

# Sección de Estructuras

## CONSIDERACIONES SOBRE LA TEORIA DE ESFUERZOS

Por: Tomás Castrillón O.  
Ingeniero Civil

### I. INTRODUCCION

En este trabajo, el cual se ha hecho con el ánimo de difundir estos temas entre estudiantes y profesionales, se deduce en primer término la ecuación de transformación de la matriz de esfuerzos debida a un giro de los ejes de coordenadas, partiendo de la ecuación de transformación de los vectores y de las ecuaciones del equilibrio en el contorno de un cuerpo (ver anexos A1 - y A2).

Se obtendrá una expresión general, muy fácil de memorizar y se ilustrará como los estados comúnmente estudiados están involucrados en tal expresión. Esta ecuación de transformación es muy útil en el estudio del estado de esfuerzos en el entorno de un punto.

Luego se estudiará la cuestión de las direcciones principales como la solución a un problema de valores propios.

El acercamiento que se presenta no es el utilizado usualmente en los libros de texto elementales, pues no es el más intuitivo. Pero se considera importante, para los que han estudiado las deducciones más conocidas, por su generalidad y facilidad para recordar.

Se presume que el lector está familiarizado con la teoría de la elasticidad clásica sobre todo con la notación y con la teoría elemental de esfuerzos (referencias 1 y 2).

### II. LEY DE TRANSFORMACION DE LA MATRIZ DE ESFUERZOS

**II - 1. Introducción.** En esta sección se deduce la ecuación general de transformación de la matriz de esfuerzos y se la aplica tanto para el caso general como para el caso plano.

**II - 2. Deducción de la Ley de Transformación de la Matriz de Esfuerzos.** Para obtener la ecuación de transformación de la matriz de esfuerzos debida a un giro de ejes, se parte de la ecuación de transformación de los vectores debida a giro de ejes (anexo A - 1). Es ésta:

$$|p'| = |T| |p|$$

II - 2 - 1

Siendo:

$|p'|$  = vector referido a los nuevos ejes  $x', y', z'$

$|T|$  = matriz de transformación

$|p|$  = vector referido a los ejes originales  $x, y, z$

Evidentemente esta ecuación rige también para el vector normal a una superficie o sea:

$$|n'| = |T| |n|$$

II - 2 - 2

Se ha demostrado (anexo 2) la siguiente relación:

$$|p| = |\sigma| |n|$$

II - 2 - 3

Siendo:

$|p|$  = vector esfuerzo aplicado sobre la superficie definida por el vector normal  $\vec{n}$

$$|\sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} = \text{matriz de esfuerzos en el plano}$$

$$|\sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \text{matriz de esfuerzos en general}$$

En la deducción presentada en el anexo A-2 se ve que si en lugar de elegir los ejes  $x, y, z$  se eligen unos ejes  $x', y', z'$  se obtiene:

$$|p| = |\sigma| |n'|$$

II - 2 - 3a

De la ecuación II - 2 - 1 se obtiene:

$$|p| = |T|^t |p'|$$

II - 2 - 1a

De la ecuación II - 2 se obtiene también:

$$|n| = |T|^t |n'|$$

II - 2 - 2a

Puesto que  $|T|^t = |T|^{-1}$  por ser los ejes de coordenadas ortogonales.

Reemplazando las ecuaciones II - 2 - 1a y II - 2 - 2a en la ecuación II - 2 - 3 queda:

$$|T|^t |p'| = |\sigma| |T|^t |n'|$$

II - 2 - 4

Premultiplicando II - 2 - 4 por  $|T|$

$$|T| |T|^t |p'| = |T| |\sigma| |T|^t |n'|$$

$$\text{De donde: } |p'| = |T| |\sigma| |T|^t |n'| \quad \text{II - 2 - 4a}$$

Comparando las ecuaciones II - 2 - 3a y II - 2 - 4a se obtiene:

$$|\sigma'| = |T| |\sigma| |T|^t$$

II - 2 - 5

el cual era el resultado buscado. Puede consultarse en la referencia 4 una ampliación a este tema.

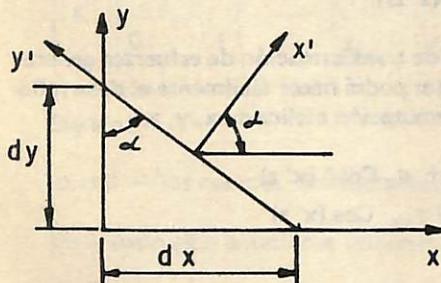
### II - 3. TRANSFORMACION DE LA MATRIZ DE ESFUERZOS EN EL PLANO

En la sección II se demostró la relación

$$|\sigma| = |T| |\sigma| |T|^t$$

para el estado plano se tiene:

$$|T| = \begin{vmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) \end{vmatrix} \quad \text{II - 3 - 1}$$



transformación de esfuerzos  
en el plano.

