrupar puntos que poseen propiedades homogéneas en imágenes de rango. La segmentación puede basarse en la superficie o en los bordes de las imágenes. La segmentación puede agrupar puntos que pertenecen a una sola superficie y la adaptación de superficies puede extraer primitivas geométricas de ella. Es por esto, que la segmentación y la adaptación de superficies se encuentran estrechamente relacionadas.

En el proceso de adaptación de datos de rango a superficies, existen varios tipos de adaptación. Se puede realizar la aproximación a una superficie funcional (polinomial o algebraica) la cual, puede ser implícita, explícita o paramétrica, o se puede aproximar a una superficie compleja *simplicial*. Las superficies complejas simplicial son una adaptación por partes de elementos básicos de la superficie, tales como parches triangulares, los cuales generan una malla triangular. A primera vista, se aprecia la diferencia en cuanto a suavidad de estas representaciones. las cuales poseen una serie de propiedades que consecuentemente generan ventajas y/o desventajas que serán expuestas posteriormente. El objetivo de la adaptación es dar la mejor estimación de la superficie del objeto real.

En la figura 1 se aprecia el proceso de obtención de un modelo computacional de un objeto del mundo real.

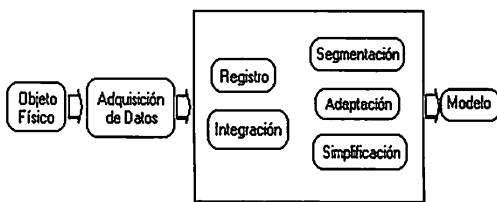


Figure 1: Proceso de reconstrucción de superficies.

La revisión sobre el modelado de superficies complejas es el punto de partida para posteriormente enfocarnos en la reconstrucción de rostros humanos. En ese proceso se emplean imágenes de rango de rostros obtenidas mediante escaners 3D. A estas imágenes se les realiza el proceso de registro e integración, seguido del proceso de segmentación del cual ya se han obtenido resultados previos en el grupo de trabajo (Osorio, G.A., 2003), posteriormente, se lleva a cabo una etapa de simplificación la cual se está explorando mediante algoritmos evolutivos para finalmente emplear un método de representación de superficies y obtener el modelo computacional del rostro. Se pretende crear un laboratorio de cirugía virtual para simular operaciones quirúrgicas en donde los estudiantes aprendices de medicina puedan llevar a cabo sus prácticas sin poner en riesgo la integridad

física del paciente.

En la sección 2 se plantea el problema de reconstrucción de superficies, en la sección 3 se revisan y comparan las representaciones mediante superficies funcionales, en la sección 4 se exponen la representación mediante superficies simplicial. Finalmente se presentan las conclusiones.

2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El problema de reconstrucción de superficies suaves a partir de la nube de puntos se puede plantear en términos matemáticos de la siguiente forma: Dado un conjunto de puntos $p_i = \{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=0}^n \in \mathbb{R}^3$ de la superficie del objeto \mathcal{P} , se desea encontrar una superficie \mathcal{S} que aproxime o interpole los puntos muestrados de la superficie de \mathcal{P} . La diferencia entre las técnicas existentes radica en el tipo de representación seleccionada para \mathcal{S} . La reconstrucción se puede afrontar desde el punto de vista de la interpolación o desde el punto de vista de la aproximación. La interpolación exige que la superficie generada pase exactamente por todos los puntos, pero si los datos contiene algún tipo de ruido adherido durante el proceso de adquisición, registro e integración es más adecuada una superficie aproximada. En este caso sólo se requiere que la superficie pase cerca de los datos de rango.

Definir la calidad de un representación no es sencillo, sobre todo cuando se cuenta con ruido inherente al proceso de adquisición. Aún así, la mejor reconstrucción es la que minimiza la distancia entre todos los datos de la superficie de \mathcal{P} y la superficie reconstruida \mathcal{S} .

El error entre la superficie aproximada \mathcal{S} y la geometría original $X_{i=0}^n$, está dado por la distancia entre los puntos de la superficie aproximada \mathcal{S} y los puntos medidos $X_{i=0}^n$ de la superficie del objeto \mathcal{P} .

$$f(\mathcal{S}) = \sum_{i=0}^n |\mathcal{S} - X_i|^2 \quad (1)$$

Existen varios tipos de distancia, entre las cuales tenemos: a) la distancia perpendicular (ortogonal) a la superficie, la cual es la distancia más corta desde la muestra medida al modelo de la superficie y b) la distancia alineada a un eje arbitrario.

