DEL EDITOR

EL CONCEPTO DE ONDA EN LA MECÁNICA CUÁNTICA

OSCAR MACÍAS RAMÍREZ
Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Grupo de fenomenología de partículas elementales,oamacias@unalmed.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo es la síntesis de una serie de reflexiones generadas por las últimas cuatro motivantes clases sobre Teoría de Hamilton-Jacobi del curso de Mecánica Clásica del Profesor Alonso Sepúlveda Soto. De modo que el cuerpo principal del mismo está basado en las notas de clase y enseñanzas del gran Maestro, está estructurado en un sentido histórico y además cuenta con algunas interpretaciones propias.

Entre la Mecánica Cuántica y la Mecánica Clásica existe una relación muy peculiar, resulta que la formulación de las tesis fundamentales de la Teoría Cuántica son imposibles en principio sin acudir a la Mecánica Clásica. En el corazón de ésta singular circunstancia se encuentra la finísima analogía entre rayos y trayectorias estudiada por Jacobi. Este último con base en la noción de "frente de onda mecánico", presentó la Mecánica en una forma tal, que hizo posible la creación de la Mecánica Cuántica en el siglo XX.

La importancia de la revisión de este tema va más allá de la comprensión de la íntima relación entre Mecánica Ondulatoria y Mecánica Clásica. En particular, creo que además de ser un asunto heurístico y puramente histórico, puede aportarnos una amplia intuición sobre la interpretación probabilística de la Mecánica Cuántica.

2. MECÁNICA ONDULATORIA

2.1 Antecedentes

La Mecánica comenzó a desarrollarse desde su mismo nacimiento siguiendo dos caminos que, aunque equivalentes en cuanto a su capacidad explicativa, diferían en el estatus matemático y filosófico de los principios fundamentales. Son éstas las formas de la Mecánica conocidas como Mecánica Vectorial y Mecánica Analítica [1].

En la Mecánica Analítica propuesta por Leibnitz y avanzada por Lagrange y Hamilton la fuerza no entra como concepto fundamental, sino que más bien, la evolución temporal del sistema es conocida por medio de la construcción de la Lagrangiana y la aplicación de un principio integral y de tipo variacional [1].

Partiendo del hecho de que "Dios hizo el mundo de manera que éste tiende a minimizar sus acciones, a realizar sus movimientos del modo más económico posible", Maupertius[1] se emprendió en la búsqueda de una cantidad que debía hacerse mínima cuando los cuerpos estuvieran cambiando de estado de movimiento. No podía ser el tiempo porque entonces los cuerpos deberían moverse a la máxima velocidad, y tampoco había de ser la distancia porque entonces no existirían movimientos curvos [1].

Después de trabajar en ésta línea por cinco largos años encontró que la cantidad que debía Ser mínima era la acción, y debemos a Hamilton su actual forma y generalidad.

El principio de Hamilton, base de la Mecánica de Lagrange o Analítica, parece implicar la idea de que todo en la naturaleza tiene un propósito: La de seleccionar de entre todas las trayectorias posibles la que haga mínima una cierta cantidad [1]. En este sentido parece eludir la idea de causalidad aceptada en Mecánica Newtoniana, que asume que el movimiento es de determinada manera porque así lo exige la fuerza que actúa en cada instante sobre la partícula [1]. En otras palabras, según la Mecánica Vectorial las partículas no saben más que lo que deben hacer en el instante diferencial de tiempo siguiente, en tanto que según la Mecánica Analítica las partículas parecen olfatear [10] el mejor camino a seguir.

La disciplina axiomática de la Mecánica construida con base en el método de Hamilton, era vista por los científicos de la época, como teoría más simple, bella, y particularmente inspiradora de nuevas ideas. La creación del espacio de fase para el estudio de los fenómenos mecánicos se constituyó en la materialización de un gran ideal de orden estético: Ver la materia y el espacio de una sola mirada [5]. Puesto que la dimensión del espacio de fase es *6N*, donde *N* es el número de partículas, se sigue que si no hay partículas, entonces su dimensión es nula, lo que significa que no tiene sentido asegurar la existencia del espacio de fase independientemente de la materia que le adorna.