De la figura 1:

$$\cos(x', x) = \cos \alpha$$

$$\cos(x', y) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(y', x) = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(y', y) = \cos \alpha$$

Reemplazando:

$$|T| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \quad \text{II - 3 - 2}$$

Luego la relación II - 5 quedará:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Desarrollando se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \\
 \sigma_{y'} &= \sigma_x \sin^2 \alpha - 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha \\
 \tau_{x'y'} &= -\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha
 \end{aligned}
 \quad \text{II - 3 - 3}$$

Las cuales son las ecuaciones de la resistencia de materiales elemental.

#### II - 4. TRANSFORMACION DE LA MATRIZ DE ESFUERZOS EN GENERAL

La matriz  $|T|$  es en general la siguiente:

$$|T| = \begin{vmatrix} (x' x) & (x' y) & (x' z) \\ (y' x) & (y' y) & (y' z) \\ (z' y) & (z' y) & (z' z) \end{vmatrix}$$

Siendo:  $(i j) = \cos(i j)$

Entonces reemplazando en la ecuación II - 5 se obtiene:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_y & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x' x) & (x' y) & (x' z) \\ (y' x) & (y' y) & (y' z) \\ (z' x) & (z' y) & (z' z) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (x' x) & (y' x) & (z' x) \\ (x' y) & (y' y) & (z' y) \\ (x' z) & (y' z) & (z' z) \end{vmatrix}$$

Desarrollando se obtienen las ecuaciones de transformación de esfuerzos generales; sólo se incluyen las siguientes pero el lector podrá hacer fácilmente el desarrollo o también podrá obtener las restantes por permutación cíclica de  $x, y, z$ .

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2(x' x) + \sigma_y \cos^2(x' y) + \sigma_z \cos^2(x' z) \\
 &+ 2 \tau_{yz} \cos(x' x) \cos(x' y) + 2 \tau_{yz} \cos(x' z) \\
 &+ 2 \tau_{zx} \cos(x' z) \cos(x' x)
 \end{aligned}$$

II - 4 - 1

$$\begin{aligned}
 \tau_{x'y'} &= \sigma_x \cos(x' x) \cos(y' x) + \sigma_y \cos(x' y) \cos(y' y) \\
 &+ \sigma_z \cos(x' z) \cos(y' z) + \tau_{xy} [\cos(x' x) \cos(y' y) \\
 &+ \cos(x' y) \cos(y' x)] + \tau_{yz} [\cos(x' y) \cos(y' z) \\
 &+ \cos(x' z) \cos(y' y)] + \tau_{zx} [\cos(x' z) \cos(y' x) \\
 &+ \cos(x' x) \cos(y' z)]
 \end{aligned}$$

#### III. DIRECCIONES PRINCIPALES

III - 1 Introducción. En esta sección se tratará de hallar las direcciones principales

les. Se sabe que, por definición, los planos principales son aquellos para los cuales la dirección del esfuerzo resultante, coincide con la dirección de la normal al plano. Dicho de otro modo: son planos sobre los cuales actúan únicamente esfuerzos normales o sea que no hay esfuerzos tangenciales.

**III - 2 Direcciones principales en el plano.** Se parte de las ecuaciones del equilibrio en el contorno. Debe recordarse que estas ecuaciones valen también en el interior del cuerpo, cuando se estudie el estado de esfuerzos en un punto.

Entonces teniendo que: (anexo A-2)

$$|p| = |\sigma| |n|$$

Se pregunta si podrá existir una dirección para la cual se tenga (referencia 3).

$$|p| = k |n|$$

III - 2 - 1

Siendo  $k$  una constante arbitraria; si así fuera se cumpliría que:

$$|\sigma| |n| = k |n|$$

III - 2 - 2

Esta expresión puede ponerse así:

$$[K |1| - |\sigma|] |n| = 0$$

III - 2 - 3

Para el plano ésta ecuación queda:

$$\left[ K \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} \right] \begin{vmatrix} |p| \\ m_p \end{vmatrix} = 0$$

Siendo:

$|p|, m_p$  = los cosenos direccionales de la normal o sea de una dirección principal.