3 SUPERFICIES FUNCIONALES

Entre las representantes de las superficies funcionales encontramos las superficies implícitas, las superficies explícitas y las superficies paramétricas.

3.1 Superficies Explícitas

Una superficie expresada mediante una función explícita es la gráfica de $z = f(x, y)$. Solo un conjunto reducido de superficies puede ser modelado con

funciones explícitas debido a que muchas superficies tienen por lo menos un punto (x, y) asociado a varios valores de z . Por esta razón no se encuentran con frecuencia en el modelado de superficies.

3.2 Superficies Implícitas

La superficie resultante es el lugar geométrico de los puntos para el cual el polinomio $f(x, y, z) = 0$ se evalúa a cero. Esta ecuación describe una relación implícita entre las coordenadas (x, y, z) de los puntos que pertenecen a la superficie. En este tipo de representación se posee una sola ecuación definida de manera global permitiendo caracterizar la forma a través de un conjunto pequeño de parámetros, la desventaja cae en la necesidad de especificar previamente el tipo de superficie.

Entre las clases que clasifican como funciones explícitas tenemos superficies algebráicas (Tauber, G., 1993), planos, cuádricas (Bolle, R.M. y Vemuri, B.C., 1991), supercuádricas, así como las hipercuádricas (Ha, S., Goldgof, D. y Bowyer, K., 1993).

La adaptación de la superficie cuádrica generalizada:

$$\begin{aligned} & a_1^1 x^2 + a_2^1 y^2 + a_3^1 z^2 + a_4^1 xy + a_5^1 xz \\ & + a_6^1 yz + a_7^1 x + a_8^1 y + a_9^1 z + a_{10}^1 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

a un conjunto $X_{i=0}^n$ de datos $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ se puede obtener minimizando la suma del error cuadrático.

$$E = \min \sum_{i=1}^N (x_i^t A x_i + x_i v + d)^2 \quad (3)$$

Con el ánimo de evitar la solución trivial (todos los $x_i = 0$) se especifican una serie de restricciones. Varios autores prefieren las representaciones implícitas frente a las representaciones paramétricas debido a que permiten una optimización más natural mediante técnicas de mínimos cuadrados (Pratt, V., 1987).

En la literatura se encuentran diversos trabajos que emplean superficies explícitas para aproximar datos de rango (Pilu, M., Fitzgibbon, A. y R. Fisher, Sept., 1996; Gander, W., Golub, G.H. y Strelbel, R., 1996; Gulliksson, M., Söderkvist, I. y Watson, G.A., 2001; Fitzgibbon, A., Pilu, M. y Robert B. Fisher, 1999) y también formulaciones híbridas empleando otras técnicas (Turner, D.A., Anderson, I.J., Mason, J.C. y Cox, M.G., 1999; Bittar, E., Tsingos, N. y Gascuel, M.P., 1995; Cohen, I. y Cohen, L.D., May, 1996).

En la Fig. 2 se aprecia la adaptación de datos de rango a una superficie explícita (elipsoide).

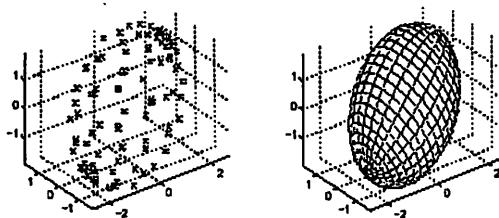


Figure 2: Aproximación a una superficie explícita (elipsoide).

3.3 Superficies Paramétricas

Una ecuación paramétrica describe una curva o superficie en base a un conjunto de parámetros que la recorren, como un conjunto de ecuaciones que permiten obtener cada una de las coordenadas, a medida que el parámetro evoluciona sobre el intervalo en el que se encuentra definido. De forma paramétrica, cada una de las coordenadas de un punto sobre la superficie es representada separadamente como una función explícita de parámetro independiente:

$$S(u) = (x(u), y(u), z(u)) \quad a \leq u \leq b$$

Aunque, el intervalo paramétrico $[a, b]$ es arbitrario, este regularmente se normaliza entre $[0, 1]$.

