

# MODELOS DE CORRECCIÓN DE ERRORES Y COINTEGRACIÓN: A PROPÓSITO DEL PREMIO NÓBEL DE ECONOMÍA

Hernando Rendón Obando\*

## RESUMEN

*En este artículo se exponen los conceptos de integración, cointegración y modelos de corrección de errores, señalando la relación que existe entre estos conceptos y otros como relaciones de equilibrio, la teoría estadística de raíces unitarias en los procesos estocásticos y los modelos de mecanismos de corrección de errores.*

## ABSTRACT

*In this article the concepts of integration, cointegration and error correction models, are explained in a form simple. In addition, the article shows the relation between the concept of cointegration and others as: equilibrium relations as it is postulated by the economic theories, the statistical theory of unit roots in the stochastic processes and the error correction mechanisms models of dynamic econometric.*

---

\* Profesor asociado. Escuela de Economía. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

## INTRODUCCIÓN

Este año el premio Nóbel de Economía fue concedido a Clive Granger y Robert Engle, por sus contribuciones al análisis estadístico de los datos económicos de series de tiempo.

Estas notas se proponen exponer de una manera sencilla los conceptos de integración, cointegración y modelos de mecanismos de corrección de errores, elementos centrales en los aportes de estos econométricos al análisis de las series de tiempo. La amplia aplicación de estas técnicas en el trabajo aplicado del economista y la concesión del premio Nóbel a los que iniciaron el desarrollo de estas técnicas, son razones que justifican este artículo.

## INTEGRACIÓN

Considérese una variable escalar  $Y_t$  que sigue un proceso autorregresivo de primer orden:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente autorregresivo de primer orden,  $\varepsilon_t$  es el término de perturbación y se asume que es un proceso estocástico distribuido independientemente con media cero y varianza constante  $\sigma^2$ ,  $t$  es el subíndice tiempo,  $T$  es el número de observaciones y la condición inicial del proceso es  $Y_0$ . Restando  $Y_{t-1}$  a ambos lados de la ecuación **(1)** queda:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

donde  $\delta = \alpha - 1$  y  $\Delta$  es el operador de diferencias. Si  $\delta = 0$  o equivalentemente,  $\alpha = 1$ , entonces  $Y_t$  tiene una raíz unitaria y se dice integrado de orden 1, denotado  $I(1)$ . Esto significa que debe diferenciarse una vez para lograr estacionaridad, en el sentido de que la media, la varianza y autocovarianzas son independientes del tiempo. En efecto: con  $\alpha = 1$ , en **(1)** restando  $Y_{t-1}$  a ambos lados se tiene:

$$\Delta Y_t = \varepsilon_t \quad (3)$$

Dadas las propiedades de  $\varepsilon_t$ , este proceso es estacionario.

Granger (1981) formaliza el concepto del orden de integración de una serie: una serie es  $I(1)$  si es necesario diferenciarla  $n$  veces para alcanzar estacionaridad. Empíricamente, en la mayoría de las series macroeconómicas  $n = 1$  o máximo 2.

En presencia de una raíz unitaria, (1) se puede expresar como:

$$Y_t = Y_0 + \sum \varepsilon_i \quad (4)$$

donde  $Y_0$  es el valor inicial de la serie. Este proceso tiene media  $Y_0$  y varianza  $t\sigma^2$ . Aunque es estacionario en la media, no lo es en la varianza ya que ésta es creciente con el tiempo. La presencia del término  $\sum \varepsilon_i$  hace que los shocks tengan un efecto permanente sobre el nivel de la serie, puesto que se acumulan y por esto se denominan integradas.

## COINTEGRACIÓN

El análisis de regresión aplicado a las series de tiempo es problemático, dada la posibilidad de inferir falsas relaciones de causalidad, por el carácter no estacionario de las mismas. Desde muy temprano los analistas de series de tiempo encontraron estas dificultades cuando aplicaron los herramientas tradicionales de la correlación y la regresión a los datos de series de tiempo. Véase por ejemplo Yule (1926), Newbold - Granger (1974) y Hendry (1980).

Para series  $I(1)$  el concepto de cointegración permite detectar cuándo se dan relaciones auténticas entre estas series. Formalmente, sea  $Y_t$  un vector  $P \times 1$  de series  $I(1)$ . En general toda combinación lineal de éstas es  $I(1)$ , pero si existe un vector de parámetros  $\beta$  de dimensión  $P \times 1$ , tal que  $\beta'Y_t$  es  $I(0)$ , entonces se dice que las variables contenidas en  $Y_t$  están cointegradas. Es decir, a pesar de que cada serie individualmente divaga a lo largo del tiempo, sin tendencia a converger a un nivel estable, la combinación lineal de las mismas es estacionaria, en el sentido de que la relación entre ellas tiende a mantenerse en el tiempo. De esta

manera, el concepto de cointegración se relaciona con otros como equilibrio entre variables económicas, procesos estocásticos con raíces unitarias y modelos de corrección de errores.