De la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{vmatrix} (k - \sigma_x) & -\tau_{xy} \\ -\tau_{xy} & (k - \sigma_y) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} |p| \\ m_p \end{vmatrix} = 0$$

Lo que constituye un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas. Para que ese sistema tenga una solución distinta a la trivial ( $|p| =, m_p = 0$ ) se requiere que:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} (k - \sigma_x) & -\tau_{xy} \\ -\tau_{xy} & (k - \sigma_y) \end{vmatrix} = 0$$

III - 2 - 4

Desarrollando el determinante se obtiene:

$$(k - \sigma_x)(k - \sigma_y) - \tau_{xy}^2 = 0$$

y luego :

$$k^2 - k(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación se encuentra que:

$$k = \frac{(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2}$$
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

o sea que habrá dos valores de k

$$k_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$y \quad k_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Correspondientes a direcciones principales. Si se reemplaza el primero en III - 2 - 2

$$\sigma_x \ell + \tau_{xy} m = \left[ \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] \ell$$

$$\tau_{xy} \ell + \sigma_y m = \left[ \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] m$$

De estas ecuaciones se obtiene con facilidad:

$$\frac{\ell}{m} = \frac{-2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Es fácil comprobar también que:

$$\frac{\ell}{m} = \text{Cota}$$

$$\text{Entonces } \tan \alpha = \frac{(\sigma_x - \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}}{2 \tau_{xy}}$$

Utilizando la identidad

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Se logra al final

$$\tan 2\alpha = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}}{2 \tau_{xy}}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y) - [(\sigma_x - \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}]}{2 \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

El cual es el resultado, ya conocido, de la Resistencia de Materiales elemental.

El lector puede repetir el procedimiento reemplazando la raíz k2 en la III - 2 - 2.

**III - 2 Direcciones principales en general** Se repite el procedimiento utilizando en la sección III - 1. Entonces la expresión:

$$[k | 1 | - | \sigma | ] | n | = 0$$

Queda:

$$\left[ K \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \right] \begin{vmatrix} \ell p \\ mp \\ np \end{vmatrix} = 0 \quad \text{III - 2 - 1}$$

Siendo  $\ell p$ ,  $mp$ ,  $np$  los cosenos direccionales de una dirección principal.

La expresión anterior equivale a:

$$\begin{vmatrix} (k - \sigma_x) & -\tau_{xy} & -\tau_{xz} \\ -\tau_{xy} & (k - \sigma_y) & \tau_{yz} \\ -\tau_{xz} & -\tau_{yz} & (k - \sigma_z) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ell p \\ mp \\ np \end{vmatrix} = 0 \quad \text{III - 2 - 2}$$



Lo que constituye un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas con tres incógnitas (Ip, mp, np). Para que un sistema tal tenga solución se requiere que:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} (k - \sigma_x) & -\tau_{xy} & -\tau_{xz} \\ -\tau_{xy} & (k - \sigma_y) & -\tau_{yz} \\ -\tau_{xz} & -\tau_{yz} & (k - \sigma_z) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{III - 2 - 3}$$

Desarrollando el determinante y ordenando los términos se obtiene:

$$\begin{aligned} k^3 - k^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + k (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2 - \\ \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2) - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \\ \tau_{xy}^2 + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz}) = 0 \end{aligned} \quad \text{III - 2 - 4}$$

Para saber si las raíces son reales se hace en primer término la siguiente consideración:

- Si se le da a  $k$  un valor muy grande positivo el lado izquierdo de la ecuación se volverá positivo también.
- Si se le da a  $k$  un valor negativo muy grande el lado izquierdo de la ecuación será también negativo.

Entonces tendrá que haber necesariamente un valor real para  $k$  o sea una raíz real. Sea esta  $k_3$  a la cual se hace corresponder el eje  $z$  ó  $\sigma_z = \bar{\sigma}_3$ .

Para determinar si las raíces restantes son reales se repite el análisis ya hecho pero para un sistema de coordenadas  $Ox' y' z'$  tal que el eje  $z'$  coincida con el correspondiente la normal determinado por  $k_3$ .