Se han empleado superficies paramétricas en varios de los problemas de adaptación de superficies (Michael, P. y Maureen, S., July, 1983; Watson, G., 1999; Goshtasby, A., July, 2000).

Una de las desventajas de las superficies paramétricas es que ellas mapean un parche rectangular hacia el espacio euclídeo tridimensional ($F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$), por lo cual una región compleja se representa por múltiples parches, haciendo difícil asegurar las condiciones de continuidad deseadas entre los múltiples parches (Park, I., Yun, I. y Lee, S., 1999). Por lo menos, para el proceso de visualización se requiere que sea C^1 , puesto que es el tipo de discontinuidad que detecta el ojo humano. Cuando se busca adaptar una superficie, muchas de las técnicas asumen que los puntos se encuentran ordenados, debido a la forma empleada en la captura de los datos. En el caso de no contar con puntos ordenados (no existe información topológica) surgen nuevas dificultades. Regularmente el procedimiento de adaptación es el siguiente:

1. El conjunto de puntos muestras es dividido en subconjuntos de puntos.
2. Los puntos en cada subconjunto son ordenados.
3. Un parche se adapta a los puntos de cada subconjunto, teniendo en cuenta criterios de continuidad en la frontera.

Entre los diversos tipos de superficies paramétricas tenemos las superficies de Bezier, las superficies B-Splines y las superficies NURBS (Non Uniform Rational Bases Splines) (Piegl, L. y Tiller, W., 1997; Farin, G., 2002).

3.3.1 Superficies de Bezier

Son superficies polinomiales paramétricas.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) P_{i,j} \quad (4)$$

$$0 \leq u, v \leq 1$$

donde las funciones base (*Polinomios de Bernstein*) están definidos por:

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (5)$$

Unas de las características de esta representación son:

1. El grado de la superficie ($n \times m$) está dado por la cantidad de datos que se deseé aproximar, por lo cual, gran cantidad de muestras producen superficies de orden elevado.
2. El número de punto de inflexiones depende del orden de la curva, con lo cual se pueden presentar oscilaciones indeseadas.
3. La superficie interpola los puntos de las esquinas y se aproxima a los demás datos.
4. La modificación de un punto tiene un efecto global sobre la superficie.

3.3.2 Superficies Splines

Las curvas Splines son curvas polinomiales por partes, en donde el cambio de polinomio ocurre en la partición del intervalo paramétrico denominado *nodo*. Solamente las derivadas altas son discontinuas en los nodos.

Una superficie paramétrica Spline de grado p en la dirección u y grado q en la dirección v está definida de la forma:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad (6)$$

con

$$0 \leq u, v \leq 1$$

En donde los $P_{i,j}$ constituyen una red de control bi-direccional, los $w_{i,j}$ son los pesos y las $N_{i,p}$ y $N_{j,q}$ son las funciones base no racionales de grado p y q

respectivamente, definidas sobre el vector de nodos no decreciente:

$$\begin{aligned} U &= \{0, \underbrace{\dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\} \\ V &= \{0, \underbrace{\dots, 0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1}\} \end{aligned} \quad (7)$$

con

$$r = n + p + 1$$

$$s = m + q + 1$$

El vector de nodos de orden $(m + p)$ y $(n + q)$ respectivamente, define una partición del intervalo de variación del parámetro, permitiendo ajustar la zona de influencia de cada punto de control. La superficie Spline interpola las cuatro esquinas de la red rectangular.

La función B-splines $N_{i,p}$ se definen recursivamente de la siguiente forma (de Boor, C., 1972):

$$N_{i,1} = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (8)$$

y

$$N_{i,p}(u) = \frac{(u - u_i) N_{i,p-1}(u)}{u_{i+p-1} - u_i} + \frac{(u_{i+p} - u) N_{i+1,p-1}(u)}{u_{i+p} - u_{i+1}} \quad (9)$$

Las funciones base tienen influencia local, $N_{i,p} = 0$ si se encuentra fuera del intervalo $[u_i, u_{i+p+1}]$. Con esto se reduce el número de cálculos requeridos considerablemente. La influencia local determina que la modificación de un punto afecta de manera local a la superficie. Los polinomios más utilizados son los polinomios cúbicos.