Una interpretación completamente diferente de este asunto se puede hacer de la mano de Newton: Si despojamos al espacio de los cuerpos materiales, entonces simplemente nos queda el inerte espacio Euclidiano [7].

En la mitad del siglo XIX Jacobi extendió gradualmente la utilidad del principio de Hamilton, para dar lugar a la llamada teoría de Hamilton-Jacobi. Este último logra dar una presentación tal a la Mecánica que sus ecuaciones tienen la misma forma matemática que aquellas que describen los fenómenos que se ubican en el ámbito explicativo de la Óptica Geométrica [4]. Para comprender mejor los fundamentos de la teoría de Jacobi, nos limitaremos a resumirla colocándonos en el caso particular, pero importante, de un campo de fuerza permanente. El conjunto de las trayectorias posibles de un punto material en ese campo dependen en general de 6 parámetros, es decir de la posición y de la velocidad inicial de la partícula material. Sin embargo es posible clasificar estas trayectorias en familias dependientes sólo de 3 parámetros, ya que las trayectorias de una misma familia resultan ser las curvas ortogonales de la familia de superficies dadas por la ecuación:

$$\frac{\partial S(q_i,\alpha_i,t)}{\partial t}+H(q_i,p_i,t)=0. \quad (1)$$

Cada familia de trayectorias y las superficies ortogonales correspondientes están exactamente en la misma relación que los rayos y las superficies de ondas en una propagación de ondas consideradas a la manera de la Óptica Geométrica.

Es interesante observar que esta analogía ampliamente estudiada por Hamilton no puede tener más que un sentido abstracto. En efecto, la partícula material teniendo unas condiciones iniciales bien determinadas, describe en el campo de fuerza una trayectoria única [1].

Dichas familias tendrían, por consiguiente, algún sentido físico si imagináramos una infinidad de puntos materiales idénticos y sin acción los unos sobre los otros que describen las diversas trayectorias que se hallarían así realizadas de un modo concreto [4]. Se advierte en éste caso que la teoría de Jacobi es, en cierto sentido, una teoría estadística [4], puesto que considera simultáneamente conjuntos de trayectorias [7]. Por eso se presiente que ella contiene en germen las interpretaciones probabilísticas de aquella nueva Mecánica con la que Schrödinger nos sorprendería casi un siglo más tarde.

De todos es conocido que cuando se trata de hacer óptica, el punto de vista más general y completo es el ondulatorio. Sin embargo al intentar estudiar el comportamiento de la luz cuando tropieza con objetos grandes[2] es más cómodo pensar a la manera de la óptica geométrica, cuya entidad fundamental ya no es el frente de onda sino que son los rayos [8]. Vale decir que la Mecánica Newtoniana vista desde la perspectiva de Jacobi era pensada como una teoría que privilegiaba el concepto de rayo. Así que una pregunta que quedó abierta[3] fue: ¿Será posible una Mecánica a la manera de la Óptica Ondulatoria cuyo límite de tipo óptico-geométrico es la teoría de Jacobi? [1].

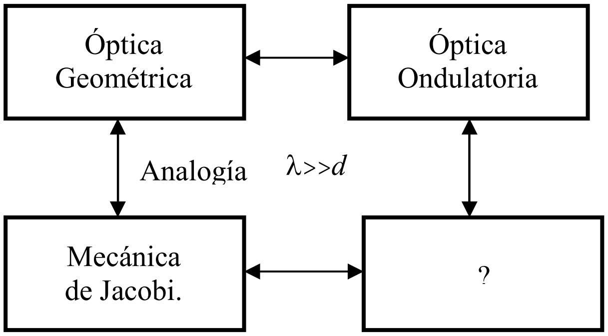

Figura 1. Esquema conceptual de la analogía Ref. [1]
Figure 1. Conceptual frame of the analogy Ref. [1]

2.2 Intermezzo

El argumento que acabamos de dar para la creación de la Mecánica Ondulatoria es de una simetría y de una belleza enorme. Pero la posibilidad de una investigación seria en estos términos no es dada al físico que tiene que saber siempre de lo que está hablando, y que por sobre todo tiene que responder a los hechos naturales. El matemático sin embargo habría estado en la libertad de ver hasta donde lo hubiese llevado su razonamiento geométrico y lógico en esta línea, pero tal cosa no se hizo.