Entonces tendrá:

$$K \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & 0 \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l \\ m \\ n \end{vmatrix} = 0$$

De donde:

$$\begin{vmatrix} (k - \sigma_{y'}) & -\tau_{x'y'} & 0 \\ -\tau_{x'y'} & (k - \sigma_{x'}) & 0 \\ 0 & 0 & (k - \sigma_3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l \\ m \\ n \end{vmatrix} = 0$$

Lo cual exige, para obtener una solución diferente a la trivial que:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} (k - \sigma_x) & -\tau_{x'y'} & 0 \\ \tau_{x'y'} & (k - \sigma_y) & 0 \\ 0 & 0 & (k - \sigma_3) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando quedará:

$$(k - \sigma_3) \begin{vmatrix} (k - \sigma_x) & -\tau_{x'y'} \\ -\tau_{x'y'} & (k - \sigma_y) \end{vmatrix} = 0$$

Una posibilidad es  $k = \sigma_3$  y la otra que

$$(k - \sigma_x) (k - \sigma_y) - \tau_{x'y'}^2 = 0$$

$$\text{ó } k^2 - k(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x \sigma_y - \tau_{x'y'}^2 = 0$$

De donde sale que:

$$k_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{x'y'}^2}{4}}$$

$$k_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{x'y'}^2}{4}}$$

Las cuales son reales

El lector encontrará una discusión más detallada de la ecuación III - 2 - 4 en la referencia 1.

#### IV. CONCLUSIONES

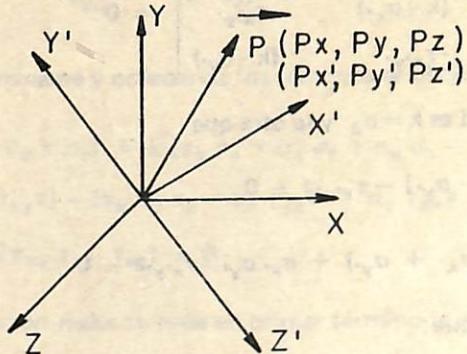
Utilizando conceptos elementales del análisis vectorial y de la teoría de las matrices se obtiene una formulación alterna de la teoría de la Elasticidad la cual implica muchas ventajas entre las que merece destacarse la facilidad para ser recordada. En este trabajo solo se presentaron, en forma muy somera, dos aspectos.

#### V. ANEXOS - Anexo A-1

**A - 1 - 1 Introducción.** En este anexo se deduce la ley de transformación de los vectores, cuando se hace una rotación de ejes.

**A - 1 - 2 Caso general.** En la figura A - 1 - 1 se indican dos ternas de ejes ortogonales, de  $(x, y, z)$  y  $(x', y', z')$ . La posición relativa de una respecto a la otra, está dada por los cosenos direccionales, en la siguiente forma: los cosenos de los ángulos

gulos que forman los ejes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  con los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son dados por el término  $L_{ij}$ , en donde el primer subíndice se refiere a los ejes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  y el segundo a los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , entonces: para el eje  $x'$  se tiene  $L_{1j} = (L_{11}, L_{12}, L_{13})$  para el eje  $y'$  se tiene  $L_{2j} = (L_{21}, L_{22}, L_{23})$  para el eje  $z'$   $L_{3j} = (L_{31}, L_{32}, L_{33})$  algunos autores los designan así:  $\cos(x' x)$  Coseno del ángulo que forma  $x'$  con  $x = L_{11}$ .



rotación de ejes ortogonales

Fig. A-I-1

Un vector se representará así:

$$\text{En el segundo sistema } \vec{p} = \vec{p}_{x'} + \vec{p}_{y'} + \vec{p}_{z'} = p_{x'} \vec{i}' + p_{y'} \vec{j}' + p_{z'} \vec{k}'$$

Siendo

$\vec{p}_{x'}$ ,  $\vec{p}_{y'}$ ,  $\vec{p}_{z'}$  las proyecciones sobre los ejes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$

$p_{x'}$ ,  $p_{y'}$ ,  $p_{z'}$  las magnitudes de las proyecciones sobre los ejes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$

$\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$  vectores unitarios versores a lo largo de los ejes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$

Análogamente si está referido al primer sistema

$$\vec{p} = \vec{p}_x + \vec{p}_y + \vec{p}_z = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$$