## RELACIONES DE EQUILIBRIO

Las teorías económicas postulan relaciones de equilibrio entre un conjunto de variables. Las fuerzas de mercado o el comportamiento optimizador de los agentes tienden a llevar las variables a estas posiciones de equilibrio. El concepto de cointegración reproduce en un modelo estadístico esta noción de una relación de equilibrio. Ejemplos de este tipo de relaciones son las que se dan entre los precios de mercancías más o menos homogéneas, en diferentes localidades (ley del precio único); entre los gastos de consumo y el ingreso, etc. Ver Banerjee, Dolado, Galbraith, Hendry (1993) para un análisis de las relaciones entre los conceptos de equilibrio y cointegración.

## RAÍCES UNITARIAS

El concepto de cointegración puso de moda la teoría estadística sobre los efectos de raíces unitarias en los procesos estocásticos, desarrollada por Dickey-Fuller (1979), al ligar la existencia de una relación de cointegración entre series no estacionarias a la ausencia de raíces unitarias en los términos de error de las respectivas regresiones. Así el concepto de cointegración clarifica la noción de “regresiones espurias” de Newbold –Granger (1974) o de “correlaciones sin sentido” de Yule (1926), que se dan entre series que exhiben tendencias, permitiendo el análisis de series no estacionarias. En un contexto uniecuacional, la cointegración entre varias series se revela por la estacionaridad de los residuales de la regresión estática de una variable sobre las otras. Procedimientos más robustos y en un contexto multiecuacional han aparecido posteriormente, destacándose la estimación por Máxima Verosimilitud de Johansen (1995).

## MODELOS DE MECANISMOS DE CORRECCIÓN DE ERRORES (MCE)

Engle y Granger (1987) establecen una equivalencia entre los conceptos de cointegración y modelos MCE, en cuanto cointegración implica un modelo de MCE y a la vez un modelo MCE implica cointegración. Este es el llamado teorema de Representación de Granger. Para entender lo que expresan este tipo de modelos, considérese dos series escalares  $Y_t$  y  $Z_t$  ambas  $I(1)$ . Un modelo Autorregresivo y de Rezagos Distribuidos (ADL) de estas series es:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5)$$

donde  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Restando a ambos lados  $Y_{t-1}$  y sumando y restando  $\beta_1 Z_{t-1}$  en el lado derecho de la ecuación, se tiene:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \Delta Z_t + (\alpha - 1) [Y - KZ]_{t-1} \quad (6)$$

donde  $K = \frac{(\beta_0 + \beta_1)}{(1 - \alpha)}$  Ver Hendry, Pagan y Sargan (1984)

sobre los modelos ADL y su relación con otras especificaciones dinámicas. La ecuación (6) es un modelo MCE y simplemente es una reparametrización del (5) y se conoce como la representación MCE del ADL. En (5)  $\beta_0$  es el coeficiente de impacto, el cual mide los efectos de corto plazo de un cambio en  $Z_t$  sobre mientras que  $K$  mide el efecto de largo plazo de un cambio en  $Z_t$  sobre  $Y_t$ . En términos estadísticos, para que esta regresión tenga validez es necesario que todos los términos sean estacionarios. Dado el supuesto de que  $Y_t$  y  $Z_t$  son  $I(1)$ , las variables en diferencias son estacionarias. Por otra parte el término entre corchetes,  $[Y - KZ]_{t-1}$ , debe ser estacionario para que la ecuación esté balanceada y esto se da cuando hay cointegración entre  $Y_t$  y  $Z_t$ . La ecuación (6) dice que los cambios en  $Y_t$  dependen no sólo de los cambios en  $Z_t$  sino también del desequilibrio pasado:  $Y_{t-1} - KZ_{t-1}$ . Específicamente,  $(\alpha - 1)$  refleja el impacto sobre  $Y_t$  de tener  $Y_{t-1}$  diferente de  $KZ_{t-1}$ . Tales discrepancias podrían surgir de errores en las decisiones pasadas de los agentes económicos, con  $(\alpha - 1)$  reflejando los intentos de los agentes de corregir tales errores en el próximo período. De aquí el nombre de modelo de corrección de errores.

Históricamente los modelos MCE fueron formulados antes del concepto de cointegración, ya que especificaciones de este tipo aparecieron en modelos sobre la relación entre salarios y precios, Sargan (1964) y entre gastos de consumo e ingreso, Davidson, Hendry, Sbra y Yeo (1978). Precisamente, los últimos autores explícitamente denominan el modelo que estiman sobre los gastos de consumo para el Reino Unido como un modelo de corrección de errores. Con relación a la formulación de los MCE, el aporte del concepto de cointegración consistió en establecer de manera sólida sus bases estadísticas. Estos modelos han sido exitosos empíricamente en estudios de gastos de consumo, demanda de saldos monetarios reales, tasa de cambio, tasas de inflación, entre otras áreas de la economía aplicada. Véase los artículos publicados en Ericsson y Irons (1994) y el número 4 del *Journal of Business and Economic Statistics* de 1988.