Aplicaciones con superficies Splines se encuentran en (Greiner, G. y Seidel, H.P., 1997; Pfeifle, R. y Seidel, H.P., 1995), también se han realizado adaptaciones de superficies teniendo en cuenta solo una porción de los datos (Forsey, D. y Bartels, R.H., 1995).

3.3.3 Superficies NURBS

Las superficies NURBS (Piegl, L. y Tiller, W., 1997) constituyen la generalización de las superficies de Bezier y de las superficies B-Splines. Tiene las mismas propiedades de las superficies B-Splines, su diferencia radica en la definición del vector de *nodos* empleado. Mientras que en los B-Splines el vector de nodos $U = \{0, \dots, 0, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, 1, \dots, 1\}$ es uniforme $u_{p+1} - u_p = d_i = k$, la formulación de una superficie NURBS emplea regularmente un vector de nodos no uniforme $u_{p+1} - u_p = d_i \neq u_p - u_{p-1}$. Con esto se logra una partición no uniforme del dominio paramétrico y a la vez se definen intervalos de influencia no uniformes sobre la curva a cada una de las funciones base y por ende a cada punto de control.

Desde que se planteó su formulación matemática (Versprille, K.J., 1975) han sido incorporadas en muchos paquetes de modelado comercial, para la representación, el diseño y el intercambio de información geométrica. Permiten la representación de formas regulares como cónicas, cuádricas y también de formas arbitrarias. Son invariantes a transformaciones geométricas comunes. Poseen algoritmos rápidos y numéricamente estables. Como se puede apreciar, las superficies NURBS ofrecen los grados de libertad suficientes para manipular la forma geométrica de un objeto. Además, han surgido diferentes variantes en su implementación (Han, S. y Medion, G., 1996; Qin, H. y Terzopoulos, D., 1995; Qin, H. y Terzopoulos, D., 1997).

En la Fig. 3 se aprecia el proceso de adaptación de una superficie NURBS.

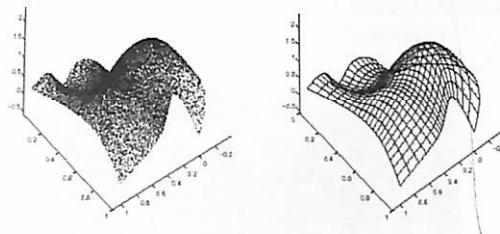


Figure 3: Proceso de Adaptación de superficies NURBS.

3.4 Comparación entre superficies explícitas y paramétricas

1. Las superficies implícitas requieren que se especifique el tipo y orden de la superficie que se desea adaptar.
2. Las funciones paramétricas poseen un significado más geométrico, es más natural para la representación computacional. Son más intuitivos los coeficientes de una función paramétrica que los coeficientes de una función explícita.
3. La definición de las superficies paramétricas facilita la generación de secuencias ordenadas de puntos a lo largo de la superficie.
4. La extensión de las curvas paramétricas hacia superficies paramétricas, se realiza fácilmente adicionando una coordenada z .
5. La complejidad de muchas operaciones depende de la representación con que se cuente.

5.1 Calcular un punto sobre la superficie es una cuestión difícil en la forma implícita.

5.2 Determinar la pertenencia de un punto a la superficie es difícil en la forma paramétrica. Además se tiene el problema de las parametrizaciones no uniformes y complicadas para superficies complejas.

6. En la forma paramétrica se presentan anomalías paramétricas relacionadas con la verdadera geometría del objeto.

4 SUPERFICIES SIMPLICIAL

Las mallas poligonales pertenecen a las estructuras más básicas para la representación de formas geométricas. Se obtienen directamente de los datos, en este caso no se realiza una aproximación, sino que se tiene una interpolación de las muestras. Se debe tener en cuenta que el ruido en los datos debe ser reducido, pues esta es una debilidad de la interpolación. Una malla de triángulos planos consiste de las coordenadas tridimensionales de un conjunto de puntos sobre la superficie y una estructura que describe la forma en que estos puntos están conectados en triángulos. La malla es una representación continua pero no suave de la superficie. La densidad de triángulos en diferentes áreas de la superficie puede variar dependiendo de la curvatura local. Sencillamente hablando, una superficie simplicial es la unión de triángulos unidos mediante sus bordes.