Si se efectúa el producto escalar  $\vec{p} \cdot \vec{i}'$  se obtiene la proyección de  $p$  sobre el eje  $x'$  o sea  $p_{x'}$

$$\begin{aligned}
 \vec{p} \cdot \vec{i}' &= px' = (px\vec{i} + py\vec{j} + pz\vec{k}) \cdot \vec{i}' \\
 &= px\vec{i} \cdot \vec{i}' + py\vec{j} \cdot \vec{i}' + pz\vec{k} \cdot \vec{i}' \\
 &= px L_{11} + py L_{12} + pz L_{13} \\
 &= px \cos(x'x) + py \cos(x'y) + pz \cos(x'z)
 \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene

$$\begin{aligned}
 py' &= px L_{21} + py L_{22} + pz L_{23} \\
 pz' &= px L_{31} + py L_{32} + pz L_{33}
 \end{aligned}$$

o también

$$\begin{aligned}
 py' &= px \cos(y'x) + py \cos(y'y) + pz \cos(y'z) \\
 pz' &= px \cos(z'x) + py \cos(z'y) + pz \cos(z'z)
 \end{aligned}$$

Debe tenerse en cuenta que el producto escalar de dos vectores unitarios (versores) da el coseno del ángulo que forman. Por último:

$$\begin{vmatrix} px' \\ py' \\ pz' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} px \\ py \\ pz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) & \cos(x'z) \\ \cos(y'x) & \cos(y'z) & \cos(y'z) \\ \cos(z'x) & \cos(z'y) & \cos(z'z) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} px \\ py \\ pz \end{vmatrix}$$

Y también

$$|p'| = |T| |P|$$

En donde el significado es obvio. Cuando los sistemas de coordenadas son ortogonales es fácil probar que  $|T|^t = |T|^{-1}$

**A - 1 - 3 Caso Plano.** Evidentemente este se obtiene con facilidad del caso general así:

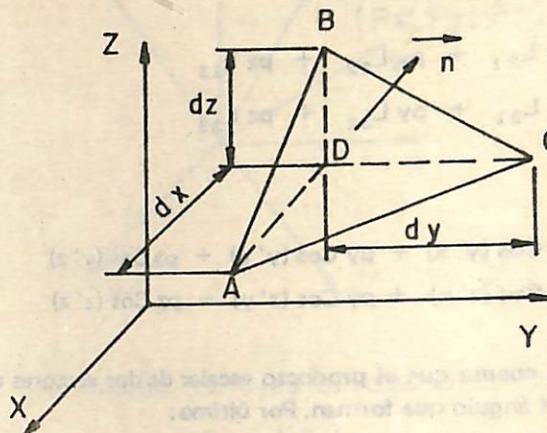
$$\begin{vmatrix} px' \\ py' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) \\ \cos(y'x) & \cos(y'y) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} px \\ py \end{vmatrix}$$

El lector que desee ampliar este estudio puede consultar en la referencia 3.

## ANEXO A - II

**A - II - 1 Introducción.** En este anexo se deducen las ecuaciones del equilibrio en el contorno.

**A - II - 2 Caso general.** El tetraedro ABCD ilustrado en la figura A - II - 1 está en el interior de un cuerpo, el cual está sujeto a un campo de tensiones, la superficie ABC está definida por el vector  $\vec{n}$  normal a ella.



elemento de volumen estudiado para obtener ecuación de equilibrio en el contorno.

Fig. A - II - 1

Es claro que se cumplen las siguientes relaciones y siendo  $\Delta S =$  superficie ABC.

$$\text{Superficie } BDC = \Delta S \cos nx$$

$$\text{Superficie } BDA = \Delta S \cos ny$$

$$\text{Superficie } ADC = \Delta S \cos nz$$

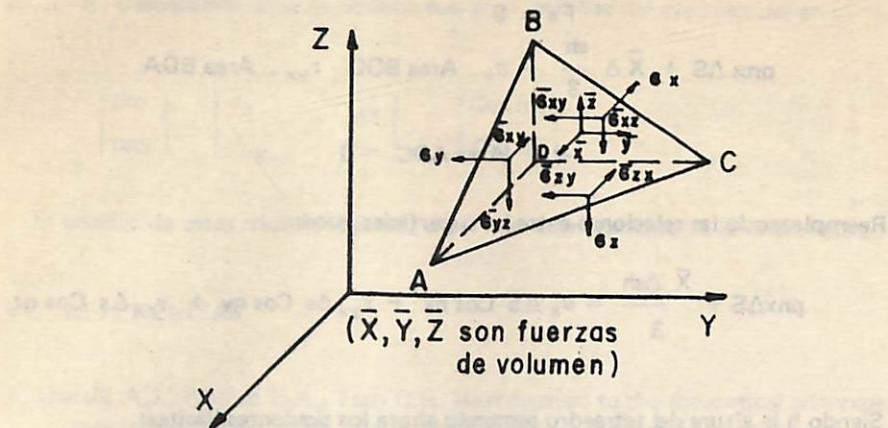
Siendo  $\cos ni =$  coseno direccional de la normal con el eje  $i (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

En la figura A - II - 1 se indican las fuerzas de superficie que actúan sobre las caras ABD, ADC, DBC del tetraedro lo mismo que las fuerzas de volumen  $(x, y, z)$ .