Hubo que esperar hasta 1923 con el descubrimiento del efecto Compton, la espectroscopia de las bandas brillantes de átomos excitados y el estudio del efecto fotoeléctrico de los rayos X para que el temible dilema de las ondas y los corpúsculos ya utilizados para la descripción de las propiedades de las radiaciones, quisiera también extrapolarse en las investigaciones concernientes al electrón [3]. Desde luego tal idea no era del todo descabellada pues la intervención de los números enteros para caracterizar los estados estacionarios de los electrones atómicos parecía bastante sintomática [4]. En efecto, los números enteros se encuentran frecuentemente en todas las ramas de la física que tienen que considerar ondas: En elasticidad, en acústica, en óptica. Estaba pues permitido pensar que las condiciones de cuantificación conduciría a introducir un aspecto ondulatorio del electrón.

2.3 El Corpúsculo y su Onda Asociada

De lo que se trataba era esencialmente de asociar al movimiento de todo corpúsculo la propagación de una cierta onda [4]. Pero era fundamental que cuando se le aplicara esta regla general a los fotones se volviesen a encontrar las relaciones bien establecidas por Einstein. El problema fue resuelto satisfactoriamente por Schrödinger para un corpúsculo en movimiento libre, para una partícula en un campo variable con el tiempo y para el movimiento de la misma en un campo permanente, recurriendo a la analogía óptico-mecánica antes mencionada [8].
La primera dificultad a la que se llega procediendo de esta manera, es que es imposible hacer coincidir la velocidad de la partícula con la de su onda asociada. Sin embargo, en la teoría de las ondas, la onda monocromática es una abstracción que jamás se realiza en la práctica; y en realidad lo que nosotros designamos con el nombre de ondas monocromáticas son siempre a los grupos de ondas que ocupan un pequeño intervalo espectral. Ahora bien, si se examina la propagación de un grupo de ondas en la que la velocidad de propagación de las ondas monocromáticas es función de su frecuencia, se advierte que la velocidad de propagación del conjunto es distinta de la de las ondas que la conforman [8].

Es posible entonces hacer corresponder al corpúsculo en el campo permanente y con una energía dada, la propagación en la misma dirección de un grupo de ondas cuya frecuencia central sea igual a la energía de la partícula dividida por h obteniendo un resultado sorprendente: ¡La velocidad de la partícula corresponde exactamente a la del tren de ondas! Esta notable coincidencia es muy satisfactoria, puesto que sabemos que la velocidad de transporte de energía de una onda no es otra que la velocidad de grupo y como en nuestra concepción dualística la energía está asociada al corpúsculo, es natural que la velocidad del grupo de ondas asociadas sea igual a la del corpúsculo.
Según las ideas precedentes, en el interior del átomo de Bohr, se llega a comprender el verdadero sentido de las condiciones de cuantificación: La onda asociada a un estado estacionario del electrón atómico es en sí misma

una onda estacionaria en el sentido de la teoría de las ondas [3].

Las ondas estacionarias son perturbaciones de un medio continuo cuya configuración en el espacio no varía con el tiempo. Ejemplos simples de éstas son: Las ondas que pueden producirse en una cuerda vibrante fija en los extremos y las ondas electromagnéticas que pueden existir en una antena de radio aislada en un extremo. En la investigación de todos estos fenómenos ondulatorios irremediablemente debemos conducirnos a la determinación de los autovalores de una cierta ecuación diferencial, y así, la necesidad de una ecuación de este mismo estilo para el estudio de los estados estacionarios del electrón era más que manifiesta.

La Óptica Geométrica constituye solamente una primera aproximación valedera cuando los obstáculos que se le interponen a la luz son muy grandes comparados con el tamaño de su longitud de onda y cuando, además, la velocidad de esta propagación no varía demasiado rápido de un punto a otro en el espacio [8]. Sin embargo, en el interior del átomo la última condición no se cumple.