En esta representación se realiza una adaptación polinomial por partes, la superficie es una colección de simplices complejos entre los que se encuentran puntos, aristas y triángulos. Un punto es un simplex de dimensión cero, una arista es un simplex bidimensional y un triángulo es un simplex tridimensional, estos se observan en la Fig. 4. Se debe entender como una combinación convexa. Una arista es la combinación convexa de dos puntos, un triángulo es la combinación convexa de tres puntos. Al realizar la reconstrucción de un objeto a partir de datos de la superficie se obtienen elementos simpliciales de la colección de datos y luego se identifican simplices complejos a través de la superficie como el que se aprecia en la Fig. 5.

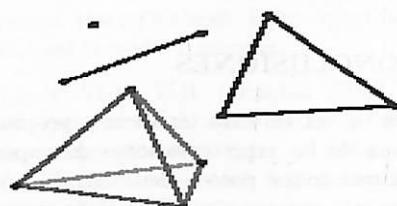


Figure 4: Simplices de baja dimensión.

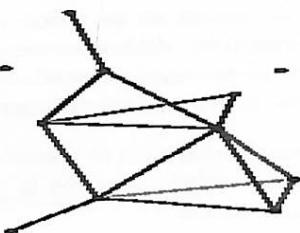


Figure 5: Simplex complejo.

Una malla M definida formalmente es un par (K, V) , donde: K es un simplicial complejo, el cual, representa la conectividad de los vértices, las aristas y las caras, las cuales, determinan la topología de la malla; $V = \{v_1, \dots, v_m\}, v_i \in \mathbb{R}^3$ es un conjunto de vértices que definen la forma de la malla en \mathbb{R}^3 .

Un simplicial complejo K consiste de un conjunto de vértices $\{1, \dots, m\}$, junto con un conjunto de subconjuntos no vacíos de los vértices, llamados simplices de K , de tal manera que cualquier conjunto consistente exactamente de un vértice es un simplex en K , y cada subconjunto no vacío de un simplex en K es de nuevo un simplex en K . Los 0-simplices $\{i\} \in K$ son llamados vértices, los 1-simplices $\{i, j\} \in K$ son llamados aristas y los 2-simplices $\{i, j, k\} \in K$ son llamados caras (Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J. y Stuetzle, W., 1992; Hoppe, H., DeRose T., Duchamp, T., Halstead, M., Jin, H., McDonald, J., Schweitzer, J. y Stuetzle, W., 1994).

Las desventajas que tienen las mallas poligonales consisten en que no es una representación suave de la superficie del objeto ideal. De esta manera, la calidad de la aproximación de superficies curvas depende de la cantidad de polígonos con los que se represente. En la Fig.5 se aprecia un modelo poligonal cuya densidad depende del grado de curvatura de la superficie, en la Fig.6 se muestra en detalle un zona del rostro (Hausler, G. y Karbacher, S., 1997).

Entre los diferentes trabajos realizados en esta representación tenemos (Owen, S.J. y White, D.R., October 2001; Delingette, H., September, 1999; Welch, W. y Witkin, A., 1994).

5 CONCLUSIONES

Después de ver las características y propiedades de cada una de las representaciones de superficies se aprecia que todas poseen determinado número de ventajas y/o desventajas. Pero definitivamente las superficies más empleadas son las paramétricas debido a las potentes cualidades que tiene para representar objetos de forma arbitraria, esto las ha convertido en un estandar de la industria gráfica y todos los paquetes de modelado comerciales incluyen algo-

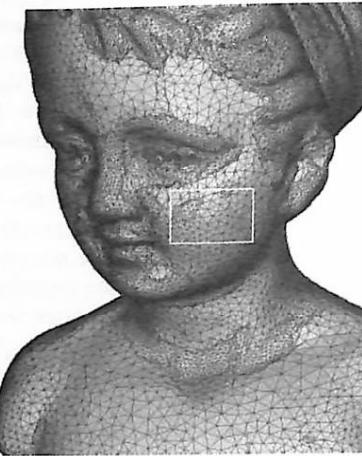


Figure 6: Proceso de Adaptación de superficies Triangulares.