En la figura A - II - 3 se indican las fuerzas de superficie para la cara ABC.

Recuérdese que las fuerzas de superficie son fuerzas por unidad de área y las de volumen fuerzas por unidad de volumen.

Seguidamente se plantean las ecuaciones del equilibrio de fuerzas para el tetraedro ABCD.



fuerzas de superficie para caras posteriores y fuerzas de volumen

Fig. A-II-2

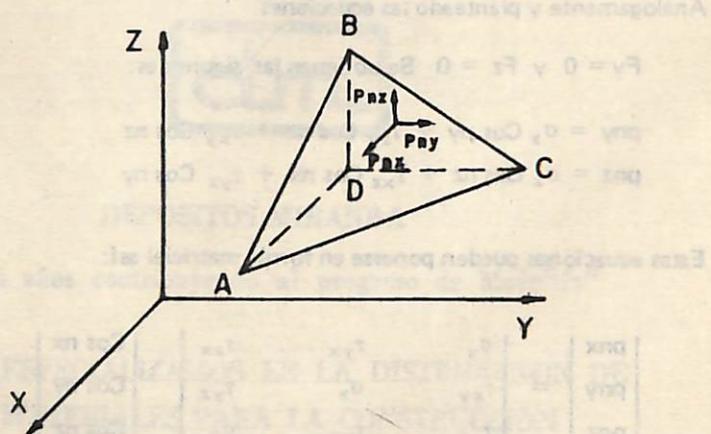


Fig. A-II-3

$$F_x = 0$$

$$p_{nx} \Delta S + \bar{X} \Delta \frac{sh}{3} - \sigma_x \text{ Area BDC} - \tau_{yx} \cdot \text{Area BDA}$$

$$- \tau_{zx} \text{ Area ADC} = 0$$

Reemplazando las relaciones entre las superficies queda:

$$p_{nx} \Delta S + \frac{\bar{X} \Delta sh}{3} = \sigma_x \Delta S \cos nx + \tau_{yx} \Delta s \cos ny + \tau_{zx} \Delta s \cos nz$$

Siendo  $h$  la altura del tetraedro tomando ahora los siguientes límites:

$$dx \rightarrow 0$$

$$dy \rightarrow 0$$

$$dz \rightarrow 0$$

Se tendrá

$$p_{nx} = \sigma_x \cos nx + \tau_{yx} \cos ny + \tau_{zx} \cos nz$$

Análogamente y planteado las ecuaciones

$F_y = 0$  y  $F_z = 0$  Se obtienen las siguientes:

$$p_{ny} = \sigma_y \cos ny + \tau_{zy} \cos nz + \tau_{xy} \cos nz$$

$$p_{nz} = \sigma_z \cos nz + \tau_{xz} \cos nx + \tau_{yz} \cos ny$$

Estas ecuaciones pueden ponerse en forma matricial así:

$$\begin{vmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos nx \\ \cos ny \\ \cos nz \end{vmatrix}$$

ó también

$$| p | = | \sigma | | n |$$

Siendo obvio el significado de los términos

A - II - 3 Caso plano. Este se obtiene con gran facilidad del caso general así:

$$\begin{vmatrix} pnx \\ pny \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos nx \\ \cos ny \end{vmatrix}$$

El estudio de estas relaciones puede verse más extensamente en la referencia 2.

## VI. REFERENCIAS

1. Durelli A.J., Phillips E.A., Tsao C.H. Introduction to the theoretical and experimental Analysis of stress and Strain Mc. Graw - Hill Book Company Inc.
2. García G. La teoría de la Elasticidad y sus aplicaciones en la Ingeniería. Universidad Nacional de Colombia.
3. Hawkins G.A. Multilinear Analysis for Students in Engineering and Science. John Wiley and Sons Inc.
3. Pipes L.A. Matrix Methods for Engineering. Prentice Hall International.



**DEPOSITOS MIRANDA**

**“25 años contribuyendo al progreso de Medellín”**

**NOS ESPECIALIZAMOS EN LA DISTRIBUCION DE  
MATERIALES PARA LA CONSTRUCCION**

**Dirección: Carrera 52 N° 59-49**

**Teléfonos Nos. 414848 — 426134 — 424377 — 313896**