Esta idea capital quiere significar entonces que puesto que la onda asociada a los electrones intraatómicos no cumple los requerimientos de la Óptica Geométrica, entonces la evolución dinámica de los cuantos no puede ser descrita por los rayos de la Mecánica de Jacobi, sino que es necesaria una nueva Mecánica que privilegie los frentes de onda y cuya ecuación fundamental nos conduzca al conocimiento de los estados estacionarios del electrón [8].

A esta nueva y revolucionaria ciencia, que dejaría a la Mecánica Newtoniana y Einsteniana como antiguas, algunos pocos le conocieron como Mecánica Ondulatoria y la gran mayoría como Mecánica Cuántica.

2.4 Interpretación Física de la Mecánica Ondulatoria

En primer lugar la ecuación de Erwin Schrödinger define la función de onda como una función escalar y no como una vectorial [4]. En la Óptica una versión vectorial de la luz es precisa para tener en cuenta la polarización. Sin embargo con los progresos de la teoría, la función de onda escalar ψ sería reemplazada por una de varias componentes después de la teoría del electrón magnético de
Dirac [4].

La segunda observación que hay que hacer sobre la ecuación de Schrödinger es que ésta es compleja. En la Óptica esta peculiar circunstancia también aparece en la escritura de su función de onda, pero desde luego, sólo como una forma más cómoda de presentación, y por tanto no debe tener ninguna significación física.

Si a la ecuación de Schrödinger le realizáramos la transformación temporal

$t \longrightarrow it$ obtendríamos una ecuación real de difusión, que en principio debería ser más fácil de interpretar. En efecto, la función de onda ψ tomaría valores reales y podríamos por lo tanto intentar hacer representaciones geométricas de ella. Sin embargo, ésta posibilidad sólo nos sería dada si aceptáramos modificar nuestros aparatos para que midieran un antiintuitivo tiempo que conste de una parte real y otra imaginaria.

Aún así, es muy interesante preguntarnos ¿qué significa un tiempo complejo?, o en otras palabras, cuando el sol está en el zenit, qué sentido tendría la afirmación: Son las 12i meridiano. La pregunta no es trivial, y puede ser planteada de manera más general todavía:

¿Por qué los resultados de una cierta medición experimental no pueden ser dados en términos de números complejos? [2].

Uno podría pensar que dicho resultado sería posible si fueran medidas separadamente tanto la parte real como la puramente imaginaria de la variable dinámica compleja. Empero, esto envolvería dos mediciones o dos observaciones, que no veo por qué no puedan hacerse en Mecánica Clásica, pero que no serían correctas en Mecánica Cuántica donde en general las observaciones interfieren las unas con las otras [9]. En realidad no es posible hacer ambas mediciones simultáneamente, y si intentamos hacerlas la una muy cercanamente seguida por la otra, se introduciría una perturbación que afectaría la medición de la segunda [2].

Según hemos dicho, siendo la función ψ esencialmente compleja, es imposible asimilarla con cualquier tipo de vibración física, pero puede tratarse de formar con la ayuda de ψ expresiones reales que tengan algún sentido físico. Una cantidad que se nos presenta naturalmente es | ψ |2, es decir la intensidad de la onda en el sentido ordinario de las ondas. Para advertir la significación que debemos darle a esta importante magnitud podemos hacer de nuevo una analogía con la teoría de la luz que tanto ha servido de guía a los científicos.

Asimilando una onda de luz como una ola de fotones, cuya cantidad que atraviesa una cierta superficie es proporcional a | ψ |2 podremos entonces pensar dicha magnitud como una cierta densidad de fotones.

De cierto modo era muy previsible que esto se pudiera hacer con la luz, pues estamos hablando de muchísimos corpúsculos. Pero en el caso del electrón, ¿qué significaría una afirmación de este tipo?