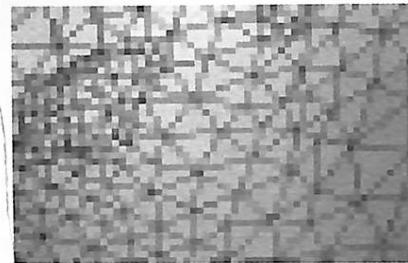


Figure 7: Zoom de una zona del rostro de la figura 6.

ritmos para su procesamiento. Aunque, siempre se requiere llevar la representación a una forma poligonal debido a que la mayoría del hardware existente está diseñado para renderizar polígonos.

Un aspecto importante es que el costo computacional para obtener el modelo está directamente relacionado con la cantidad de datos que deben procesar los algoritmos, por esto es necesario optimizar la cantidad de datos que conforman el modelo para disminuir el tiempo de cálculo, ya que una imagen de rango puede ser del tamaño de varios Megabytes.

REFERENCES

- Anderson, C.W. y Crawford, H. (2000), Fast generation of nurbs surfaces from polygonal mesh models of human anatomy, Technical report cs-99-101, Colorado State University.
- Bittar, E., Tsingos, N. y Gascuel, M.P. (1995), 'Automatic reconstruction of unstructured 3D data: Combining medial axis and implicit surfaces', *Computer Graphics Forum* 14(3), 457–468.

- Bolle, R.M. y Vemuri, B.C. (1991), 'On three-dimensional surface reconstruction methods', *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **13**(1), 1 - 13.
- Cohen, I. y Cohen, L.D. (May, 1996), 'A hybrid hyperquadric model for 2-D and 3-D data fitting', *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding* pp. 527-541.
- de Boor, C. (1972), 'On calculating with b-splines', *J. Approx. Theory VI* pp. 50-62.
- Delingette, H. (September, 1999), 'General object reconstruction based on simplex meshes', *International Journal of Computer Vision* **32**(2), 111-146.
- Dorai, C., Wang, G., Jain, A. y Mercer, C. (1995), 'From images to models: Automatic 3d object model construction from multiple views', *In Proceedings of the 13th IAPR International Conference on Pattern Recognition* **61**(3), 454-467.
- Eggert, D., Fitzgibbon, A.W. y Fisher, R. B. (1996), Simultaneous registration of multiple range views for use in reverse engineering., *in Proc. Int. Conf. on Pat. Recog.*, pp. pp 243-247.
- Farin, G. (2001), *Shape* , Springer-Verlag, New York.
- Farin, G. (2002), *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design — A Practical Guide*, The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics and Geometric Modeling, 5th edn, Morgan Kaufmann Publishers (Academic Press). 499 pages.
- Fitzgibbon, A., Pilu, M. y Robert B. Fisher (1999), 'Direct least square fitting of ellipses', *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **21**(5), 476-480.
- Forsey, D. y Bartels, R.H. (1995), 'Surface fitting with hierarchical splines', *ACM Transactions on Graphics* **14**(2), 134-161.
- Gander, W., Golub, G.H. y Strelbel, R. (1996), Least-squares fitting of circles and ellipses, *in editorial board Bulletin Belgian Mathematical Society*, ed., 'Numerical analysis (in honour of Jean Meinguet)', pp. 63-84.
- Goshtasby, A. (July, 2000), 'Approximating digital shapes by parametric surfaces', *5th Int'l Conf. Mathematical Methods for Curves and Surfaces*
- Greiner, G. y Seidel, H.P. (1997), 'Automatic modeling of smooth spline surfaces', *Proc. WSCG '97* pp. 665-675.
- Gulliksson, M., Söderkvist, I. y Watson, G.A. (2001), 'Implicit surface fitting using directional constraints', *BIT Numerical Mathematics* **41**(2), 331.
- Ha, S., Goldgof, D. y Bowyer, K. (1993), Using hyperquadrics for shape recovery from range data, *in International Conference on Computer Vision*, Berlin, Germany, pp. 492-496.
- Han, S. y Medion, G. (1996), Triangular NURBS surface modeling of scattered data, *in R. Yagel y G. M. Nielson, eds, IEEE Visualization '96*, pp. 295-302.
- Hausler, G. y Karbacher, S. (1997), 'Reconstruction of smoothed polyhedral surfaces from multiple range images', *3D Image Analysis and Synthesis '97* pp. 191- 198.
- Hoover, A., Jean-Baptiste, G., Jiang, X., Flynn, P.J. y Bunke, H. (1996), 'An experimental comparison of range segmentation algorithms.', *IEEE Trans. Pat. Anal. and Mach. Intel. Vol 18*(7), pp 673-689.
- Hoppe, H., DeRose T., Duchamp, T., Halstead, M., Jin, H., McDonald, J., Schweitzer, J. y Stuetzle, W. (1994), 'Piecewise smooth surface reconstruction', *Computer Graphics* **28**(Annual Conference Series), 295-302.
- Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J. y Stuetzle, W. (1992), 'Surface reconstruction from unorganized points', *Computer Graphics* **26**(2), 71-78.
- Lindmark, L. y Söderkvist, I. (2000), 'Dental applications of surface reconstruction methods'.
- Masuda, T., Sakae, K. y Yokoya, N. (1996), Registration and integration of multiple range images for 3-d model construction, *in Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 879-883.
- Michael, P. y Maureen, S. (July, 1983), 'Curve-fitting with piecewise parametric cubics', *In Proc. SIGGRAPH 83* pp. 25-29.
- Osorio, G.A. (2003), Análisis multiescala de imágenes de rango, Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia. Sede Manizales.
- Owen, S.J. y White, D.R. (October 2001), 'Mesh-based geometry: A systematic approach to constructing geometry from a finite element mesh', *In Proceedings 10th International Meshing Roundtable* pp. 83-96.
- Park, I., Yun, I. y Lee, S. (1999), 'Constructing nurbs surface model from scattered and unorganized range data', *Proc. 2nd International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling* .