La importancia de los MCE y del concepto de cointegración es que permite conciliar dos puntos de vista divergentes sobre el análisis de los datos de series de tiempo en economía: por una parte el enfoque puramente estadístico de las series de tiempo derivados de Box-Jenkins, los llamados modelos de transferencias, en los que solo aparecen variables en diferencias, especificación que, si bien supera el problema de las regresiones espurias, no tiene en cuenta la información de largo plazo contenida en los niveles de las variables; de otra, el enfoque econométrico con modelos basados en la teoría económica con estimaciones de ecuaciones estáticas, pero que presentan los problemas asociados a las regresiones espurias. Las especificaciones tipo MCE al combinar variables en diferencias y combinaciones lineales de niveles de las series que son estacionarias, permiten superar estos dos problemas: la información de las teorías económicas se incorpora en la desviación del equilibrio (variables en niveles) a la vez que se evitan las regresiones espurias y los problemas inferenciales del uso de series no estacionarias.

Frente a las especificaciones dinámicas tradicionales, como los modelos de rezagos distribuidos y modelos de ajuste parcial, los modelos MCE tiene varias ventajas: en primer lugar, la multicolinealidad, que aqueja las formulaciones de rezagos distribuidos, tiende a ser menor por cuanto la correlación lineal entre las variables en diferencias y las en niveles es menor, permitiendo

una estimación más precisa de los parámetros; en segundo lugar, el modelo MCE puede captar más fácilmente la información dinámica contenida en los datos de series de tiempo económicas, al incluir diferencias de todas las variables.

## CONCLUSIONES

La noción de cointegración y los conceptos asociados han significado una verdadera revolución en la manera de analizar los datos de series de tiempo económicos, siendo el desarrollo más importante en la econometría de las series de tiempo en las últimas dos décadas. Su importancia en el trabajo aplicado de los economistas se puede apreciar en el gran número de estudios en los que estas técnicas se utilizan, algunos de los cuales aparecen en las referencias dadas antes. La participación de Granger y Engle en el surgimiento y desarrollo de estos conceptos ha sido fundamental, lo que justifica ampliamente la concesión del premio Nóbel a estos autores.

## REFERENCIAS

- Banerjee, A., J. Dolado, J. Galbraith, y D. F. Hendry. 1993 *Cointegration, Error-Correction, and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data*. Oxford:Oxford University Press.
- Davidson, J. E. H., D. F. Hendry, F. Sbra, y S. Yeo. 1978. "Econometric Modelling of the of the Aggregate Time- Series Relationship between Consumers Expenditure and Income in the United Kingdom". *Economic Journal*, 88:661-92.
- Dickey, D. A. y W. A. Fuller. 1979 "Distribution of the Estimators for Autoregressives Time Series with a Unit Root". *Journal of the American Statistical Association* 74:427-31.
- Engle, R. F. y C. W. Granger. 1987 "Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing". *Econometrica* 55:251-76.
- Ericsson, N. R. y J. S. Irons. 1994. *Testing Exogeneity*. Oxford: Oxford University Press.

- Granger, C. W. y P. Newbold. 1974 "Spurious Regressions in Econometrics". *Journal of Econometrics* 16:121-30.
- Granger, C. W. 1981. "Some properties of Time Series Data and Their Use in Econometric Model specification". *Journal of Econometrics* 16: 121-130.
- Hendry, D. F. 1980. "Econometrics-Alchemy or Science?", *Economica*, 188: 387-406.
- Hendry, D. F. , A. R. Pagan, y J.D. Sargan. 1984. "Dynamic Specification". En *Handbook of Econometrics*, vol.2. Edited por Z. Griliches y M.D. Intriligator, 1023-1100. Amsterdam:North-Holland.
- Johansen, S. 1995. *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Auto-Regressive Models*. Oxford: Oxford University Press.
- Sargan, J. D. 1964. "Wages and Prices in the United Kingdom: A study in Econometric methodology". En *Econometrics and Quantitative Economics*, editado por D.F. Hendry y K.F. Wallis, 275-314. Oxford: Basil Blackwell.
- Johansen Yule, G. U. 1926. "Why do we sometimes get Nonsense –Correlations Between Time Series? A Study in Sampling and the nature of Time Series". En: *The Foundations of Econometric Analysis*, editado por D.F. Hendry y M.S. Morgan, 141-158. Cambridge: Cambridge University Press.