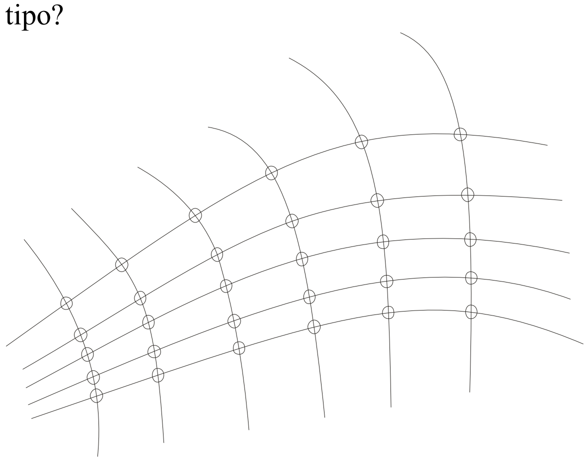

Figura 2. Posibles Localizaciones del Electrón
Figure 2. Possible locations of the electron

Puesto que un electrón tiene también una cierta onda ψ asociada, la cantidad | ψ |2 no debería interpretarse como la cantidad de electrones que atraviesan una cierta superficie en la unidad de tiempo, porque después de todo el electrón al que le asociamos la onda es solamente uno. Más bien esta cantidad nos habla es de una densidad de posibles electrones. Así que donde la densidad de posibles electrones sea más alta, será más factible su hallazgo. Como se desprende de la teoría de Jacobi [6], si la posición y la velocidad son imposibles de determinar simultáneamente, el conjunto de trayectorias perpendiculares a la onda asociada, son entonces trayectorias posibles de la partícula. Esto quiere decir que | ψ |2 es una magnitud que nos da cuenta de la posibilidad de encontrar al electrón en una cierta región muy pequeña del espacio, en otras palabras, la probabilidad de encontrarlo en esa región diferencial.

3. CONCLUSIONES

La física clásica, fiel al ideal cartesiano nos muestra el universo como un inmenso mecanismo susceptible de ser descripto con absoluta precisión por la localización de sus partes en el espacio y su modificación en el decurso del tiempo, mecanismo cuya evolución podía ser prevista con rigurosa exactitud cuando se poseía cierto número de datos de su estado inicial. Muy diferente es el punto de vista de la física cuántica. El mayor significado de la noción de onda y la pérdida de relevancia del concepto de trayectoria, hicieron que la cinemática dejara de ser una ciencia con sentido físico en esta escala.

Aunque los estudios de Jacobi sobre la analogía Óptico-Mecánica lo condujeron a introducir el fundamento de "frente de onda mecánico" casi en la mitad del siglo XIX, sus trabajos pudieron ser tomados en cuenta seriamente sólo después de que los experimentos confirmaron que se trataba de más que imaginaciones matemáticas.

La evolución de este concepto en la física además de ser un excelentísimo ejemplo de creación y pensamiento preciso, se constituye en una fuente inagotable de intuición y luminosidad de la emocionante teoría cuántica.

4. AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a Liliana Jaramillo Moreno, porque la luz de sus bellísimos ojos siempre me inspiran a tener pensamientos nobles.

REFERENCIAS

[1] SEPÚLVEDA SOTO, ALONSO. Historia de la Física, Cooperativa de profesores Universidad de Antioquia, (1995).

[2] DIRAC P. A. M. Principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press. (1958).

[3] ARONS ARNOLD. La Evolución de los Conceptos de la Física. México: Editorial Trillas, (1970).

[4] DE BROGLIE LOUIS. La Física Nueva y de los Cuantos. Buenos Aires: Editorial Losada S.A, (1965).

[5] SEPÚLVEDA SOTO ALONSO. Estética y Simetrías. Medellín: Fondo Editorial Universidad de Antioquia (2003).

[6] GOLDSTEIN HERBERT. Classical Mechanics. New York: Addison-Wesley, Reading, Mass. (1959).

[7] LANDAU LEV. D. AND LIFSHITZ E.M. Mechanics. Barcelona: Pergamon Press, Oxford, (1960).

[8] SEPÚLVEDA SOTO ALONSO. Notas de Mecánica Clásica. (2005).

[9] COHEN TANNOUDJI CLAUDE. Quantum Mechanics Vol 1. Paris: John Wiley and Sons, (1977).

[10] FEYNMAN RICHARD PHILLIPS, The Feynman Lectures on physics Vol 1: Mechanics. Toronto: Addison Wesley, Reading, Mass, (1967).