- Pfeifle, R. y Seidel, H.P. (1995), Fitting triangular B-splines to functional scattered data, in W. A. Davis y P. Prusinkiewicz, eds, 'Graphics Interface '95', Canadian Human-Computer Communications Society, pp. 26-33.
- Piegl, L. y Tiller, W. (1997), *The NURBS book*, 2nd edn, New York : Springer-Verlag.
- Pilu, M., Fitzgibbon, A. y R. Fisher (Sept., 1996), 'Ellipse-specific direct least-square fitting', *IEEE International Conference on Image Processing, Lausanne, Switzerland*.
- Pratt, V. (1987), 'Direct least-squares fitting of algebraic surfaces', *Computer Graphics* 21(4), 145-152.
- Qin, H. y Terzopoulos, D. (1995), 'Dynamic NURBS swung surfaces for physics-based shape design', *Computer-aided Design* 27(2), 111-127.
- Qin, H. y Terzopoulos, D. (1997), 'Triangular NURBS and their dynamic generalizations', *Computer Aided Geometric Design* 14(4), 325-347.
- Roth, G. y Boulanger, P. (1998), Cad model building from multiple range images, in N. 41596, ed., 'Proceedings of Vision Interface 98', pp. 274-281.
- Soderkvist, I. (1999), 'Introductory overview of surface reconstruction methods', *Technical Report 1999-10, Department of Mathematics, Lulea University of Technology, Sweden*.
- Taubin, G. (1993), An improved algorithm for algebraic curve and surface fitting, in 'International Conference on Computer Vision', Berlin, Germany, pp. 658-665.
- Turner, D.A., Anderson, I.J., Mason, J.C. y Cox, M.G. (1999), 'An algorithm for fitting an ellipsoid to data', *University of Huddersfield*.
- Várady, T., Ralph, M. y Cox, J. (1997), 'Reverse engineering of geometric models - An introduction', *Computer-Aided Design* 29(4), 255-268.
- Versprille, K.J. (1975), Computer-Aided Design Applications of the Rational B-Spline Approximation Form, Ph. d. dissertation, Syracuse Univ.
- Watson, G. (1999), Least squares fitting of parametric surfaces to measured data, Technical Report NA/195, University of Dundee Technical.
- Welch, W. y Witkin, A. (1994), 'Free-form shape design using triangulated surfaces', *Computer Graphics* 28(Annual Conference Series), 247-256.